



Math. 4.

Weisslein

251^h

DIE
RATIONELLE MECHANIK

VON
DR. JOSEF WEISSTEIN.

ERSTER BAND.

STATIK — DYNAMIK DES PUNKTES.

MIT 97 FIGUREN IM TEXTE.



WIEN UND LEIPZIG.
WILHELM BRAUMÜLLER
K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTS-BUCHHÄNDLER.
1898.



DR. JOSEF WEISSTEIN

DIE RATIONELLE MECHANIK

I. BAND.

DIE
RATIONELLE MECHANIK

VON
DR. JOSEF WEISSTEIN.

ERSTER BAND.

STATIK — DYNAMIK DES PUNKTES.

MIT 97 FIGUREN IM TEXTE.



WIEN UND LEIPZIG.
WILHELM BRAUMÜLLER

K. U. K. HOF- UND UNIVERSITÄTS-BUCHHÄNDLER.

1898.



ALLE RECHTE VORBEHALTEN.

DRUCK VON FRIEDRICH JASPER IN WIEN.

DEM

ANDENKEN MEINER UNVERGESSLICHEN GATTIN

HENRYKA

IN LIEBE GEWIDMET

VON

DR. JOSEF WEISSTEIN.

Vorrede.

In diesem Werke war ich bestrebt, die rationelle Mechanik nach dem gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft und den neuesten Forschungen in klarer, fasslicher Form vorzutragen. Inwieweit ich dieses Ziel erreicht, möge der Leser beurtheilen. Ich glaube, ein umso nützlicheres Buch geschrieben zu haben, als bei uns in Österreich kein diese Wissenschaft speciell behandelndes Lehrbuch erschienen ist. Das ausgezeichnete Werk von Mach bezweckt bloß historisch - kritische Forschung. Das vortreffliche Lehrbuch von Poisson ist annoch vor 80 Jahren erschienen, und das vorzügliche Werk von Kirchhoff setzt beinahe die Kenntniss der Mechanik voraus. Soviel zur Rechtfertigung des Erscheinens dieses Buches.

INHALT

des
ersten Bandes.

Einleitung	Seite. IV
----------------------	--------------

Erster Theil.

Statik I.

Cap. I. Von Kräften, die einen materiellen Punkt sollicitieren	1
§ 1, 2. Princip der Trägheit	1
§ 3, 4. Richtung, Intensität, Angriffspunkt einer Kraft	2
§ 5. Versetzung einer Kraft	3
§ 6, 7. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften	3
§ 8—14. Parallelogramm der Kräfte	4
§ 15. Resultante mehrerer an einem Punkte angreifender Kräfte	9
§ 16, 17. Parallelepiped der Kräfte	9
Cap. II. § 18—20. Zusammensetzung von an einem Punkte in beliebiger Anzahl und Richtung wirkenden Kräften	11
Cap. III. § 21—24. Vom Gleichgewichte der an einem Punkte wirkenden Kräfte	14
Cap. IV. § 25—30. Fortsetzung vom Gleichgewichte der an einem Punkte, welcher genöthigt ist, auf einer Fläche oder Curve zu bleiben, wirkenden Kräfte	17
§ 31. Princip der Action und Reaction	22
Cap. V. § 32, 33. Von Kräften, die an mehreren Punkten angreifen . . .	22
§ 34—36. Zwei parallele Kräfte, die an zwei Punkten in gleichem Sinne angreifen	23
§ 37. Zwei parallele, an zwei Punkten in entgegengesetztem Sinne an- greifende Kräfte	26
§ 38. Zusammensetzung mehrerer paralleler Kräfte	26
§ 39—41. Theoreme der Momente	27
§ 42, 43. Gleichgewicht paralleler Kräfte	29
Cap. VI. § 44—48. Kräftenpaare	31
§ 49, 50. Drehungsrichtung der Paare	34
Cap. VII. § 51—53. Zusammensetzung von Kräftenpaaren	35
Cap. VIII. § 54, 55. Reduction von Kräften an einem invariablen Punkt- systeme	36

	Seite
§ 56, 57. Reduction auf eine Kraft und ein paralleles Kräftepaar . . .	37
§ 58. Parallele Kräfte in einer Ebene	39
§ 59—61. Zusammensetzung von Kräften	40
Cap. IX. § 62—78. Gleichgewicht von an einem soliden Körper oder Punkt- system angreifenden Kräften	42
Cap. X. § 79—83. Von den Momenten der Kräfte in Bezug auf verschiedene Achsen	54

Zweiter Theil.

Kinematik.

Cap. XI. § 84. Arten der Bewegungen	59
§ 85. Bewegung eines materiellen Punktes	60
a) § 86, 87. Geradlinig gleichförmige Bewegung	60
b) § 88—90. Geradlinig ungleichförmige Bewegung	62
c) § 91. Gleichförmig variierte geradlinige Bewegung	64
d) § 92—94. Beliebige Bewegung	65
Cap. XII. § 95. Die Acceleration bei ungleichförmigen geradlinigen Be- wegungen	69
§ 96—101. Die Deviation und Acceleration bei ungleichförmigen krumm- linigen Bewegungen	70
Cap. XIII. § 102. Bewegung solider Körper	77
§ 103. Zusammensetzung von Bewegungen	78
a) Translatorische	78
b) § 104. Zusammensetzung von Rotierungen	78
§ 105, 106. Kleine Rotierungen um Achsen, die zusammentreffen . .	79
§ 107, 108. Rotierungen um parallele Achsen	81
§ 109. Drehungspaare	83
§ 110. Verschiebung von Drehungen	84
§ 111—113. Reduction aller kleiner Bewegungen	85
§ 114—117. Bewegung eines Körpers, der einen fixen Punkt präsentiert	86
§ 118. Allgemeine Bewegung eines völlig freien Körpers	89
Cap. XIV. § 119—126. Theilweise Begründung der vorigen Sätze	90

Dritter Theil.

Statik II.

Cap. XV. § 127—129. Maß der Kräfte	97
§ 130—132. Masse der Körper	99
§ 133, 134. Verhältnisse von Kräften, Massen, Accelerationen, Ge- schwindigkeiten	100
§ 135, 136. Variable Kräfte	102
§ 137. Verhältnis zwischen Gewicht und Masse	104
Cap. XVI. § 138—140. Theorie der Schwere und des Schwerpunktes . . .	104
§ 141—143. Bestimmung des Schwerpunktes von Körpern	107
§ 144, 145. Eigenschaften des Schwerpunktes	109
§ 146. Polares Moment der Trägheit	111

	Seite
Cap. XVII. Bestimmung der Schwerpunkte von schweren Körpern und geometrischen Körpern	112
§ 147—154. Allgemeines	112
Cap. XVIII. § 155. Bestimmung des Schwerpunktes von Curven und Linien	116
§ 156. Schwerpunkt einer Geraden	116
§ 157. Schwerpunkt eines Kreisbogens	117
§ 158. Schwerpunkt der Schraubenlinie	118
§ 159. Schwerpunkt einer Parabellinie	120
§ 160. Schwerpunkt eines Bogens der Cykloide	121
§ 161. Schwerpunkte, die sich ohne Rechnung bestimmen lassen . . .	122
Cap. XIX. § 162—164. Schwerpunkte von ebenen Flächen	122
§ 165, 166. Schwerpunkt eines Kreissektors	124
§ 167, 168. Cykloide	125
§ 169. Schwerpunkte von ebenen Flächen im allgemeinen	127
Cap. XX. § 170—173. Flächeninhalt und Schwerpunkt von Rotationsflächen	128
Cap. XXI. § 174—176. Volumen und Schwerpunkt von Körpern	131
§ 177. Cykloidenkörper, erzeugt durch Rotation um die x-Achse . . .	134
§ 178. Schwerpunkt eines Ellipsoides	136
Cap. XXII. Guldin'sches Theoreme	137
a) § 179, 180. Bei Oberflächen	137
b) § 181, 182. Bei Rotationskörpern	138
Cap. XXIII. § 183—185. Volumen und Schwerpunkt bei Polarcoordinaten .	140
§ 186, 187. Volumen und Schwerpunkt eines abgestumpften Cylinders	144
Cap. XXIV. § 188—191. Trägheitsmomente	145
§ 192. Trägheitsmoment einer ebenen Fläche	147
§ 193, 194. Trägheitsmoment eines rechtwinkligen homogenen Parallelepipedes	148
§ 195. Trägheitsmoment eines homogenen Ellipsoides	149
§ 196, 197. Trägheitsmomente von Rotationsflächen	151
Cap. XXV. § 198, 199. Trägheitsmomente in Bezug auf verschiedene parallele Achsen	153
§ 200, 201. Trägheitsmoment in Beziehung auf geneigte Achsen . . .	154
Cap. XXVI. § 202—211. Centralellipsoide	155
Cap. XXVII. § 212, 213. Virtuelle Deplacierung	162
§ 214—218. Virtuelle Arbeit	163
Cap. XXVIII. § 219. Gleichgewicht eines freien materiellen Punktes . . .	166
§ 220. Gleichgewicht eines nicht freien Punktes	167
§ 221—225. Gleichgewicht zweier durch eine starre Linie verbundener Punkte	167
Cap. XXIX. § 226—234. Allgemeines Princip der virtuellen Deplacierungen bei einem starren Körper oder Punktsysteme	171
Cap. XXX. § 235—240. Ableitungen der Bedingungen des Gleichgewichtes aus obigem Principe	177
Cap. XXXI. § 241, 242. Herleitung der Gleichungen des Gleichgewichtes eines soliden Körpers	183
Cap. XXXII. Deformable Systeme	184
§ 243. Princip der Solidification	184

	Seite
§ 244—247. Gleichgewicht von Kräften an Schnüren	185
Cap. XXXIII. § 248—254. Gleichgewicht der Kräfte bei einer Seilcurve . .	187
§ 255—257. Verbindungen durch Ringe	190
Cap. XXXIV. § 258—261. Herleitungen der Bedingungen des Gleichgewichtes eines Seilpolygons aus der Generalgleichung	193
Cap. XXXV. § 262—273. Gleichgewicht eines biegsamen Fadens	196
Cap. XXXVI. § 274—282. Theorie der Kettenlinie	204
Cap. XXXVII. § 283—286. Construction der Kettenlinie	211
Cap. XXXVIII. § 287, 288. Die Kettenbrückenlinie	215
Cap. XXXIX. § 289. Die Anziehung der Körper	217
§ 290—298. Anziehung einer homogenen sphärischen Schicht und eines sphärischen Körpers	218
Cap. XL. § 299—303. Allgemeine Formeln	224
§ 304—306. Definition und Eigenschaften des Potentials	228
Cap. XLI. § 307—315. Attraction eines homogenen Ellipsoides auf einen inneren Punkt	230
Cap. XLII. § 316. Attraction eines homogenen Ellipsoides auf einen äußeren Punkt	238
§ 317—320. Theoreme von Ivory	238

Vierter Theil.

Dynamik des materiellen Punktes.

Cap. XLIII. § 321, 322. Gleichungen der geradlinigen Bewegung	242
§ 323—325. Geradlinige, gleichförmig variierte Bewegung	243
§ 326, 327. Bewegung eines schweren Punktes im leeren Raume . .	244
§ 328, 329. Bewegung eines schweren Punktes auf einer schiefen Ebene	247
§ 330—334. Bestimmung der Größe g	249
Cap. XLIV. § 335—338. Bewegung eines Punktes in einem widerstehenden Mittel	252
Cap. XLV. § 339—341. Aufwärts in einem widerstehenden Mittel sich be- wegender Punkt	255
§ 342. Bewegung eines Punktes in einem Mittel, dessen Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist	259
§ 343, 344. Bewegung eines schweren Punktes im leeren Raume von einer großen Höhe	259
Cap. XLVI. § 345, 346. Allgemeine Bewegungsgleichungen, insbesondere krummlinige Bewegungen	261
§ 347—349. Bewegung eines Punktes, der gezwungen ist, auf einer Oberfläche zu bleiben	262
§ 350. Bewegung eines Punktes, der gezwungen ist, auf einer Curve zu bleiben	264
§ 351. Kraft der Trägheit	265
Cap. XLVII. § 352, 353. Princip der lebendigen Kräfte	267
§ 354—357. Andere Formen des Punktes $X dx + Y dy + Z dz$. . .	268
§ 358, 359. Folgerungen des Principes der lebendigen Kräfte	271

§ 360. Fälle, wenn Reibung vorhanden oder die Bewegung in einem widerstehenden Mittel effectuirt wird	274
§ 361. Wenn der Punkt durch Kräfte getrieben wird, die gegen feste Mittelpunkte gerichtet sind	274
Cap. XLVIII. § 362—365. Princip der Flächenräume	275
Cap. XLIX. § 366—374. Bewegung der Geschosse im leeren Raume . . .	280
Cap. L. § 375, 376. Bewegung eines Punktes, der genöthigt ist, auf einer Curve zu bleiben, im leeren Raume	286
Cap. LI. § 377—387. Einfaches Pendel. Bewegung im leeren Raume . . .	288
§ 388, 389. Bewegung auf einer Cykloide im leeren Raume	296
§ 390. Tautochrone, Brachystochrone	299
Cap. LII. § 391—394. Das Pendel in einem widerstehenden Mittel	301
Cap. LIII. § 395—398. Centralkräfte, Bewegungsgleichungen	304
§ 399. Wenn die Kraft eine Function nur der Distanz ist	307
Cap. LIV. § 400. Anwendungen	308
§ 401, 402. Umgekehrtes Problem, Bestimmung der Kraft, wenn die Trajectorie gegeben ist	310
Cap. LV. § 403, 404. Elliptische Bewegung der Planeten	312
§ 405—407. Directes Problem	313
Cap. LVI. § 408, 409. Bewegung der Kometen und Satelliten. Die Kometen	316
§ 410, 411. Die Satelliten	318
Cap. LVII. § 412, 413. Universelle Attraction	319
Cap. LVIII. § 414. Elementare Kenntnisse aus der Mechanik des Himmels	320
§ 415—418. Problem der zwei Körper	321
Cap. LIX. § 419—422. Masse der Planeten	325
Cap. LX. § 423—428. Bestimmung der Zeit in der elliptischen Bewegung .	328
§ 429. Parabolische Bewegung der Kometen	333
Cap. LXI. Über die Centrifugalkraft, Bestimmung von g , Richtung der Verticale, astatisches Gleichgewicht, Homogenität	335
§ 430—432. Die Centrifugalkraft	335
§ 433. Bestimmung von g	337
§ 434. Richtung der Verticale	339
§ 435, 436. Astatisches Gleichgewicht	340
§ 437, 438. Homogenität	341
Cap. LXII. § 439—442. Das d'Alembert'sche Princip	343
Cap. LXIII. § 443—445. Von der Reibung. Gleitende Reibung, rollende Reibung, Zapfenreibung	348

Einleitung.

I.

Die rationelle Mechanik, auch analytische Mechanik genannt, deren Forschungen das unermessliche Weltall umspannen, ist entschieden die höchste Schöpfung des menschlichen Geistes, die Fürstin der Wissenschaften, »quo nihil maius meliusve terris fata donavere bonique divi«. Wie einst Prometheus das Feuer vom Himmel entwandt, wagte es hier der menschliche Geist in die Schmiede der Natur einzudringen, daselbst den ewigen, unabänderlichen Gesetzen der blind treibenden Kräfte nachzuforschen, holte aus tiefem Schacht edles Gestein und Edelmetall, und baute daraus einen Palast, der an Pracht alles übertrifft, was jahrtausendlang Arbeit je zustande gebracht.

Um in die tiefen Schächte einzudringen, benötigte der menschliche Forschungsgeist entsprechender Werkzeuge, die er selbst in der Analysis sich angefertigt, wenn auch diese noch nicht scharf genug sind. Die Analysis, und insbesondere die Differentialrechnung hat auch sozusagen in der Luft geschwebt, und war man darauf vorzugsweise durch die Forschungen in der rationellen Mechanik mit Nothwendigkeit hingeleitet.

Diese Wissenschaft ist, wie die Molecular-Physik, jüngerer Datums, wenn auch einige Grundsätze aus der Statik schon dem Archimedes bekannt waren; auch weiß schon Aristoteles, dass die Schwere eine gleichförmig accelerierte Bewegung sei: „τεκμήριον δὲ τοῦ μὴ εἰς ἄπειρον φέρεσθαι καὶ τὸ τὴν γῆν μὲν, ὅσῳ ἂν ἐγγυτέρῳ ᾖ τοῦ μέσου, θᾶπτον φέρεσθαι.“ Ein Beweis dafür, dass die Raumbewegung nicht nach dem Unbegrenzten stattfinde, ist auch das, dass die Erde (Körper), je näher sie dem Mittelpunkte ist, um so schneller bewegt wird. Unter Erde versteht Aristoteles einen fallenden Körper Περὶ οὐρανοῦ I 8. Noch zu Ende des sechzehnten Jahrhunderts hat man als ausgemachte Wahrheit angesehen, dass schwerere Körper im selben

Mittel, proportional den Massen, rascher als leichtere Körper fallen, ein Satz, den Aristoteles in seinem Werke *Περὶ οὐρανοῦ* als unzweifelhafte Wahrheit aufgestellt: „τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ θᾶπτον τὸ πλεῖον“, IV 4. »In der nämlichen Weise auch die grössere Quantität schneller.« Jahrtausende hat es gedauert, bis man erkannt hat, dass die Kraft, welche den Stein zur Erde fallen lässt, auch die Sterne in ihren Bahnen leitet, wenn auch dieses von Aristoteles geahnt wird.

Geschaffen und ausgebildet wurde die rationelle Mechanik von den Zierden, den unvergänglichen Leuchten der Wissenschaft. Galilei legte den Grundstein, und die großen Denker Kepler, Huyghens, d'Alembert und Newton waren die kühnen Baumeister. Bewundernswert sind auch die Leistungen von Euler und Bernoulli. Später traten Lagrange, Gauss und Laplace als Schöpfer und Pfadfinder auf. Namentlich hat sich Laplace mit seiner *Mécanique céleste* ein unsterbliches Denkmal für alle Zeiten gesetzt. Auch Poinsot, Jacobi, Poisson und Kirchhoff haben die Wissenschaft bereichert.

II.

Die rationelle Mechanik legt zwar allen ihren Forschungen die Analysis zugrunde, nimmt aber stets die Erfahrung zu Hilfe. Viele der von ihr aufgestellten Principien sind aus Thatsachen hergeleitet. Dabei werden diese Principien keineswegs als bloße Hypothesen angesehen, vielmehr liegt deren Evidenz in den zahlreichen Consequenzen, die aus jenen Principien entspringen und mit der Erfahrung vollkommen übereinstimmen. Viele Sätze, ursprünglich als Hypothesen aufgestellt, sind in dieser Weise zu evidenten Principien geworden.

Die Mechanik, welche die Erforschung und Kenntniss der Bewegung anstrebt, maßt sich dabei keineswegs an, in das Wesen und Geheimnis dieser Ursachen einzudringen. Ihr Streben ist vielmehr bloß dahin gerichtet, die Gesetze zu ergründen, nach welchen jene Ursachen wirken.

III.

Die Mechanik wird in drei Theile eingetheilt.

1. In die Kinematik (*κίνημα*), nämlich die Lehre von der Bewegung an sich, ohne Rücksichtnahme auf die Ursachen, welche jene erzeugen, und indem man noch zum Begriffe des durchlaufenen Raumes die Zeit hinzutreten lässt.

2. In die Statik, das ist die Lehre vom Gleichgewichte der Kräfte. Die Ursachen der Bewegung werden in der Mechanik Kräfte

genannt. Die Statik stellt nun die Bedingungen auf, unter welchen ein System zusammenwirkender Kräfte im Gleichgewichte sich befindet.

3. In die Dynamik, die Lehre von der Bewegung, als Wirkung der treibenden Kräfte.

Diese Theile der Mechanik greifen jedoch in einander ein, so dass, infolge der obwaltenden Beziehungen, eine stricte Trennung nicht leicht thunlich ist. Auch erheischt oft die anzustrebende Klarheit, manche Lehre zu trennen und zu verschieben. Die logische Gliederung obiger Disciplinen wird daher auch hier nicht genau eingehalten werden.

Insbesondere haben wir die früher übliche Zweitheilung insofern beibehalten, dass wir einen Theil der Statik früher und dann die erst von Ampère abgetrennte Kinematik vollständig durchgeführt und einen Theil der Statik auf später verschoben haben.

IV.

Die Zeit, man möge sie als Anschauung des inneren Sinnes, als Negativität oder als Sein auffassen, ist nicht weiter definierbar, sie kann gemessen werden, und darauf allein kommt es hier an. Aus dem genauen Takthalten bei mehrstimmiger Musik sieht man, dass auch kleine Intervalle scharf gemessen werden können. Kleine und größere Zeitintervalle werden mit Zuhilfenahme anderer Bewegungen gemessen, wie durch das gleichmäßige Fallen schwerer Körper, durch isochrone Schwingungen eines Körpers. Die Astronomie gewährt uns Mittel genauer Zeitmessung.

Ebenso ist der Begriff Raum, man möge ihn als die subjective Bedingung der Sinnlichkeit oder als Seiendes auffassen, nicht weiter definierbar, man kann ihn, worauf es hier allein ankommt, genau messen. Körper sind Theile der Materie. Die Mechanik erstreckt ihre Untersuchungen auf materielle Punkte. Sie begreift unter einem materiellen Punkt, unabhängig von jeder Hypothese über die Beschaffenheit der Materie, eine mit Stoff angefüllte Sphäre von unendlich kleinem Durchmesser. Der materielle Punkt in der Mechanik ist demnach verschieden von den Molecülen des Physikers, welche ein Volumen und eine bestimmte Form haben.

Ein System unter einander verknüpfter Punkte, welche in constanten Distanzen von einander zu verbleiben haben, werden solide, starre, rigide Körper genannt.

Bewegung, sie möge ein Seiendes oder eine bloße Beziehung sein, ist nicht weiter definierbar. Wahrnehmbar sind nur relative Bewegungen. Mit Hilfe der Bewegung wird die Zeit gemessen.

Durchläuft ein Punkt oder Körper in gleichen Zeiten gleiche Räume, so kann an dem rückgelegten Wege die darauf verwendete Zeit gemessen werden. Befindet sich ein Punkt beständig in demselben Orte im Raume, so befindet sich der Punkt im Zustande der Ruhe. Wahrnehmbar ist nur die relative Ruhe, durch Vergleichung des immobilen Punktes mit andern Punkten.

Zeno von Elea lehrte die Unmöglichkeit der Bewegung. In der That bewegt sich in der Natur alles, das Weltall ist bewegliche Materie, nichts ist in absoluter Ruhe. Die Mechanik jedoch, fern von aller Metaphysik, abstrahiert von diesen Ansichten, betrachtet bloß die einem Körper gegenüber anderen Körpern eigenthümliche relative Bewegung, und auf diese erstrecken sich ihre Forschungen.

Unter Geschwindigkeit versteht man das Verhältniß zwischen der Strecke, die ein Körper oder ein materieller Punkt in einer gewissen Zeit durchläuft, und der darauf verwendeten Zeit. Durchläuft ein Punkt einen bestimmten Weg in weniger Zeit als ein anderer Punkt, sagt man, die Bewegung des ersten Punktes sei rascher, und legt diesem eine größere Geschwindigkeit bei.

Die Bewegung eines Punktes kann geradlinig oder krummlinig, gleichförmig oder variiert sein. Gleichförmig ist die Bewegung dann, wenn der Punkt in jedem Zeittheil denselben Weg durchläuft. Ist das nicht der Fall, dann sagt man, die Bewegung sei variiert.

Man sieht also, dass obige Definition der Geschwindigkeit stillschweigend voraussetzt, dass die Bewegung gleichförmig sei, und für eine variierte Bewegung nicht mehr genau passt. Bei variierten Bewegungen werden wir der Geschwindigkeit im Lehrbuche einen schärferen Ausdruck geben.

Unter Kraft versteht man jede Ursache, welche den Zustand der Ruhe oder Bewegung eines Punktes oder Körpers ändert oder zu ändern anstrebt, und so kann eine Kraft auch die Bewegung eines Körpers aufhalten und Ruhe erzeugen. Die Kraft kann Druck-, Zieh- oder Stoßkraft sein. Im Lehrbuche werden wir noch andere Eintheilungen kennen lernen.

Andere Eintheilungen der Kräfte kommen in der angewandten Mechanik vor.

Der Begriff Masse, wie auch andere Begriffe finden ihre Erläuterungen im Lehrbuche.

In diesem Lehrbuche wird die Kenntniss der Analysis wie auch der elementaren Grundsätze der Mechanik vorausgesetzt. Aus ersterer wird jedoch hie und da manches begründet angeführt werden.

Erster Theil.

STATIK I.

Erstes Capitel.

Von Kräften, die einen materiellen Punkt sollicitieren.

Princip der Trägheit.

§ 1. Befindet sich ein materieller Punkt in Ruhe oder Bewegung, so kann er diesen Zustand nicht selbstthätig modificieren. Jede Modification dieses Zustandes kann nur durch eine äußere, von einem anderen Punkte oder einem System von Punkten herstammende Ursache bewirkt werden. Die Ursache nennen wir Kraft.

Diesen durch die Erfahrung bestätigten Grundsatz nennen wir Princip der Trägheit.

Vermöge dieses Principes wird demnach ein Punkt, der sich in Ruhe befindet, wenn keine äußere Ursache hinzutritt, fortdauernd in Ruhe verbleiben. Ändert er diesen Zustand, so ist es gewiss, dass eine äußere Ursache ihn in Bewegung gesetzt.

Befindet sich ein Punkt in geradliniger Bewegung und wirkt keine äußere Ursache auf ihn ein, alsdann wird sich der Punkt geradlinig und mit derselben Geschwindigkeit, mit welcher er die Bewegung begonnen, fortdauernd weiter fortbewegen. Aufhören der Bewegung oder Abnahme der Geschwindigkeit kann nur durch eine äußere Ursache, als Widerstand, Reibung oder eine andere äußere Ursache herbeigeführt werden. Alles dieses wird durch die Erfahrung vollkommen bestätigt.

§ 2. Sehen wir nun einen Punkt in Ruhe oder begabt mit einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung, so sagen wir, dass auf den Punkt keine Kraft einwirke. Die Bewegung dauert fort, weil sie einmal, beispielsweise infolge eines Stoßes, eingetreten war und daher der Punkt mit derselben Geschwindigkeit, die er einmal

erhalten, sich fortbewegen muss, wenn nicht eine äußere Ursache ihn in Ruhe versetzt. Ist der Punkt ausgestattet mit einer Bewegung, die nicht gleichzeitig gleichförmig und geradlinig ist, ist es gewiss, dass er von einer Kraft sollicitiert ist.

Wie es mit einer krummlinigen Bewegung diesbezüglich beschaffen ist, werden wir im Verlaufe dieses Lehrbuches sehen.

Wir werden insbesondere ersehen, dass auch bei krummlinigen Bewegungen um eine Achse, wenn der Punkt in Bewegung ist und keine Tangentialkraft auf ihn einwirkt, die Bewegung fortdauernd mit gleicher Geschwindigkeit vor sich geht.

Richtung, Intensität, Angriffspunkt einer Kraft.

§ 3. Bei einer Kraft sind drei Bestimmungen in Betracht zu ziehen: *a)* die Richtung, *b)* die Intensität, *c)* der Angriffspunkt.

a) Wirkt eine einzige Kraft auf einen materiellen Punkt, so bewegt sich dieser nothwendig in gerader Linie, da kein Grund vorhanden, dass der an sich als frei gedachte Punkt von der geraden Linie, in welcher die Kraft ihren Angriffspunkt zu bewegen strebt, sich eher nach der einen Richtung als nach der anderen bewegen sollte. Die gerade Linie, nach welcher die Kraft wirkt, ist die Richtungslinie der Kraft.

b) Unter Intensität versteht man das grössere oder geringere Vermögen der Kraft Bewegung zu erzeugen.

Richtung und Intensität einer Kraft werden durch eine gerade Linie vorgestellt.

c) Angriffspunkt ist der materielle Punkt, auf welchen die Kraft ihre Wirkung appliciert. Werden nun Richtung und Intensität der Kraft graphisch durch eine gerade Linie repräsentiert, so stellt der Ursprung dieser den Angriffspunkt vor.

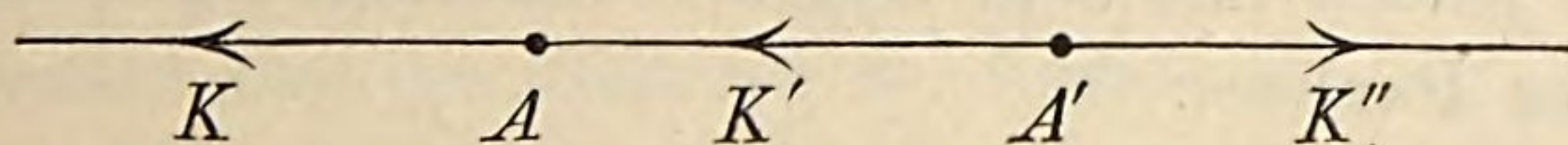
§ 4. Kräfte sind einander gleich, wenn sie auf denselben Punkt, in derselben Richtung, aber in entgegengesetztem Sinne wirkend sich das Gleichgewicht halten. Zwei gleiche, auf einen und denselben Punkt, in derselben Richtung, aber in entgegengesetztem Sinne wirkende Kräfte, zerstören sich daher und können unterdrückt, also so betrachtet werden, als wenn sie nicht vorhanden wären.

Man bezeichnet ferner eine Kraft als constant, wenn sie dem Angriffspunkte, der Punkt möge in Ruhe oder Bewegung sich befinden und die Bewegung wie immer beschaffen sein, immer dieselbe Bewegung ertheilt, in welchem Zeitpunkte immer man die Kraft auf den Punkt wirken lasse.

Versetzung einer Kraft.

§ 5. Eine auf einen Punkt wirkende Kraft kann ohne Änderung des Effectes auf jeden Punkt ihrer Richtungslinie transportiert werden, vorausgesetzt, dass der neue Angriffspunkt mit dem früheren invariable verbunden ist.

Fig. 1.



In der That. Die Kraft K , in Richtung und Intensität durch die Strecke AK vorgestellt, greift den Punkt A in der Richtung der AK an. Liegt nun der Punkt A' auf der starren Richtungslinie AA' invariable mit A verbunden, so bringen wir an A' zwei der Kraft K gleiche, in entgegengesetztem Sinne wirkende Kräfte K' , K'' , vorgestellt durch die Strecken $A'K'$, $A'K''$ an, wodurch am Zustande des Punktes A nichts geändert wird. Wir können die in entgegengesetztem Sinne wirkenden gleichen Kräfte AK und $A'K''$ als unterdrückt betrachten, und dann verbleibt nur die der Kraft K gleiche, auf A' wirkende Kraft $A'K'$, welche demnach denselben Effect wie AK mit dem Angriffspunkt A herbeiführt.

Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften.

§ 6. Wirken zwei oder mehrere gleiche Kräfte auf einen materiellen Punkt in derselben Richtung und in gleichem Sinne, so werden sie zusammengerechnet und man spricht von einer doppelten, dreifachen, mehrfach großen Kraft. Hält eine in entgegengesetztem Sinne wirkende Kraft diesen mehreren Kräften das Gleichgewicht, so sagt man, diese einzige Kraft sei jenen mehreren Kräften gleich. Diese einzige Kraft, welche mehreren Kräften das Gleichgewicht hält, wird Resultante dieser mehreren Kräfte, und die einzelnen Kräfte werden die Componenten genannt.

Kräfte können zu einander in einem commensurablen und, wie man leicht einsieht, auch in einem incommensurablen Verhältnisse stehen.

§ 7. Wirken mehrere Kräfte auf einen Punkt in einem Sinne und andere Kräfte auf denselben Punkt in entgegengesetztem Sinne, und ist die Summe der einen der Summe der anderen Kräfte gleich, alsdann herrscht Gleichgewicht und alle Kräfte haben sich wechselseitig aufgehoben, zerstört.

Übersteigt die Summe der Kräfte nach einem Sinne die Summe der Kräfte nach dem anderen Sinn, so ist der übersteigende Rest

die Resultante aller Kräfte und der Punkt bewegt sich nach dem Sinne dieser Resultante, also nach dem Sinne der Kräfte, welche die größere Summe ausmachen. Befindet sich ein System von Kräften im Gleichgewichte, so werden diese als gegenseitig zerstört betrachtet und der Punkt befindet sich im Zustande der Ruhe oder Bewegung wie wenn diese Kräfte nicht vorhanden wären. In der Regel verbindet man jedoch mit dem Begriffe »Gleichgewicht« den Zustand der Ruhe des Punktes.

Parallelogramm der Kräfte.

§ 8. Greifen zwei Kräfte einen materiellen Punkt nach Richtungen an, die miteinander einen Winkel einschließen, so haben sie eine Resultante, welche in Richtung und Größe durch die Diagonale des aus den Strecken der Kräfte construierten Parallelogrammes vorgestellt wird.

Dieses höchst wichtige, zuerst von Stevin aufgestellte, die ganze Mechanik durchziehende Theoreme wurde von Galilei und Newton aus den Begriffen der Bewegung und Geschwindigkeit bewiesen. Man suchte dann nach Beweisen, die von diesen Begriffen unabhängig wären. Vollständig kann jedoch der Begriff Bewegung nicht umgangen werden. Der Beweis von Poisson ist minder einfach und weitläufig. Der folgende ist nach Bernoulli.

§ 9. Greifen zwei Kräfte einen materiellen Punkt an, deren Richtungen einen Winkel miteinander bilden, so wird der Punkt sich in einer gewissen Richtung so bewegen, als wäre er von einer einzigen, nach dieser Richtung wirkenden Kraft getrieben.

Diese neue Kraft, welche an die Stelle jener beiden Kräfte tritt, wird, wie bei den in derselben Richtung wirkenden Kräften, ebenfalls Resultante genannt, und die beiden Kräfte nennt man die Componenten dieser Resultante.

Dabei ist es klar, dass die beiden Kräfte nur eine einzige Resultante haben können, die wir mit R bezeichnen. Denn hätten sie zwei Resultanten R und R' , so müsste eine der Kraft R gleiche, auf derselben Richtung, in entgegengesetztem Sinne wirkende Kraft der Kraft R' Gleichgewicht machen, was aber nur dann möglich ist, wenn R' mit der Kraft R an Intensität, Richtung und Sinn genau übereinstimmt, also mit dieser identisch ist und zusammenfällt.

§ 10. Dieses vorausgeschickt, wollen wir beweisen, *a)* dass die Richtung dieser gesuchten Resultante in die Richtung der Diagonale

des obangegebenen Parallelogrammes fällt und daher auch in der Ebene der beiden Componenten liegt. *b*) Dass sie auch durch diese Diagonale vorgestellt wird.

Sind die beiden Kräfte gleich, so wird die Richtung der Resultante nothwendig mit der Halbierungslinie zusammenfallen, welche den von den Richtungen der beiden Kräfte gebildeten Winkel in zwei gleiche Hälften theilt, da kein Grund vorhanden, dass die Richtung der Resultante der einen Kraft näher als der anderen Kraft liegen oder gar aus der von den beiden Kräften gebildeten Ebene heraustreten sollte.

Sind nun die beiden Kräfte durch die beiden Strecken *a b*, *a c* vorgestellt, so wird die Resultante nothwendig in die Richtung der Diagonale *a d* fallen, welche den Winkel *b a c* in zwei gleiche Hälften theilt.

Vermöge eines früheren Lehrsatzes können wir aber die in *a* angreifende Kraft auf ihrer Richtung *a d* nach *d* versetzen. Dann können wir diese Kraft im Punkte *d* in zwei gleiche, den früheren beiden Kräften *a b*, *a c* parallele und gleiche Kräfte *d e* und *d f* theilen, ohne dass der Effect geändert wird.

Diese ganze Zusammensetzung und Theilung läuft aber ersichtlich darauf hinaus, diese beiden Kräfte, ohne Änderung des Effectes, parallel zu sich selbst zu verschieben.

Man hat daher auch folgenden Lehrsatz: Zwei gleiche, an einem Punkte angreifende Kräfte können, ohne Änderung des Effectes, parallel zu sich selbst auf einen anderen

Punkt der den Winkel beider Richtungen halbierenden Geraden versetzt werden, vorausgesetzt, dass der neue Angriffspunkt mit dem früheren invariable verbunden ist.

§ 11. Seien nun zwei ungleiche Kräfte, angreifend an einem Punkt nach Richtungen, die miteinander einen beliebigen Winkel einschließen. Die Kräfte *P*, *Q* mögen durch die Strecken *a m*, *a n* vorgestellt sein, und nehmen wir zunächst an, sie stehen in einem

Fig. 2.

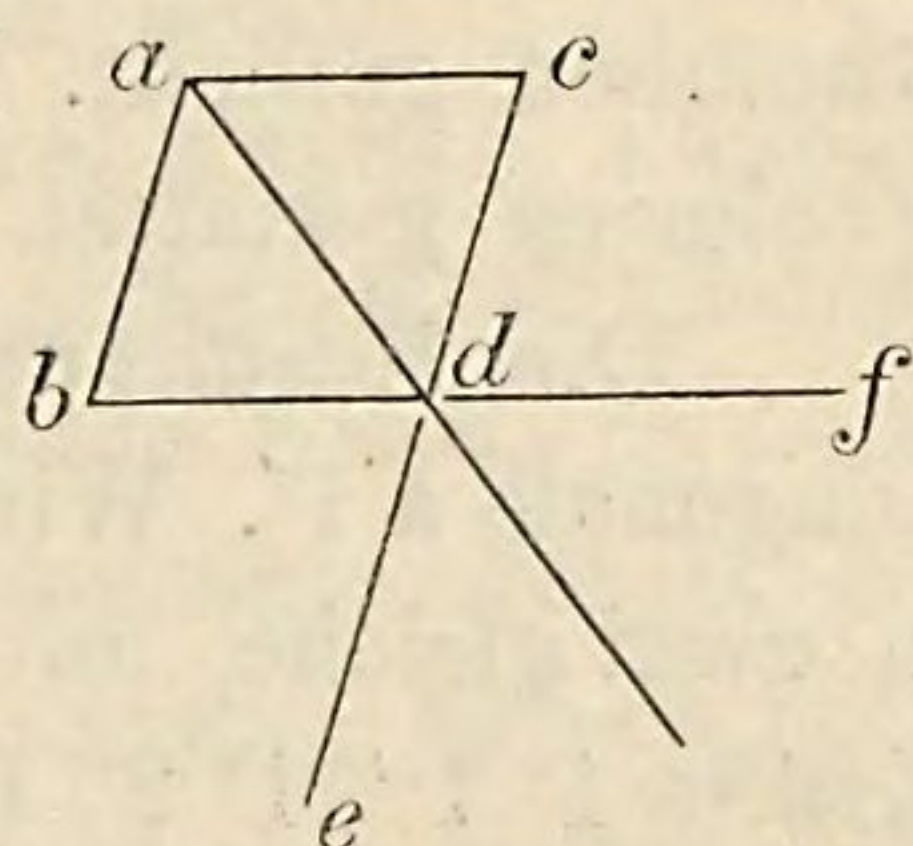
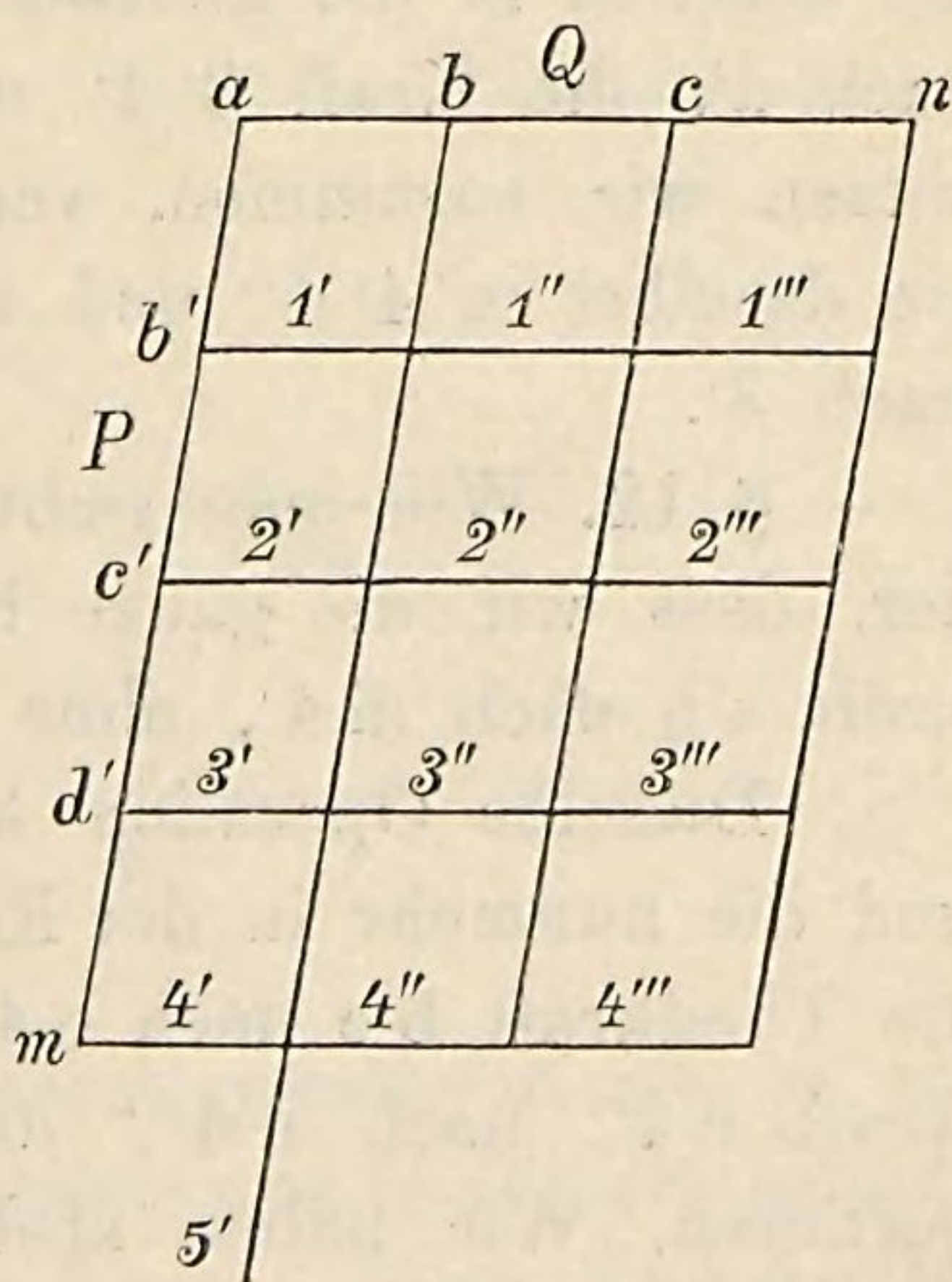


Fig. 3.



commensurablen Verhältnisse. Wir zerlegen nun die Kräfte P, Q nach einer bestimmten gemeinschaftlichen Einheit, verschieben eine Einheit der Kraft P nach b' , eine zweite nach c' , eine dritte nach d' , und ebenso eine Einheit der Kraft Q nach b und eine zweite nach c und, wie aus Fig. 3 zu ersehen, haben wir hier die Kraft P in 4 Einheiten, und die Kraft Q in 3 Einheiten zerlegt, und die Theilkräfte so versetzt, dass die Einheiten an den Punkten a, b', c', d', b, c angreifen. Die ganze Figur ist in dieser Weise in gleiche Rhomben getheilt. Diese Versetzungen von Kräften sind nach dem Früheren gestattet.

Die Resultante der gleichen Kräfte $a b' a b$ geht durch die Diagonale $a 1'$. Wir versetzen sie nach $1'$, und zerlegen sie daselbst in zwei gleiche, mit den früheren Kräften $a b', a b$ genau congruente Kräfte $1' 1'', 1' 2'$. Die Kraft $1' 1''$ versetzen wir nach b' , die Kraft $1' 2'$ nach b . In b' haben wir zwei gleiche Kräfte $b' c', b' 1'$, deren Resultante, nach der Richtung $b' 2'$ gehend, wir nach $2'$ versetzen, und daselbst in zwei gleiche $2' 2'', 2' 3'$ zerlegen. Die Kraft $2' 2''$ versetzen wir nach c' , die Kraft $2' 3'$ nach $1'$. Die gleichen Kräfte $c' 2', c' d'$ setzen wir zusammen, versetzen die Resultante nach $3'$, zerlegen sie daselbst in die gleichen Kräfte $3' 3'', 3' 4'$, $3' 3''$ versetzen wir nach d' , die Kraft $3' 4'$ nach $2'$. Die gleichen Kräfte $d' 3', d' m$ setzen wir zusammen, versetzen die Resultante nach $4'$, zerlegen sie daselbst in $4' 4''$ und $4' 5'$, $4' 4''$ verschieben wir nach m , $4' 5'$ nach $3'$.

§ 12. Wie man sieht, ist der Effect der bisherigen Operation der, dass wir die ganze Kraft $P = a m$ nach $b 4'$, und die Theilkraft $a b$ nach $m 4'$, ohne Änderung des Effectes, versetzt haben.

Dieselbe Operation können wir in früherer Weise fortsetzen, und die nunmehr in der Richtung $b 4'$ wirkende Kraft P , wie auch die Theilkraft $b c$ nach $c 4''$ und $4' 4''$ überführen, und dann die Kraft $c 4''$ nach $n 4'''$ und die Theilkraft $c n$ nach $4'' 4'''$ transportieren. Wir haben alsdann zwei Kräfte, die eine P nach der Richtung $n 4'''$ und die andere Q nach der Richtung $m 4'''$ wirkend, die beide nach $4'''$ verlegt werden können. Die Resultante beider Kräfte wird daher durch $4'''$, also in der Richtung $a 4'''$ wirken und fällt daher in die Richtung der Diagonale des Parallelogrammes $a n m 4'''$.

Da dieses Theoreme richtig ist, wenn die Kräfte in einem commensurablen Verhältnisse stehen, so muss es richtig sein, wenn die Kräfte in einem incommensurablen Verhältnisse stehen, da durch ein bekanntes Raisonement dieser Fall auf jenen zurückgeführt wird.

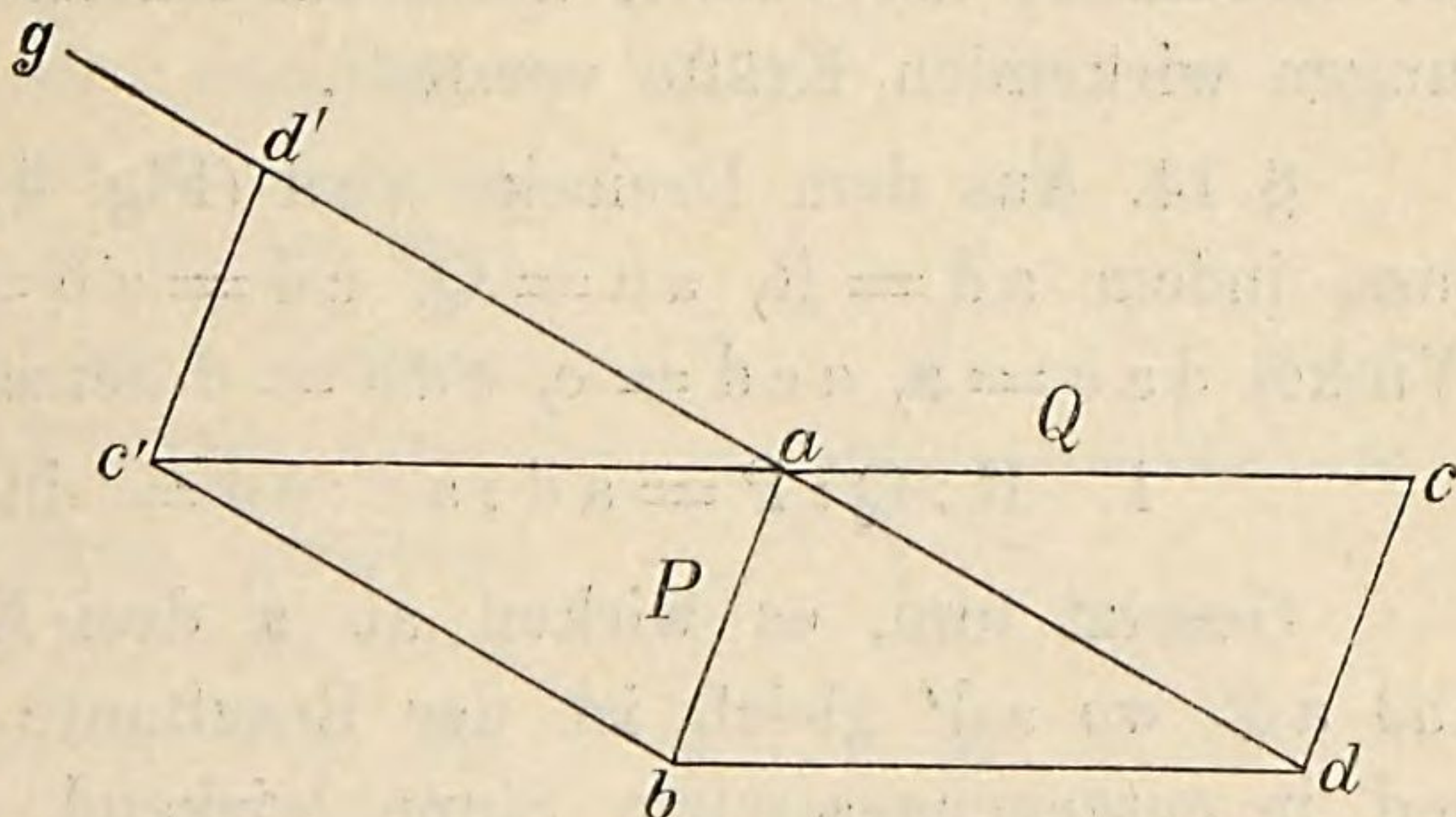
§ 13. Wir behaupten aber weiter, dass auch die Größe der Resultante durch die Diagonale des von beiden Kräften gebildeten Parallelogrammes repräsentiert wird.

Vor allem ist es klar, dass, wenn zwei Kräfte einen Punkt nach irgend welchen Richtungen angreifen, mithin die Resultante nach einer gewissen Richtung wirkt, und wir eine der Resultante gleiche, in direct entgegengesetztem Sinne wirkende Kraft an den materiellen Punkt anbringen, diese neue Kraft der Resultante und mithin den beiden Kräften Gleichgewicht machen wird.

Es leuchtet ferner ein, dass unter diesen drei Kräften, nämlich den beiden angreifenden Kräften und der hinzugefügten, der Resultante gleichen, in entgegengesetztem Sinne wirkende Kraft, da unter ihnen Gleichgewicht herrscht, jede Kraft als Resultante der beiden anderen betrachtet werden kann. Denn je zwei Kräfte haben nothwendig eine Resultante, die, da Gleichgewicht herrscht, nothwendig durch die dritte Kraft aufgehoben wird, mithin diese dritte Kraft einleuchtend der Resultante der beiden anderen Kräfte gleichkommt und nur in entgegengesetztem Sinne wirkt.

Es greifen nun die Kräfte P , Q , vorgestellt in Richtung und Größe durch die Strecken ab , ac den Punkt a an. Die Resultante wird die Richtung der Diagonale des Parallelogrammes $abcd$, nämlich die Richtung ad haben, die Intensität ist uns nicht bekannt.

Fig. 4.



Wir fügen eine neue, der Resultante gleiche Kraft in entgegengesetztem Sinne ag hinzu, deren Größe uns jetzt nicht bekannt ist, so dass wir nicht wissen, wo der Endpunkt dieser Strecke fällt.

Wir verlängern ferner die Strecke ac nach entgegengesetzter Richtung in einer der ac gleichen Strecke ac' , so dass ac' ebenfalls die Kraft Q , nur in entgegengesetztem Sinne vorstellt.

Zwischen den drei Kräften, nämlich den beiden Kräften ab , ac und der auf der Strecke ag liegenden dritten Kraft herrscht Gleichgewicht, und wird daher ac gleich sein der Resultante der beiden Kräfte ab und der unbekannten auf der Strecke ag liegen-

den Kraft, folglich wird $a c'$ die Resultante dieser beiden Kräften sein.

Ziehen wir schließlich die Linie $b c'$, die beiden Endpunkte der Kräfte $a b$, $a c'$ verbindend, so ist diese Linie parallel der Linie $d a g$. Denn die beiden Dreiecke $a c d$ und $b c' a$, welche die beiden Seiten $a c' = a c$, $a b = c d$ und den Winkel $b a c' = a c d$ haben, sind einander gleich, und mithin ist Winkel $a c' b = \text{Winkel } c a d = g a c'$, daher $c' b$ parallel zu $a d$, parallel zu $d g$.

Wir haben nun unter den an a zusammenwirkenden Kräften $a b$, $a c'$, beide der Grösse und Richtung nach bekannt, und die dritte Kraft der Richtung nach bekannt, da sie auf $a g$ liegt. Der Endpunkt d' dieser dritten Kraft wird aber einleuchtend geometrisch dadurch gefunden, dass man $c' d'$ parallel zu $a b$ zieht, und in dieser Weise das Parallelogramm $a b c' d'$ vollendet.

Die Strecke $a d'$ ist demnach der Resultante der beiden Kräfte P , Q gleich, aber in entgegengesetztem Sinne wirkend.

Nun sind die Dreiecke $a d' c'$, $c a d$ congruent, da $d' c'$ parallel und gleich ist $a b = c d$, und die an diesen Seiten anliegenden Winkel ebenfalls gleich sind, mithin $a d' = a d$, daher $a d$ auch die Grösse der Resultante der beiden an einem Punkte nach beliebigen Richtungen wirkenden Kräfte vorstellt.

§ 14. Aus dem Dreiecke $a c d$ (Fig. 4) ist ferner zu ersehen, dass, indem $a d = R$, $a c = Q$, $c d = a b = P$ sind, wenn wir die Winkel $d a c = a$, $a c d = c$, $c d a = d$ setzen, man haben wird:

$$1. \quad R : Q : P = a d : a c : c d = \sin c : \sin d : \sin a$$

Gesetzt nun, es wirken an a drei Kräfte $P = a b$, $Q = a c$ und $a d'$, wo $a d'$ gleich ist der Resultante der beiden Kräfte P , Q und in entgegengesetztem Sinne wirkend, alsdann wird zwischen den drei Kräften nothwendig Gleichgewicht stattfinden. Dabei ist jede gleich und entgegengesetzt der Resultante der beiden anderen Kräfte, und da die Resultante in der Ebene der beiden Kräfte liegen muss, so folgt, dass alle drei Kräfte in einer Ebene liegen müssen. Ferner kann im obigen Verhältnisse 1 statt $a d$ die Kraft $a d'$ statt $\sin$ Winkels $a c d$, $\sin$ Winkels $c a b$, statt $\sin$ Winkels $a d c$, der $\sin$ Winkel $d' a b$, statt $\sin$ Winkels $c a d$ der $\sin$ Winkel $c a d'$ gesetzt werden.

Geschieht dies, so verwandelt sich obiges Verhältniss 1 in folgendes

$$2. \quad R : Q : P = \sin c a b : \sin b a d' : \sin d' a c.$$

Die Gleichung 2 spricht nun aus: Wenn drei Kräfte an einem Punkte angreifen und zwischen diesen Kräften Gleichgewicht vorhanden ist, jede von den Kräften dem Sinus des Winkels proportional ist, den die Richtungen der beiden anderen Kräfte einschließen.

Auch findet man aus dem Dreiecke $a c d$

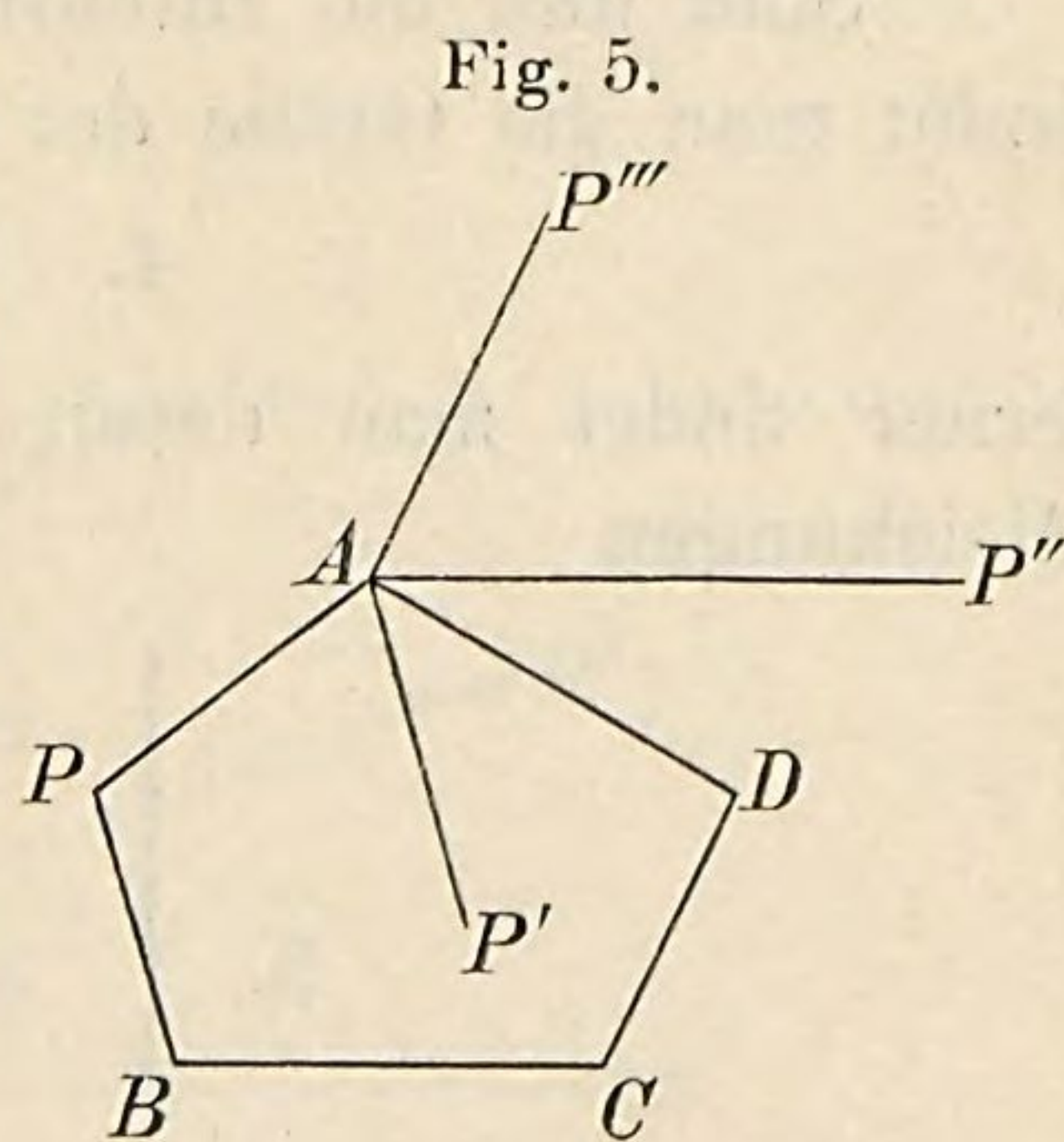
$$\begin{aligned} 3. \quad R^2 &= P^2 + Q^2 - 2 P Q \cos c \\ &= P^2 + Q^2 + 2 P Q \cos b a c, \end{aligned}$$

wodurch R bestimmt werden kann, wenn P und Q und der Winkel gegeben sind, welchen die Richtungen der beiden Kräfte einschließen.

Resultante mehrerer an einem Punkte angreifender Kräfte.

§ 15. Es kann daher die Resultante einer beliebigen Anzahl von einem Punkt angreifenden Kräften gefunden werden, wobei man die Kräfte mit $P, P', P'' \dots$ bezeichnen möge. Man setzt nämlich zuerst die Kräfte P, P' mittelst des Parallelogrammes der Kräfte zusammen, dann diese Resultante mit einer dritten Kraft P'' in derselben Weise zusammen, und so verfährt man weiter, bis man alle Kräfte zusammengesetzt und so die Resultante aller Kräfte findet.

Am passendsten führt man dieses Verfahren in der Weise aus, dass man ein Polygon bildet. Es seien nämlich die an A wirkenden Kräfte P, P', P'', P''' vorgestellt in Richtung und Grösse durch die Strecken AP, AP', AP'', AP''' . Ziehen wir die den Kräften gleichen und parallelen Linien PB, BC, CD , verbinde dann D mit A , so ist DA die Resultante aller Kräfte der Richtung und Grösse nach. Fällt der Punkt D bei



dieser Construction mit A zusammen, so dass das Polygon von selbst sich schließt, dann ist die Resultante gleich Null und die Kräfte befinden sich im Gleichgewichte.

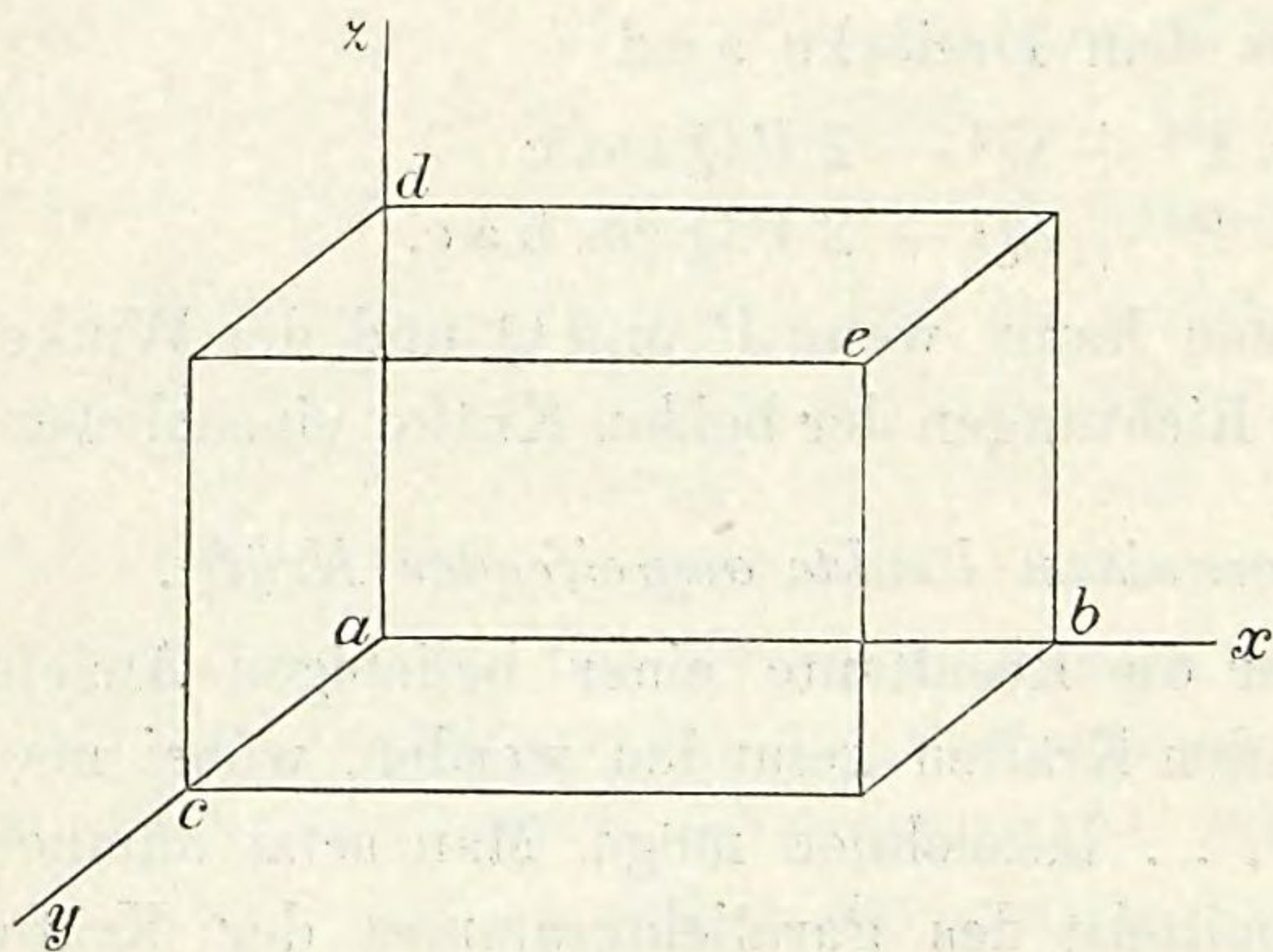
Dabei können die zusammenwirkenden Kräfte in einer Ebene oder in verschiedenen Ebenen liegen.

Parallelepiped der Kräfte.

§ 16. Greifen insbesondere an einem Punkte drei Kräfte in Richtungen an, die miteinander rechte Winkel bilden, so haben wir ein Parallelepiped von Kräften.

Es seien die drei Kräfte an Richtung und Grösse repräsentiert durch die Strecken ab , ac , ad , so wird die Resultante in Richtung und Grösse durch die Diagonale ae repräsentiert sein, was einleuchtend aus der früheren Construction folgt.

Fig. 6.



Ebenso kann man eine in a angreifende Kraft ae in drei nach den Achsen ax , ay , az angreifende Kräfte ab , ac , ad zerlegen.

Die Richtung der Diagonale wird durch die drei Winkel bestimmt, welche die Diagonale ae mit den drei Achsen ax , ay , az einschließt und welche wir der Reihe nach mit a , b , c , und die Kräfte ab , ac , ad mit x , y , z bezeichnen wollen.

Sind nun die Intensitäten der Seitenkräfte x , y , z bekannt, so findet man die Grösse der Resultante durch die bekannte Gleichung

$$4. \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

ferner findet man deren Richtung durch die ebenfalls bekannten Gleichungen

$$5. \quad \begin{cases} \cos a = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos b = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos c = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

$$6. \quad \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

Sind umgekehrt die Resultante R nach ihrer Grösse, und deren Richtung durch die Winkel a , b , c , die sie mit den Achsen einschließt, bekannt, so findet man die Componenten durch die Gleichungen

$$7. \quad \begin{cases} x = R \cos a \\ y = R \cos b \\ z = R \cos c \end{cases}$$

wo wir die Componenten nach den Achsen mit x , y , z bezeichnen.

§ 17. Belangend den Sinn der Richtung einer Componente, so wird solcher aus den Cosinus der Winkel, die sie mit den Achsen einschließt, zu ersehen sein. Die Kräfte selbst werden als positiv angenommen.

Bildet also die Kraft P mit der Achse ax einen spitzen Winkel, so wird $x = R \cos a$ offenbar positiv sein. Bildet sie mit der betreffenden Achse einen stumpfen Winkel, so wird $x = R \cos a$ negativ sein und wirkt daher in negativer Richtung.

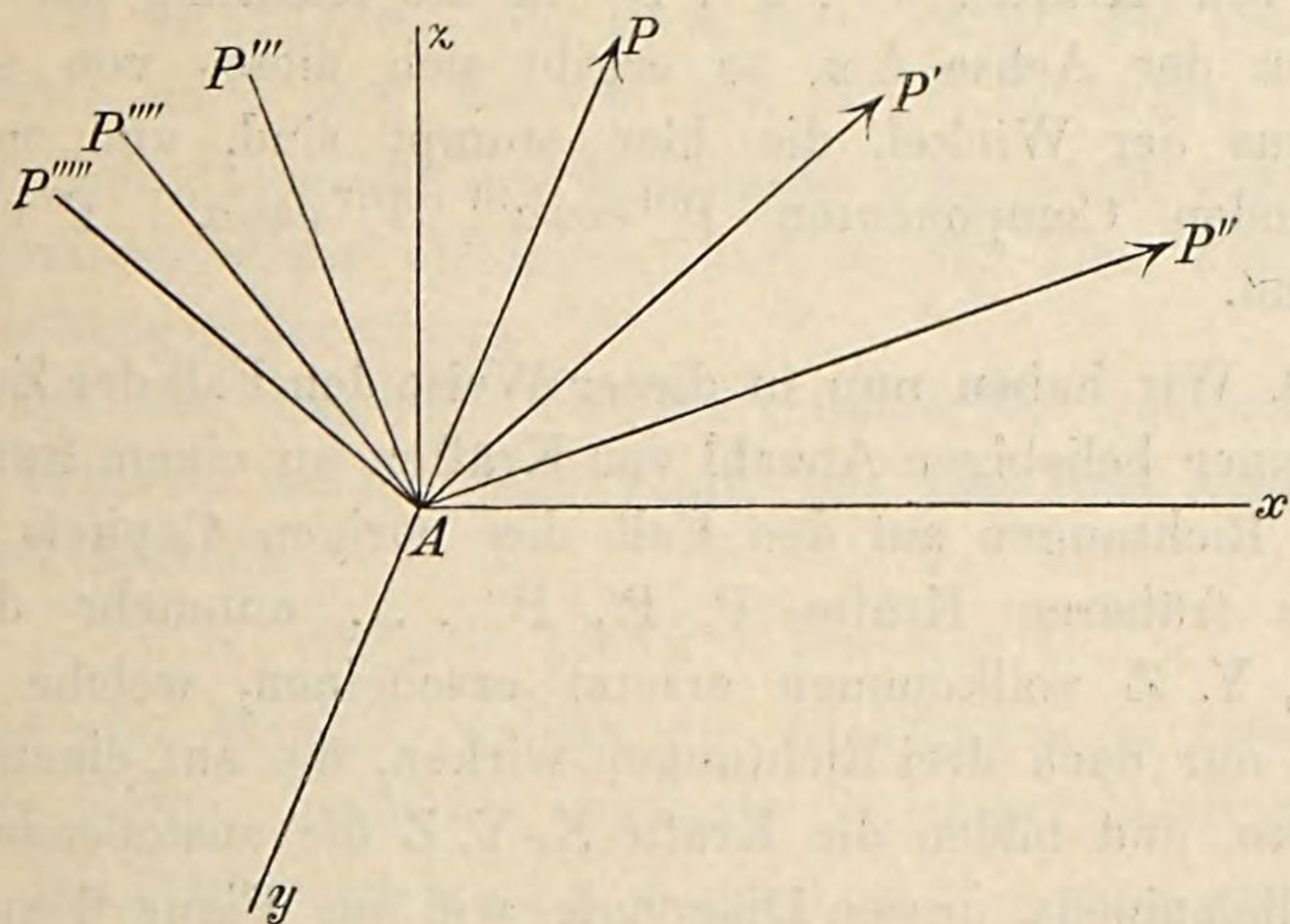
Bei parallelen Kräften spricht man auch von negativen Kräften, wie wir weiter sehen werden.

Zweites Capitel.

Zusammensetzung von an einem Punkte in beliebiger Anzahl und Richtung wirkenden Kräften.

§ 18. Wirken Kräfte an einem Punkte, in beliebigen Richtungen und in welcher Zahl immer, so kann das auf den früheren Fall zurückgeführt werden.

Fig. 7.



Auf den Punkt A wirken die Kräfte P , P' , P'' . . . nach den Richtungen AP , AP' , AP'' . . . und stellen diese Strecken auch die Größen der Kräfte vor. Durch den Punkt A führen wir die rechtwinkligen Achsen Ax , Ay , Az und zerlegen jede Kraft nach diesen drei Richtungen in drei Componenten.

Es mögen nun die Winkel, welche die Kraft P mit den drei Achsen Ax , Ay , Az bildet, mit α , β , γ , die Winkel, welche die Kraft P' mit den Achsen bildet, mit α' , β' , γ' , die Winkel aber, welche die Resultante aller Kräfte, die R heißen möge, mit den Achsen einschließt, mit a , b , c bezeichnet werden.

Die nach den Achsen zerlegten Kräfte der Kraft P werden demnach sein $P \cos \alpha$, $P \cos \beta$, $P \cos \gamma$, und wir haben, wenn wir die Summe der nach der Achse Ax zerlegten Componenten mit X , die Summe der Componenten nach Ay mit Y , und die Summe der Componenten nach Az mit Z bezeichnen, folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} X &= P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \dots \\ 1. \quad Y &= P \cos \beta + P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + P''' \cos \beta''' + \dots \\ Z &= P \cos \gamma + P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + \dots \end{aligned}$$

X ist also die Resultante aller nach der Achse Ax zerlegten Componenten der Kräfte, Y die Resultante aller nach Ay zerlegten Componenten der Kräfte, Z die Resultante aller nach Az zerlegten Componenten der Kräfte. Dabei sind X , Y , Z die algebraischen Summen der nach einer Achse zerlegten Componenten der Kräfte und sind diese Formeln allgemein, die Richtungen der Kräfte mögen wie immer beschaffen sein. Fallen, wie bei unserer Figur, Componenten von Kräften P^{III} , P^{IV} , P^V in die Richtung der negativen Coordinaten der Achse Ax , so ergibt sich dieses von selbst aus den Cosinus der Winkel, die hier stumpf sind, und mithin die entsprechenden Componenten $P^{III} \cos \alpha^{III}$, $P^{IV} \cos \alpha^{IV}$, $P^V \cos \alpha^V \dots$ negativ sind.

§ 19. Wir haben nun in dieser Weise den Fall der Zusammenwirkung einer beliebigen Anzahl von Kräften an einem Punkte nach beliebigen Richtungen auf den Fall des vorigen Capitels reduciert, indem die früheren Kräfte P , P' , $P'' \dots$ nunmehr durch die Kräfte X , Y , Z vollkommen ersetzt erscheinen, welche aber am Punkte A nur nach drei Richtungen wirken, die auf einander senkrecht stehen, und bilden die Kräfte X , Y , Z die anstoßenden Kanten eines Parallelepipeds, dessen Diagonale, wie aus Figur 6 zu ersehen, die Resultante aller Kräfte R repräsentiert.

Obige Gleichungen 1 werden in bequemerer Form geschrieben. Man bezeichnet nämlich die Summe aller gleichgebildeten Ausdrücke mit dem Zeichen $\Sigma P \cos \alpha$, und bekommen obige Gleichungen folgende Gestalt:

$$2. \quad \begin{cases} X = \Sigma P \cos \alpha \\ Y = \Sigma P \cos \beta \\ Z = \Sigma P \cos \gamma \end{cases}$$

Kennt man die Größen der an A wirkenden Kräfte $P, P', P'' \dots$ und die Winkel, die sie mit den Achsen einschließen, mithin auch die Größen X, Y, Z , so kann man die durch die Diagonale des Parallelepipedes vorgestellte Richtung und Größe der Resultante R bestimmen und man hat, wie im vorigen Capitel, für die Winkel und die Größe der Resultante folgende Gleichungen

$$3. \quad \begin{cases} \cos a = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \\ \cos b = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \\ \cos c = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \\ R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} R \cos a = X = \Sigma P \cos \alpha \\ R \cos b = Y = \Sigma P \cos \beta \\ R \cos c = Z = \Sigma P \cos \gamma \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man, wenn man Intensität und Richtung der Resultante, also R, a, b, c kennt, die Summen der Componenten nach den Achsen, also X, Y, Z , finden.

§ 20. Die Intensität der Resultante kann nicht von der Wahl des Coordinatensystems abhängen, und in der That kann man sie davon unabhängig berechnen.

Erwägt man nämlich, dass die Summe der Quadrate der Cosinus der Winkel, welche jede Kraft mit den drei Achsen bildet, gleich 1 ist, nämlich

$$5. \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

dass ferner die Winkel, welche die Richtungen je zweier Kräfte miteinander bilden, durch die bekannte Gleichung bestimmt sind

$$6. \quad \cos PP' = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

und so alle anderen Winkel zwischen den Kraftrichtungen bestimmt erscheinen, dass man endlich

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

hat, so können die Größen X, Y, Z , wie auch die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \alpha' \dots$ herausgeschafft und statt derselben die ursprünglichen Kräfte

$P, P' \dots$ und die Winkel zwischen ihren Krafrichtungen eingeführt werden.

Zu diesem Ende quadriert man die Gleichungen 1, addiert dieselben und bekommt alsdann

$$R^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + \dots + 2PP' \cos PP' + 2PP'' \cos PP'' + \dots$$

oder kürzer

$$7. R^2 = \Sigma P^2 + 2 \Sigma [PP' \cos PP']$$

eine Gleichung, in welcher die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \alpha' \dots$ nicht mehr vorkommen.

Drittes Capitel.

Vom Gleichgewichte der an einem Punkte wirkenden Kräfte.

§ 21. Steht ein materieller Punkt unter dem Einflusse eines Systems zusammenwirkender Kräfte, der Punkt möge, unabhängig von diesen Kräften, sich in Ruhe oder Bewegung befinden, so machen sich diese Kräfte alsdann Gleichgewicht, wenn diese Kräfte den Zustand des Punktes, sei es der Ruhe, sei es der Bewegung, nicht modificieren. Man sagt alsdann, die betreffenden Kräfte machen sich Gleichgewicht. Befand sich der Punkt, unabhängig von diesen Kräften, in Ruhe, so sagt man auch, der Punkt befinde sich im Gleichgewichte.

Eine einzige Kraft kann einen Punkt nicht im Gleichgewichte erhalten.

Damit also ein System von einem Punkt angreifenden Kräften sich Gleichgewicht mache, ist es nothwendig und hinreichend, dass dieses Kräftesystem nicht im Stande sei, den angegriffenen Punkt, als in Ruhe befindlich gedacht, in Bewegung zu setzen. Denn können die Kräfte den Zustand des Punktes nicht modificieren, so können sie ihn auch nicht in Bewegung setzen.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung demnach, dass ein einen Punkt angreifendes Kräftensystem sich Gleichgewicht mache, ist, dass die Resultante gleich Null sei. Denn die Resultante ist die Kraft, welche an sich allein die Gesamtwirkung der gegebenen Kräfte hervorbringt. Ist also die Resultante gleich Null, so wird von den Kräften gar keine Wirkung auf den Punkt erzeugt, die Kräfte haben sich also zerstört, machen sich Gleichgewicht.

Nach dem vorigen ist die Resultante

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Damit R gleich Null werde, muss

$$\begin{aligned} X^2 &= 0, \text{ also } X = 0 \\ 1. \quad Y^2 &= 0, \text{ also } Y = 0 \\ Z^2 &= 0, \text{ also } Z = 0 \end{aligned}$$

sein. Die nothwendigen und hinreichenden drei Bedingungen des Gleichgewichtes der an einem Punkte zusammenwirkenden Kräfte sind demnach, dass die Gesamtheit der nach jeder Achse zerlegten Componenten der Kräfte für sich gleich Null sei, also dass

$$\begin{aligned} X &= \Sigma P \cos \alpha = 0 \\ 2. \quad Y &= \Sigma P \cos \beta = 0 \\ Z &= \Sigma P \cos \gamma = 0 \end{aligned}$$

seien.

Damit also die Kräfte sich Gleichgewicht machen, und daher die Resultante gleich Null sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass die Gesammtheit der nach jeder der drei Achsen zerlegten Kräfte, Componenten oder auch Projectionen genannt, für sich gleich Null sei.

§ 22. Sind diese drei Bedingungen erfüllt, dann wird die Projection der Resultante nach jeder Richtung gleich Null sein. Denn die Projection der Resultanten nach irgend einer Richtung wird ausgedrückt durch $R \cos a'$, wo unter a' der Winkel verstanden wird, den die Resultante mit dieser Richtung einschließt. Ist aber $R = 0$, so wird auch $R \cos a'$ gleich Null sein. Sind ferner diese Bedingungen erfüllt, so machen sich die Kräfte Gleichgewicht, denn dann wird die Resultante gleich Null sein.

§ 23. Sind ferner diese Bedingungen erfüllt, alsdann ist jede der Kräfte gleich und direct entgegengesetzt der Resultante aller anderen Kräfte. Bezeichnen wir die Resultante der Kräfte $P', P'' \dots$ mit R' , und deren Winkel mit den Achsen mit a', b', c' .

Bezeichnen wir ferner die Projectionen dieser Resultante auf die Achsen mit X', Y', Z' , so haben wir

$$\begin{aligned} X' &= P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \dots \\ Y' &= P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + P''' \cos \beta''' + \dots \\ Z' &= P' \cos \gamma' + P'' \cos \gamma'' + P''' \cos \gamma''' + \dots \end{aligned}$$

Nach dem früheren haben wir demnach

$$\begin{aligned} X' &= R' \cos a' \\ Y' &= R' \cos b' \\ Z' &= R' \cos c', \end{aligned}$$

mithin ergibt sich bei Entgegensetzung dieser Gleichungen mit den Gleichungen 1 des § 18

$$P \cos \alpha = -R' \cos a'$$

$$P \cos \beta = -R' \cos b'$$

$$P \cos \gamma = -R' \cos c'.$$

Quadriert und addiert man diese Gleichungen, so ergibt sich

$$P^2 = R'^2, \quad P = \pm R'.$$

Es ergibt sich demnach aus den vorletzten Gleichungen

$$\cos \alpha = -\cos a'$$

$$\cos \beta = -\cos b'$$

$$\cos \gamma = -\cos c'$$

$$\text{daher } \alpha = \pi - a', \quad \beta = \pi - b', \quad \gamma = \pi - c'.$$

Die Kraft P ist also der Resultante aller anderen Kräfte gleich und direct entgegengesetzt. Dieses kann aber bezüglich jeder Kraft bewiesen werden.

§ 24. Liegen alle den Punkt angreifenden Kräfte in einer Ebene, so zerlegt man die Kräfte bloß nach zwei Richtungen, es sei nach X und Y , die dritte Componente ist $= 0$, und man hat dann

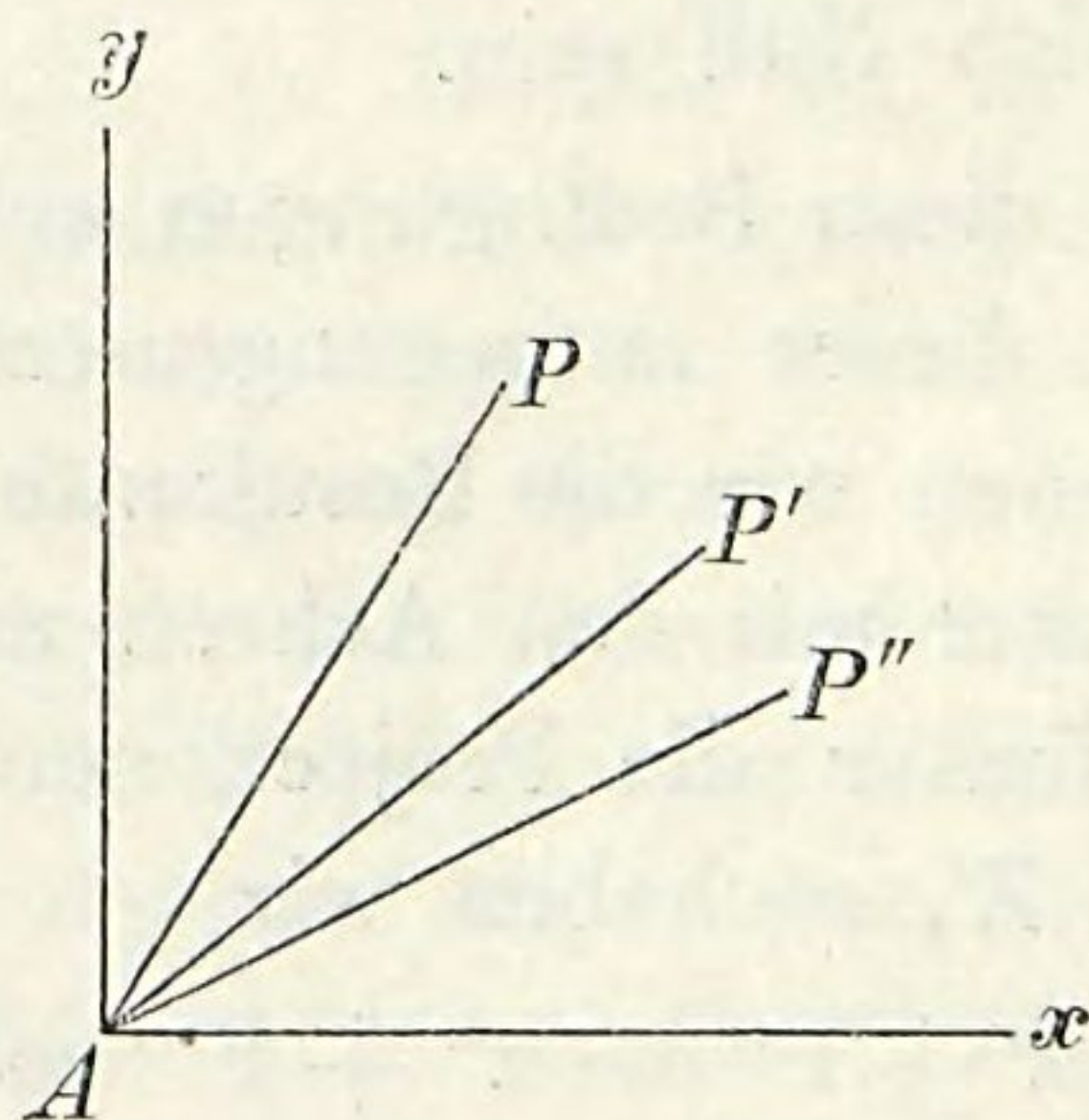
$$R^2 = X^2 + Y^2$$

$$X = R \cos a$$

$$Y = R \cos b$$

Sind die Kräfte im Gleichgewichte, alsdann sind nur zwei Be-

Fig. 8.



dingungen des Gleichgewichtes nothwendig und hinreichend, nämlich

$$X = P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \dots = \Sigma P \cos \alpha = 0$$

$$Y = P \cos \beta + P' \cos \beta' + P'' \cos \beta'' + \dots = \Sigma P \cos \beta = 0,$$

und dann ist auch

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 0.$$

Viertes Capitel.

Fortsetzung vom Gleichgewichte der an einem Punkte, welcher genöthigt ist, auf einer Fläche oder Curve zu bleiben, wirkenden Kräfte.

§ 25. Im vorigen Capitel haben wir die Bedingungen des Gleichgewichtes von Kräften, die an einem Punkte wirken, festgesetzt, unter der Voraussetzung, dass der Punkt, abgesehen von den angreifenden Kräften, vollkommen frei im Raume ist.

Anders gestalten sich die Bedingungen, wenn der Punkt nicht vollkommen frei im Raume, sondern genöthigt ist, auf einer Fläche oder einer Curve zu bleiben.

Wir setzen dabei vor allem voraus, dass zwischen dem Punkte und der Fläche oder dem Punkte und der Curve Reibung, die wir erst später kennen lernen werden, nicht vorhanden ist, und unter dieser Voraussetzung werden wir obige beide Fälle abgesondert behandeln.

§ 26. *a)* Ist der Punkt genöthigt auf einer Fläche zu bleiben, dann ist zum Gleichgewichte nicht nothwendig, dass die Resultante gleich Null sei, und kann vielmehr das Gleichgewicht auch dadurch herbeigeführt werden, dass die Resultante, welche Intensität immer habe, dabei aber normal auf der Fläche wirke. Denn in dieser Weise wird die Resultante durch den Widerstand der Fläche aufgehoben.

Es ist aber einleuchtend, dass im Falle die Resultante nicht gleich Null ist, die letzte Bedingung nothwendig ist. Denn wäre die Resultante nicht normal auf der Fläche, so könnte man sie in zwei andere Kräfte zerlegen, die eine normal zur Fläche und die andere tangential gerichtet.

Die normale Kraft würde durch die Resistenz der Fläche aufgehoben sein. Die tangential Kraft aber würde den Punkt längs der Tangente fortbewegen und der Punkt wäre nicht im Gleichgewichte.

Ist der Punkt bloß der Bedingung unterworfen, die Fläche, worauf er sich befindet, nicht durchzudringen, bietet also die Fläche Widerstand bloß nach einer Seite, alsdann muss zu obiger Bedingung des Normalseins auf der Fläche noch die Bedingung hinzutreten, dass die Resultante gerichtet sei gegen die Seite, wo der Punkt nicht durchdringen kann, dass der Punkt also gegen die Fläche gedrückt sei.

§ 27. Analytisch wird obige Bedingung in folgender Weise ausgedrückt.

Wir haben gesehen, dass die Resultante R , auf die Fläche normal wirkend, durch die Fläche aufgehoben wird. Die Fläche übt demnach einen Gegendruck, welcher der Resultante gleich und entgegengesetzt wirkt. Wir können demnach, ohne Änderung des Effectes, der Fläche, die wir uns hinwegdenken, eine Kraft N substituieren, welche dieselbe Wirkung wie die Fläche hervorbringt, und nunmehr den Punkt als vollkommen frei betrachten. Diese Kraft N wird die Normale der Fläche, und der Resultante, welche hier welchen Wert immer haben kann, gleich und direct entgegengesetzt sein.

Es sei die Fläche

$$f(x, y, z) = 0,$$

auf welcher der Punkt der Bedingung unterworfen ist, zu verbleiben.

Es seien ferner x, y, z die Coordinaten, X die Summe der Projectionen der Kräfte auf die Achse der x , Y die Summe der Projectionen der Kräfte auf die Achse der y , Z die Summe der Projectionen der Kräfte auf die Achse der z .

Die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Achsen bildet, sind, wie aus der Analysis bekannt ist, wenn wir diese Winkel mit λ, μ, ν bezeichnen

$$1. \quad \begin{cases} \cos \lambda = h \frac{df}{dx} \\ \cos \mu = h \frac{df}{dy} \\ \cos \nu = h \frac{df}{dz} \end{cases}$$

indem man zur Abkürzung

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}}} = h$$

setzt.

Indem wir ferner wie früher gesetzt

$$\Sigma P \cos \alpha = X$$

$$\Sigma P \cos \beta = Y$$

$$\Sigma P \cos \gamma = Z$$

so bekommt man, unter Hinzutritt der neuen Kraft N , welche mit den Achsen obbezeichnete Winkel λ, μ, ν bildet, drei Bedingungen des Gleichgewichtes

$$2. \quad \begin{cases} N h \frac{df}{dx} + X = 0 \\ N h \frac{df}{dy} + Y = 0. \\ N h \frac{df}{dz} + Z = 0 \end{cases}$$

Die Projectionen der Kraft N nach den Achsen sind nämlich $N \cos \lambda$, $N \cos \mu$, $N \cos \nu$, welche zu den respectiven Componenten nach den Achsen hinzugefügt werden müssen.

§ 28. Diese drei Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht sind den früheren Bedingungsgleichungen ganz analog, und nur mit Hinzufügung einer neuen Kraft N als Substitution für die Fläche.

In den Bedingungsgleichungen 2 ist N eine unbekannte Hilfsgröße, die durch diese Gleichungen bestimmt wird.

Wir haben nun

$$N h \frac{df}{dx} = -X$$

$$N h \frac{df}{dy} = -Y$$

$$N h \frac{df}{dz} = -Z.$$

Quadriert und addiert man, so hat man, da

$$h^2 \left[\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2} \right] = 1$$

ist,

$$3. \quad N = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = R.$$

Eliminiert man aber die Größe N , so bekommt man

$$4. \quad X : \frac{df}{dx} = Y : \frac{df}{dy} = Z : \frac{df}{dz}, \text{ oder } \frac{X}{\cos \lambda} = \frac{Y}{\cos \mu} = \frac{Z}{\cos \nu}.$$

Die Gleichung 3 bestimmt den Wert von N , als den Druck, den die Kräfte auf die Fläche ausüben. Die Gleichungen 4 sind Bedingungen des Gleichgewichtes und lassen erkennen, dass die Resultante normal auf der Fläche ist. Denn die Cosinus der Winkel der Resultante mit den Achsen sind

$$\frac{X}{R}, \quad \frac{Y}{R}, \quad \frac{Z}{R},$$

und die Cosinus der Winkel der Normale mit den Achsen sind aus 1 zu ersehen, mithin durch die in 4. angegebenen Verhältnisse aus-

gedrückt erscheint, dass R und N mit den Achsen gleiche Winkel einschließen, also dass ihre Richtungen parallel sind. Da sie aber den angegriffenen Punkt gemeinsam haben, so fallen sie zusammen, und die Kräfte R und N wirken nur in entgegengesetztem Sinne.

Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, findet kein Gleichgewicht statt.

Kennt man bloß die treibenden Kräfte nach Richtung und Größe, nicht aber den Punkt der Fläche, an welchem die Kräfte im Gleichgewichte sind, so findet man den Punkt und respective dessen Coordination x, y, z aus den Gleichungen 4 und der Gleichung der Fläche $f(x, y, z) = 0$.

§ 29. *b)* Wenn der Punkt der Bedingung unterworfen ist, auf einer Curve zu bleiben, ist wie im früheren Fall, die nothwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichtes die, dass die Resultante aller Kräfte normal auf der Tangente der Curve an diesem Punkte stehen. Die Resultante muss also in der Normalebene liegen, welche durch diesen Punkt geführt ist. Auch hier braucht die Resultante nicht gleich Null zu sein und kann vielmehr einen beliebigen Wert haben, und dennoch findet Gleichgewicht statt, wenn die Resultante auf der Tangente der Curve an dem angegriffenen Curvenpunkte normal steht, da sie dann durch den Widerstand der Curve aufgehoben wird.

§ 30. Um diese Bedingung analytisch auszudrücken, werden wir hier ebenfalls, statt der Curve, eine vorläufig unbekannte Kraft einführen, welche den Widerstand der Curve ersetzt und den Punkt als frei betrachten.

Man hat alsdann als Bedingungen des Gleichgewichtes,

$$5. \quad \begin{cases} N \cos \lambda + X = 0 \\ N \cos \mu + Y = 0, \\ N \cos \nu + Z = 0 \end{cases}$$

wo unter λ, μ, ν die Winkel zu verstehen sind, welche die, statt der Curve, zu den Kräften hinzugefügte reagierende Normalkraft N mit den positiven Achsen bildet und deren Componenten nach den Achsen $N \cos \lambda, N \cos \mu, N \cos \nu$ sind.

Zu diesen Gleichungen kommt noch die Relation hinzu

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1.$$

Sind ferner die Gleichungen der Curve

$$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0,$$

und nennen wir das Differential des Curvenbogens ds , so sind die

Cosinus der Winkel, welche die Tangente der Curve mit den positiven Achsen bildet

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}.$$

Man hat demnach, da der Winkel zwischen Normale und Tangente ein rechter ist, dessen Cosinus gleich Null ist, wenn wir diesen Winkel mit φ bezeichnen, die Gleichung

$$\cos \varphi = \cos \lambda \cdot \frac{dx}{ds} + \cos \mu \cdot \frac{dy}{ds} + \cos \nu \cdot \frac{dz}{ds} = 0$$

oder

$$6. \quad \cos \varphi = \cos \lambda dx + \cos \mu dy + \cos \nu dz = 0.$$

Multipliziert man daher die erste der Gleichungen 5 mit dx , die zweite mit dy , die dritte mit dz , so kommt infolge der Gleichung 6

$$7. \quad X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

Diese Gleichung drückt die Bedingung des Gleichgewichtes für den vorliegenden Fall aus und sieht man, dass die Resultante normal zur Curve steht und auch dass Resultante und Normale mit den Achsen gleiche Winkel bilden. Denn die Cosinus der Winkel, welche die Resultante mit den Achsen einschließt, sind

$$\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R},$$

folglich ist der Cosinus des Winkels zwischen der Resultante und der Tangente, wenn wir solchen mit ψ bezeichnen,

$$\cos \psi = \frac{X}{R} \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{R} \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{R} \frac{dz}{ds},$$

ein Ausdruck, welcher infolge 7 gleich Null, mithin der Winkel ein rechter ist, wie der der Normale mit der Tangente. Es folgt daher, da Resultante und Normale den angegriffenen Punkt gemeinsam haben, dass sie zusammenfallen und in direct entgegengesetzter Richtung wirken. Da ferner Gleichgewicht vorhanden ist, so ist N gleich der Kraft R und von direct entgegengesetztem Sinne.

Eliminiert man aus den Gleichungen 5 die Größen $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$, so bekommt man

$$8. \quad N^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2.$$

Aus den Gleichungen 5 und den der Curve findet man die Werte von $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$.

Kennt man nicht im vorhinein den Punkt der Curve, wo Gleichgewicht zu herrschen hat, so findet man ihn aus der Gleichung 7 und den Gleichungen $F(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z) = 0$.

Princip der Action und Reaction.

§ 31. Am Schlusse des Gleichgewichtes von Kräften an einem Punkte führen wir noch dieses Princip an, welches von Newton aufgestellt und von der Erfahrung hergeleitet wurde.

Übt ein materieller Punkt A auf den Punkt B eine Action aus, so übt B auf A eine Reaction der Art aus, dass die von beiden ausströmenden Kräfte, von A auf B und von B auf A immer einander gleich, von entgegengesetztem Sinne und längs der geraden AB gerichtet sind. Eines Beweises ist dieses Princip nicht fähig, es ist aber ein durch zahlreiche Consequenzen bestätigter Erfahrungssatz, Newton nannte die eine Kraft Action und die andere Reaction und das Princip lautet: Die Action ist gleich und entgegengesetzt der Reaction.

Die Bestätigung dieses Principes werden wir im Laufe dieses Lehrbuches und insbesondere auch bei den Wirkungen centraler Kräfte finden.

Fünftes Capitel.

Von Kräften, die an mehreren Punkten angreifen.

§ 32. Bisher haben wir unsere Untersuchungen bloß auf einen materiellen Punkt erstreckt, der von verschiedenen Kräften sollicitiert wird. Jetzt wollen wir die Fälle betrachten, wo Kräfte an mehreren, miteinander invariable verbundenen Punkten angreifen, an einem Punktsystem. Ein Punktsystem bildet einen Körper.

Stehen Körper unter dem Einflusse von Kräften, so ändern sie ihre Gestalt, sie werden zusammengedrückt, ausgedehnt. Wir betrachten den Körper in dem Zustande, wo er eine unveränderliche Gestalt angenommen, und lassen demnach die Kräfte an einem Punktsystem angreifen, bei welchem die Distanzen der miteinander verbundenen Punkte unveränderlich geworden. Man nennt einen solchen Körper solid, starr, rigide. Sind Punkte mit anderen Punkten nicht invariable verbunden und ertheilen wir denselben in der Untersuchung diese Eigenschaft, so sagt man, das System werde solidificiert. Wir werden in einem späteren Capitel darauf zurückkommen.

Die einzelnen Theile der Körper sind ferner durch zwischenliegende Räume Poren genannt, getrennt. Die Physik nimmt an, dass die Körper aus Moleculen zusammengesetzt seien, die sich chemisch in Atome zertheilen. Die Mechanik betrachtet bloß materielle Punkte. Ein materieller Punkt ist nicht ein Atom, sondern

ein aus dem Innern der Materie hervorgehobener mathematischer Punkt. Ein Atom ist ein Körperchen von sehr kleinen, aber endlichen Dimensionen und in diesem sind unendlich viele materielle Punkte enthalten.

§ 33. Die Kräfte theilt man in innere und äußere. Äußere sind die, welche von materiellen Punkten herrühren, die außerhalb des Punktsystems liegen. Innere Kräfte sind die, welche von den Punkten des Systems herkommen, also die wechselseitigen Wirkungen des einen Systempunktes auf einen anderen Punkt des Systems.

Eine andere Eintheilung ist die in direct applicierte Kräfte und Liaisonskräfte.

Stehen Punkte miteinander in Verbindung, so können diese Verbindungen verschieden sein. Der Punkt kann genöthigt sein, auf einer Fläche oder Curve zu bleiben, oder er ist mit anderen Punkten invariable verbunden, so dass die Distanzen je zweier Punkte des Punktsystems constant ist. Alle diese Liaisons erzeugen, unabhängig von anderen Kräften, Wirkungen. So haben wir oben gesehen, dass die Nöthigung des Punktes, auf einer Fläche oder Curve zu bleiben, uns dazu geführt, die Fläche oder Curve durch eine Kraft zu ersetzen, welche die Reaction der Fläche oder Curve repräsentierte. In dieser Weise können wir andere Liaisons durch vorläufig unbekannte Kräfte ersetzen und alsdann die Liaison als weggefallen betrachten, so dass die Liaisonskraft nunmehr eine direct applicierte Kraft geworden. Wir werden im Lehrbuche davon Gebrauch machen.

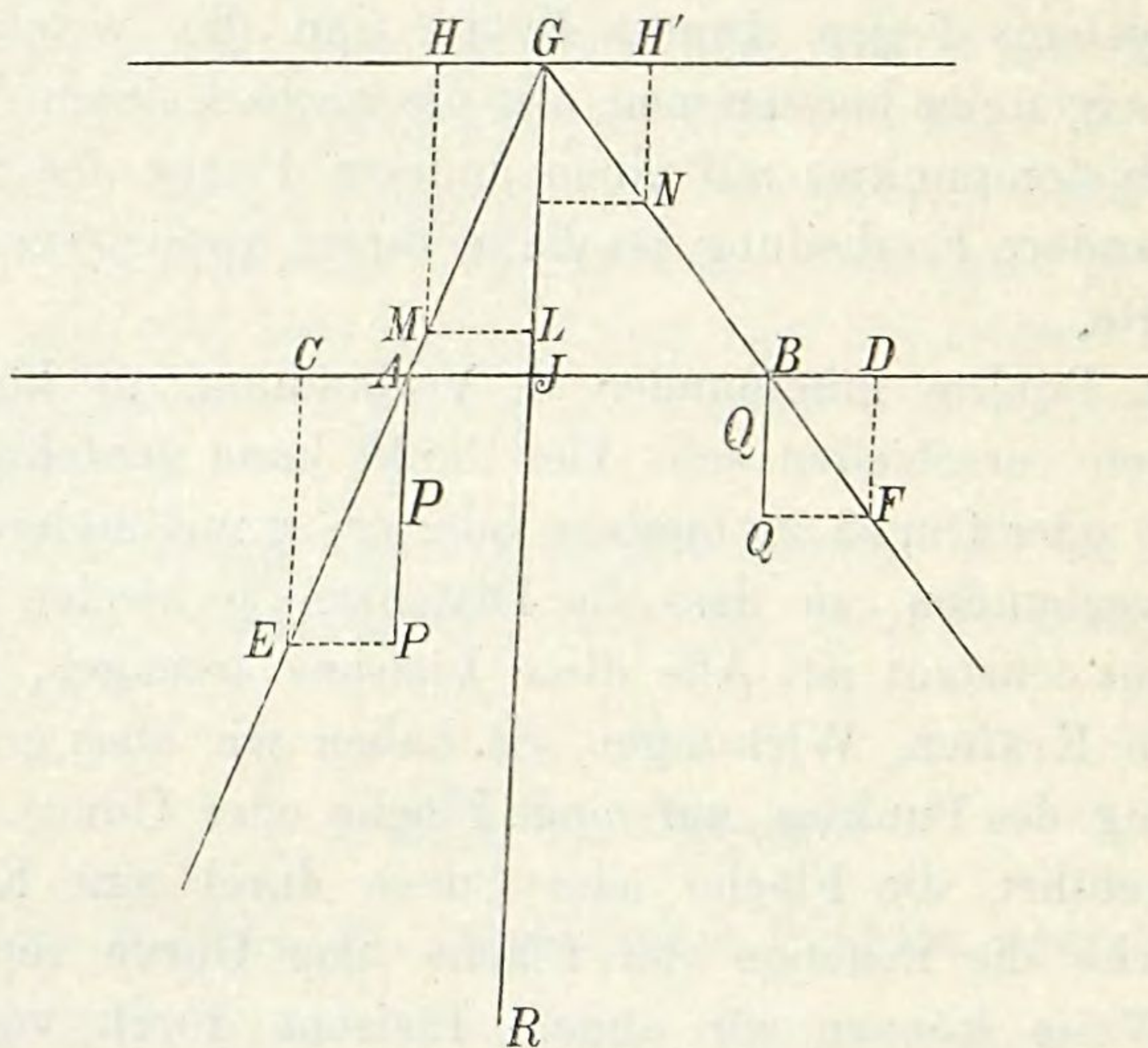
Zwei parallele Kräfte, die an zwei Punkten in gleichem Sinne angreifen.

§ 34. Wir beginnen mit dem Fall, wo zwei Kräfte an zwei invariable miteinander verbundenen Punkten parallel in Richtungen vom selben Sinne angreifen.

Während wir bisher bei nicht parallelen Kräften diese immer als positiv angesehen und die Richtungen der Projectionen der Kräfte nach den Achsen als positiv oder negativ bezeichnet, je nachdem die Cosinus der Winkel zwischen den Krafrichtungen und den beliebig gewählten Achsen sich als positiv oder negativ herausgestellt, werden wir hier bei parallelen Kräften, diese selbst je nach dem Sinne ihrer Richtungen als positiv oder negativ bezeichnen. Bezeichnen wir eine Kraft, die in einem Sinne wirkt, als positiv, so werden wir die Kraft, die in entgegengesetztem Sinne wirkt, als negativ ansehen und ihr das negative Vorzeichen geben.

§ 35. Es mögen nun an zwei durch eine starre Linie invariable miteinander verbundenen Punkten A und B zwei Kräfte P und Q parallel und in gleichem Sinne angreifen, gleichviel welchen Winkel diese Richtungen mit der Linie A B bilden und möge die Linie A P

Fig. 9.



Richtung und GröÙe der Kraft P und BQ Richtung und GröÙe der Kraft Q vorstellen.

An A und B bringen wir zwei gleiche, in der Richtung der Linie AB, aber in entgegengesetztem Sinne wirkende Kräfte an, welche an Richtung und Größe durch die Strecken AC und BD vorgestellt sind, wodurch der Zustand nicht geändert wird. Die beiden Kräfte an A, P und AC geben die Resultante AE, Q und BD die Resultante BF.

Beide Resultanten versetzen wir in ihren respectiven Richtungen an den Schnittpunkt G, wo wir die beiden Resultanten in die früheren vier Kräfte wieder zerlegen. Die beiden hinzugefügten Kräfte AC, BD kommen hier in G als gleiche und entgegengesetzte Strecken GH und GH' zum Vorscheine und zerstören sich, während die beiden Kräfte P und Q in G vereinigt und parallel den Richtungen dieser Kräfte wirkend erscheinen. Schließlich verschieben wir diese Kräfte auf ihrer gemeinsamen Richtung nach dem Schnittpunkte J, wo die Linie AB von der Richtung der beiden Kräfte getroffen wird.

Durch diese Operation haben wir die Kräfte P und Q , ohne Änderung des Effectes, zu einer Resultante $R = P + Q$ vereinigt, welche parallel zu diesen am Schnittpunkte J wirkt und die Kräfte P und Q vollkommen ersetzt.

Belangend den Schnittpunkt J , so lässt er sich geometrisch feststellen.

Die Dreiecke $G A J$ und $G M L$ sind ähnlich und $G J B$ und $G K N$ sind einander ähnlich, daher die Proportionen

$$A J : M L = G J : G L \text{ und} \\ K N : J B = G K : G J.$$

Multipliziert man die Verhältnisse miteinander und erwägt, dass

$$K N = M L \\ G L = \text{Kraft } P \\ G K = \text{Kraft } Q$$

so hat man

$$1. \quad A J : J B = Q : P$$

somit

$$2. \quad P : Q : R = J B : J A : A B.$$

Der Schnittpunkt J theilt demnach die Linie $A B$ in der Weise, dass die Abschnitte sich umgekehrt wie die Kräfte verhalten.

§ 36. Wirken also zwei Kräfte parallel und in gleichem Sinne an zwei miteinander durch eine starre Linie invariable verbundenen Punkten, es mögen die Richtungen der Kräfte gegen die starre Linie wie immer geneigt sein, ist das Ergebnis folgendes.

1. Haben beide Kräfte eine Resultante, welche an Intensität der Summe beider Kräfte gleichkommt und die beiden Kräfte vollkommen ersetzt, so dass man die beiden Kräfte als nicht vorhanden betrachten und statt derselben, ohne Änderung des Effectes, die Resultante einführen kann.

2. Die Richtung der Resultante ist den beiden Kräften parallel und fällt deren Angriffspunkt, unabhängig von der Richtung der Kräfte, auf der Linie $A B$, zwischen beiden Punkten, in der Weise, dass er diese Linie in umgekehrtem Verhältnisse der Intensitäten der beiden Kräfte theilt.

3. Obiges Verhältniss $P : Q : R = J B : J A : A B$ wird in Worten ausgedrückt: Jede der drei Kräfte ist proportional der Distanz der Angriffspunkte der anderen beiden Kräfte.

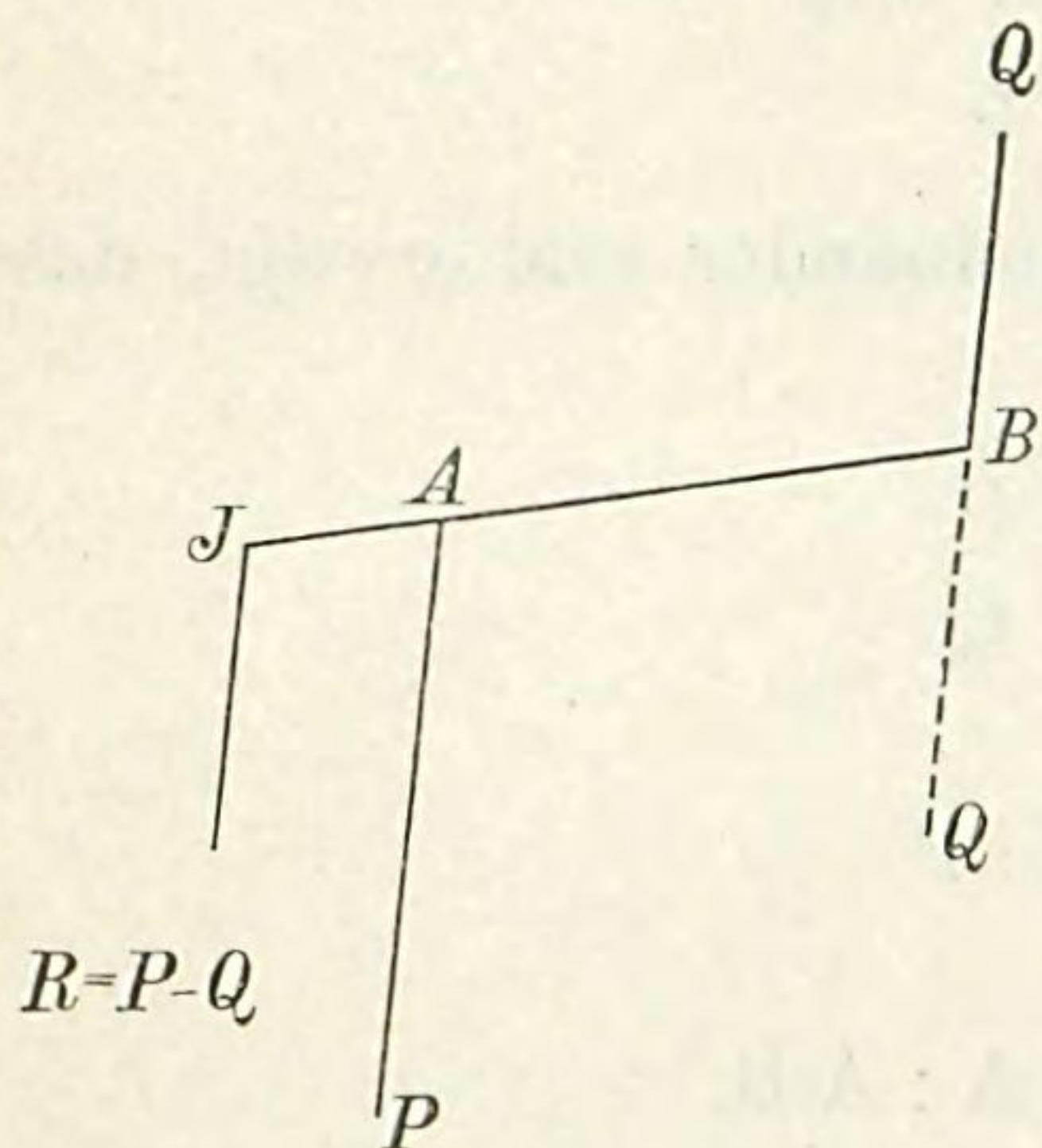
Zwei parallele, an zwei Punkten in entgegengesetztem Sinne angreifende Kräfte.

§ 37. Wirken zwei Kräfte an den zwei Punkten in entgegengesetztem Sinne, so wird dieses auf den vorigen Fall zurückgeführt.

P wirke in einem, Q in entgegengesetztem Sinne und sei P größer als Q.

P können wir in zwei Kräfte zerlegen und die eine Kraft gleich machen Q, und sie in B der Kraft Q gleich und direct entgegengesetzt anbringen.

Fig. 10.



Die zweite Kraft in der Intensität $R = P - Q$ werden wir auf der Verlängerung der Linie AB in J in der Weise anbringen, dass wir die Proportion

$$P - Q : Q = AB : AJ$$

bekommen.

Die zwei in direct entgegengesetztem Sinne an B wirkenden Kräfte $Q, -Q$ sind zerstört und verbleibt nur die Kraft $R = P - Q$ an J, deren Angriffspunkt J aus obigem Verhältnisse zu bestimmen ist, und man hat demnach

$$3. \quad JA = \frac{Q}{P - Q} AB.$$

Mit Ausnahme daher des Falles, wo $P = Q$ ist, haben antiparallele Kräfte immer eine Resultante in der Größe $P - Q$, welche parallel den Kräften im Sinne der größeren Kraft wirkt.

Ist $P = Q$, alsdann ist $JA = \infty$. Mit Worten: Zweigleiche in entgegengesetztem Sinne parallel wirkende Kräfte, deren Richtungen nicht auf derselben Geraden liegen, haben keine Resultante.

Solche zwei zusammen an zwei invariable verbundenen Punkten wirkende Kräfte werden ein Kräftepaar genannt. Es bewirkt eine Drehung der Linie AB um die Mitte.

Zusammensetzung mehrerer paralleler Kräfte.

§ 38. Wirken mehrere parallele Kräfte an mehreren invariable miteinander verbundenen Punkten, und greifen einige dieser Kräfte in einem Sinne, andere in entgegengesetztem Sinne, so setzt man zwei positive Kräfte zusammen und bekommt den Angriffspunkt

der Resultante dieser beiden Kräfte, dann setzt man diese Resultante mit einer dritten Kraft zusammen und bekommt den neuen Angriffspunkt, und in dieser Weise setzten wir die Operation fort, bis wir alle positiven Kräfte zusammengesetzt und deren Angriffspunkt gefunden haben. So gehen wir auch bezüglich der negativen Kräfte vor.

Wir erhalten dann zwei Resultanten, eine R und die andere $-R'$, welche beide wir wie früher zusammensetzen und in dieser Weise den Angriffspunkt aller Kräfte erhalten. Die Resultante aller Kräfte wird gleich sein der Summe der einen Kräfte weniger der Summe der Kräfte, welche in entgegengesetztem Sinne wirken. Sind beide Summen einander gleich, alsdann erhalten wir ein Kräftepaar.

Wir haben bereits hervorgehoben, dass der Angriffspunkt der Resultante von den Richtungen der Kräfte unabhängig und bloß vom Verhältnisse der Kräfte abhängig ist.

Ändert man daher die Richtungen aller Kräfte, so ändert sich auch die Richtung der Resultante, welche stets den Richtungen der Kräfte parallel bleibt, aber der Angriffspunkt der Resultante bleibt derselbe.

Werden ferner die Intensitäten vergrößert oder verkleinert, wenn nur das Verhältniß nicht geändert wird, bleibt der Angriffspunkt der Resultante derselbe. Dieser Punkt wird das Centrum der parallelen Kräfte genannt.

Theoreme der Momente.

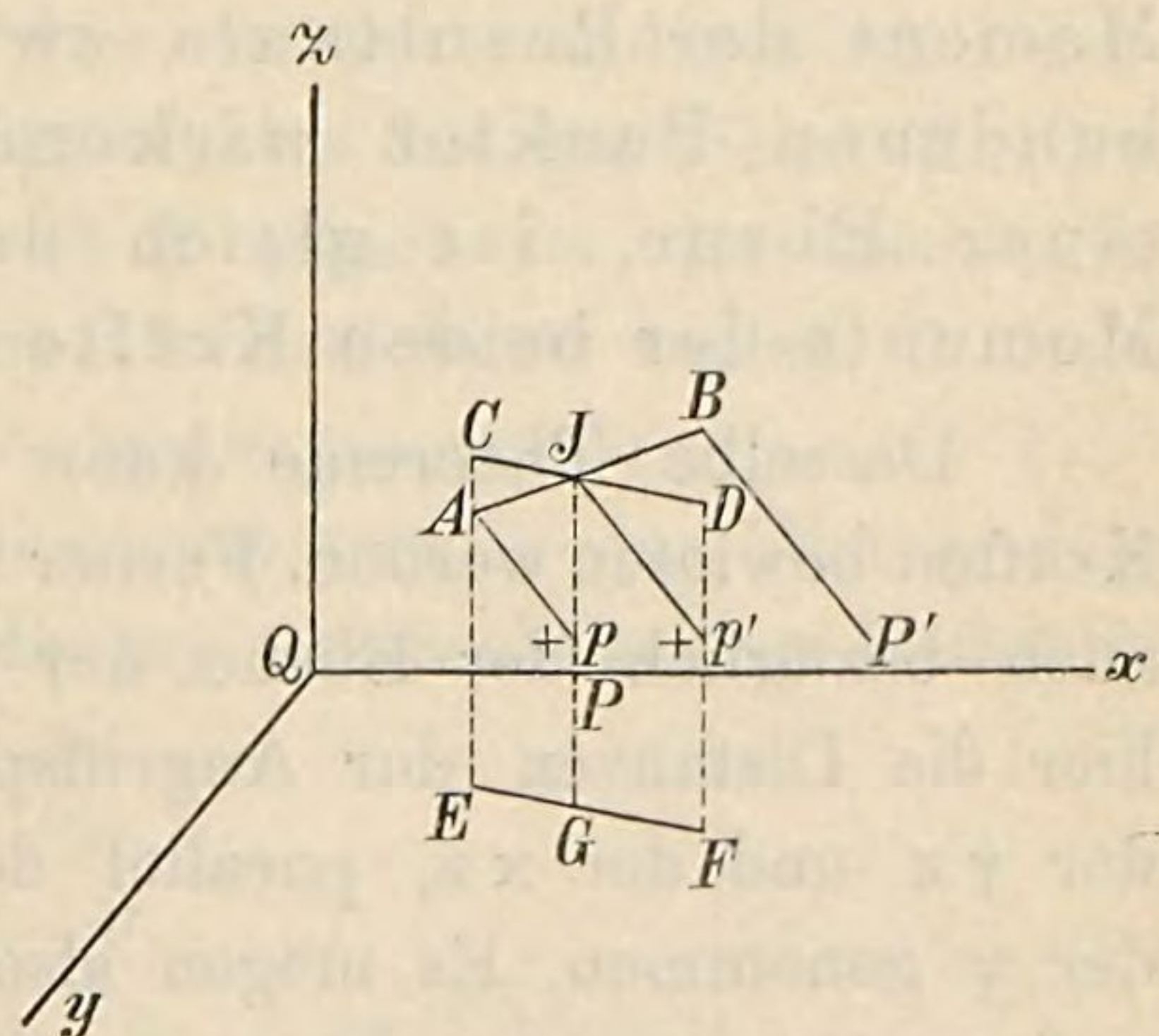
§ 39. Am einfachsten setzt man parallele Kräfte durch Anwendung des Theoremes der Momente zusammen.

Bezieht man nämlich die Angriffspunkte der Kräfte auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, so ergibt sich der Angriffspunkt der Resultante in folgender Weise:

Es wirken zwei Kräfte an den durch eine starre Linie AB verbundenen Punkten A, B nach den parallelen Richtungen AP, BP' . J sei der Angriffspunkt der parallelen Resultante $R = P + P'$ und fällt dieser nach dem früheren auf einen Punkt J in der Weise, dass man hat

$$AJ : JB = P' : P.$$

Fig. 11.



Fällen wir von den Angriffspunkten der beiden Kräfte und der Resultante A, B, J auf die Ebene der xy , die der Achse der z parallelen Coordinaten A E, B F, J G, die mit z, z' und z_1 bezeichnet werden mögen. Ziehen wir die Linie C D parallel zu E F, so haben wir, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke J C A, J B D

$$A C : B D = A J : J B$$

das ist

$$z_1 - z : z' - z_1 = A J : J B = P' : P$$

daher

$$P (z_1 - z) = P' (z' - z_1)$$

oder

$$4. (P + P') z_1 = P z + P' z'.$$

Das Product einer Kraft multipliciert mit der Distanz ihres Angriffspunktes von irgendeiner Ebene, wird das Moment dieser Kraft bezüglich dieser Ebene genannt. Hier sind die Producte $P z, P' z', (P + P') z_1$, die Momente der Kräfte $P, P', (P + P')$ bezüglich der Ebene der xy , nämlich der Producte der Kräfte multipliciert mit den respectiven, der z -Achse parallelen Distanzen ihrer Angriffspunkte von der Ebene der xy .

Sind die beiden Kräfte P, P' in entgegengesetztem Sinne gerichtet, so lässt sich in derselben Weise das Resultat beweisen wonach man hat

$$5. (P - P') z_1 = P z - P' z'.$$

§ 40. Diese beiden Resultate geben folgendes Theoreme: Das Moment der Resultante zweier, an zwei invariable verbundenen Punkten wirkenden Kräfte, bezüglich irgend einer Ebene, ist gleich der algebraischen Summe der Momente der beiden Kräfte bezüglich derselben Ebene.

Dasselbe Theoreme kann in derselben Weise bei mehreren Kräften bewiesen werden. Ferner ist selbstverständlich dieses Theoreme auch bezüglich der Ebene der yz und der xz gültig und werden hier die Distanzen der Angriffspunkte von den respectiven Ebenen der yz und der xz , parallel den respectiven Achsen der x und der y genommen. Es mögen also einige der Kräfte in einem Sinne, andere in entgegengesetztem Sinne wirken, stets hat man nachstehende Gleichungen, wo unter Summe die algebraische Summe verstanden wird.

$$6. \quad \left\{ \begin{array}{l} R = P + P' + P'' + \dots = \Sigma P \\ R z_1 = P z + P' z' + P'' z'' + \dots = \Sigma P z \\ \text{und ebenso} \\ R x_1 = P x + P' x' + P'' x'' + \dots = \Sigma P x \\ R y_1 = P y + P' y' + P'' y'' + \dots = \Sigma P y \end{array} \right.$$

daher hat man

$$7. \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{\Sigma P z}{R} \\ x_1 = \frac{\Sigma P x}{R} \\ y_1 = \frac{\Sigma P y}{R} \end{array} \right.$$

und mithin kann die Lage des Angriffspunktes der Resultante parallel den Kräften stets bestimmt werden.

§ 41. Reduciert sich das System auf ein Kräftepaar, so ist $R = 0$ und die Gleichungen 7 werden

$$8. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{\Sigma P x}{R} = \infty \\ y_1 = \frac{\Sigma P y}{R} = \infty \\ z_1 = \frac{\Sigma P z}{R} = \infty \end{array} \right.$$

In diesem Falle gibt es keine Resultante, was eben die Coordinaten andeuten, die ins Unendliche fallen.

Gleichgewicht paralleler Kräfte.

§ 42. Man sieht leicht ein, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Gleichgewichtes bei parallelen Kräften die sind, dass 1. jede beliebige Kraft P gleich ist der Resultante aller anderen Kräfte, welche wir mit R'' bezeichnen wollen, 2. diese Kraft P der Resultante R'' direct entgegengesetzt ist.

Wir nehmen nun das Coordinatensystem in der Weise, dass die z -Achse parallel und die Ebene der xy senkrecht sei zur Richtung aller Kräfte.

Man hat daher

$$\begin{aligned} R'' &= -P \\ P + R'' &= P + P' + P'' + \dots = \Sigma P = 0. \end{aligned}$$

Damit weiter P direct entgegengesetzt sei R'' , müssen beide einen gemeinsamen Angriffspunkt haben. Es ist also nothwendig,

dass ihre Coordinaten x und y in der Ebene der $x y$ dieselben seien.

Seien also die Coordinaten des Punktes, wo die R'' angreift, in der Ebene der $x y$

$$x = \alpha, y = \beta.$$

Dieselben Coordinaten müssen dann auch für den Angriffspunkt der Kraft P gelten.

Man hat nun

$$R'' \alpha = P' x' + P'' x'' + P''' x''' + \dots$$

$$R'' \beta = P' y' + P'' y'' + P''' y''' + \dots$$

ferner

$$R'' \alpha = -P x$$

$$R'' \beta = -P y$$

folglich

$$P x + P' x' + P'' x'' + \dots = \Sigma P x = 0$$

$$P y + P' y' + P'' y'' + \dots = \Sigma P y = 0.$$

Die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes sind demnach

$$9. \quad \begin{cases} \Sigma P = 0 \\ \Sigma P x = 0 \\ \Sigma P y = 0 \end{cases}$$

Sind umgekehrt diese drei Bedingungsgleichungen erfüllt, dann besteht das Gleichgewicht.

Denn sie ergeben

$$R'' = -P, R'' \alpha = P x, R'' \beta = -P y, \alpha = x, \beta = y$$

mithin P gleich und direct entgegengesetzt ist der Resultante aller anderen Kräfte R'' .

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Gleichgewichtes paralleler Kräfte sind demnach drei, nämlich:

1. Das die algebraische Summe aller Kräfte gleich Null sei.

2. Dass auch die algebraische Summe der Momente der Kräfte bezüglich zweier ihrer Richtung paralleler Ebenen gleich Null sei für jede dieser Ebenen.

§ 43. Wählt man ein schiefwinkeliges Coordinatensystem, so kann man jede Coordinate mit dem Sinus des Winkels multiplicieren, welchen die diesbezügliche Achse mit der Ebene der anderen beiden Achsen bildet und man hat dann statt x, y, z die von den Angriffspunkten auf die Coordinatenebenen gefällten Senkrechten.

Es ist daher auch nicht nothwendig, dass die beiden Ebenen, in Beziehung auf welche die Momente der Kräfte genommen werden, auf einander senkrecht stehen. Diese beiden Ebenen können einen beliebigen Winkel einschließen und genügt, dass sie der Richtung der Kräfte parallel sind. Führt man ferner die Ebene der xy durch das Centrum der parallelen Kräfte, dann wird $z_1 = 0$, folglich

$$\Sigma P z = R z_1 = 0.$$

Dieses sagt in Worten ausgedrückt: Die algebraische Summe der Momente paralleler in Beziehung auf eine Ebene, die durch das Centrum dieser Kräfte geht, ist gleich Null.

Liegen alle Kräfte in einer und derselben Ebene, so ist die Bedingung für die Momente bezüglich dieser Ebene schon erfüllt, und es genügt demnach, wenn die Momente bezüglich noch einer der Richtung der Kräfte parallelen Ebene gleich Null sind.

Sechstes Capitel.

Kräftenpaare.

§ 44. Unter einem Kräftenpaare versteht man zwei an Intensität gleiche, an zwei invariable miteinander verbundene Punkte $A B$ parallel, jedoch in entgegengesetztem Sinne angreifende Kräfte.

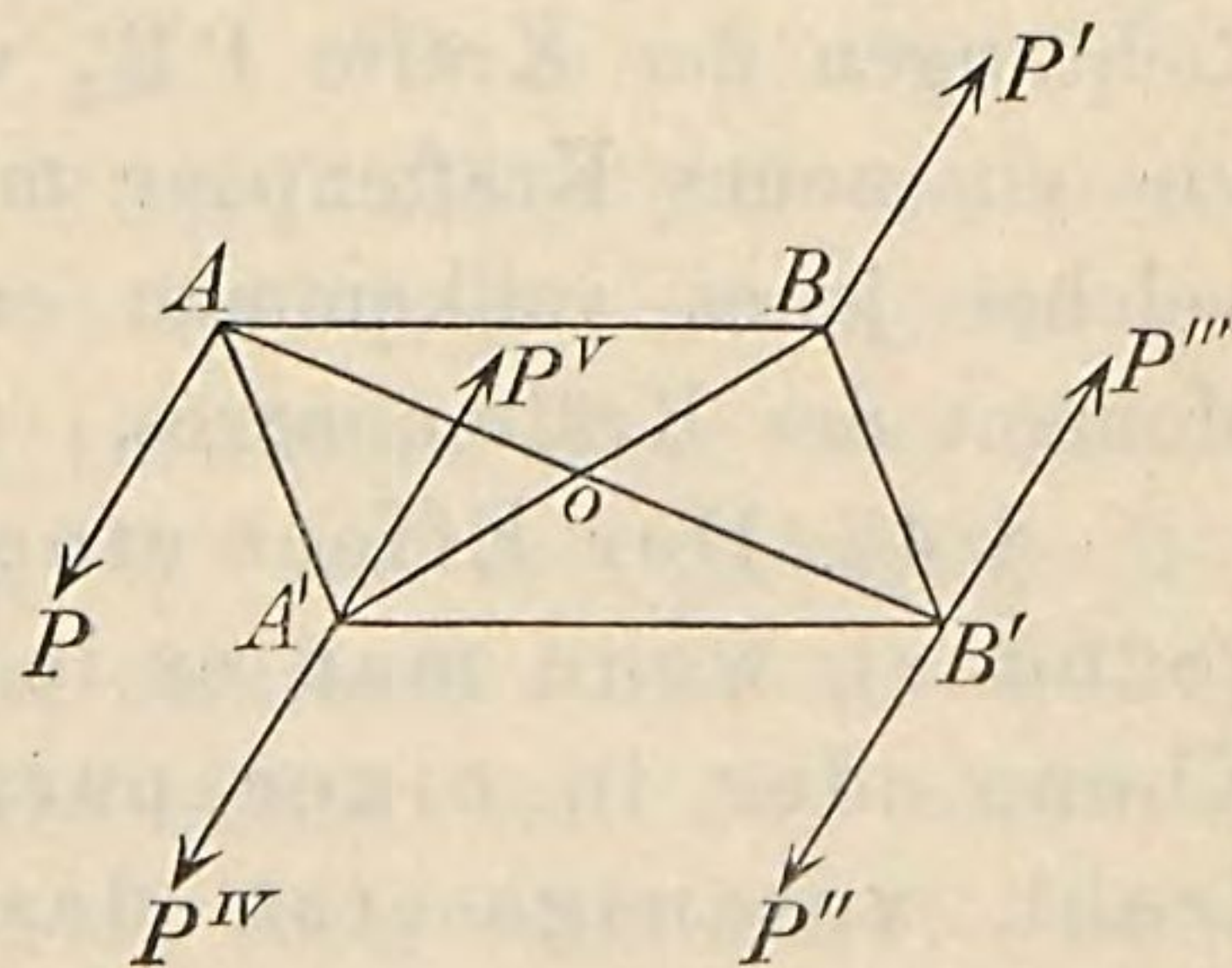
Die kürzeste Distanz der beiden Kräfte eines Paares nennt man den Hebelarm des Paares.

Das Product eines der beiden Kräfte mit dem Hebelarm wird das Moment des Kräftenpaares genannt.

Ein Kräftenpaar kann, ohne Änderung des Effectes, parallel zu sich selbst in seiner Ebene oder nach einer parallelen Ebene transportiert werden, vorausgesetzt, dass der neue Hebelarm mit dem früheren invariable verbunden ist.

An den Punkten A, B der Linie AB wirke ein Kräftenpaar P, P' . Es sei $A'B'$ eine der AB gleiche und parallele, mit dieser invariable verbundene, in der Ebene $PABP'$ oder außerhalb derselben liegende Linie. An den Punkten $A'B'$ bringen wir je zwei,

Fig. 12.



in direct entgegengesetztem Sinne gerichtete, der Kraft P gleiche und parallele Kräfte P^{II} , P^{III} , P^{IV} , P^{V} an, wodurch der Zustand des Systems nicht geändert wird. AP , $B'P''$ setzten sich zusammen zu einer in der Mitte der Linie AB' in O angreifenden Resultante $= 2P$. Auch die an A' , B angreifenden Kräfte P^{V} , P^{I} setzen sich zu einer in O angreifenden, jener Resultante direct entgegengesetzten Resultante von gleicher Intensität $2P$ zusammen. Dadurch erscheinen die vier Kräfte $PP^{\text{II}}P^{\text{V}}P^{\text{I}}$ zerstört und es verbleibt nur das Kräftepaar $P^{\text{IV}}P^{\text{III}}$ an der Linie $A'B'$ wirkend.

Das Kräftepaar PP' an AB ist also durch das Kräftepaar $P^{\text{IV}}P^{\text{III}}$ an $A'B'$ mit vollkommen gleicher Wirkung ersetzt worden.

§ 45. Jedem schiefwinkligen Kräftepaar kann ein Kräftepaar substituiert werden, bei welchem die Kräfte in rechtwinkliger Richtung zum Hebelarm wirken, wenn der neue Hebelarm mit dem alten Hebelarm AB invariable verbunden ist.

An A , B der Linie AB wirken zwei Kräfte P , P' in schiefwinkliger Richtung zum Hebelarm nach AP' , BP . Wir ziehen

Fig. 13.

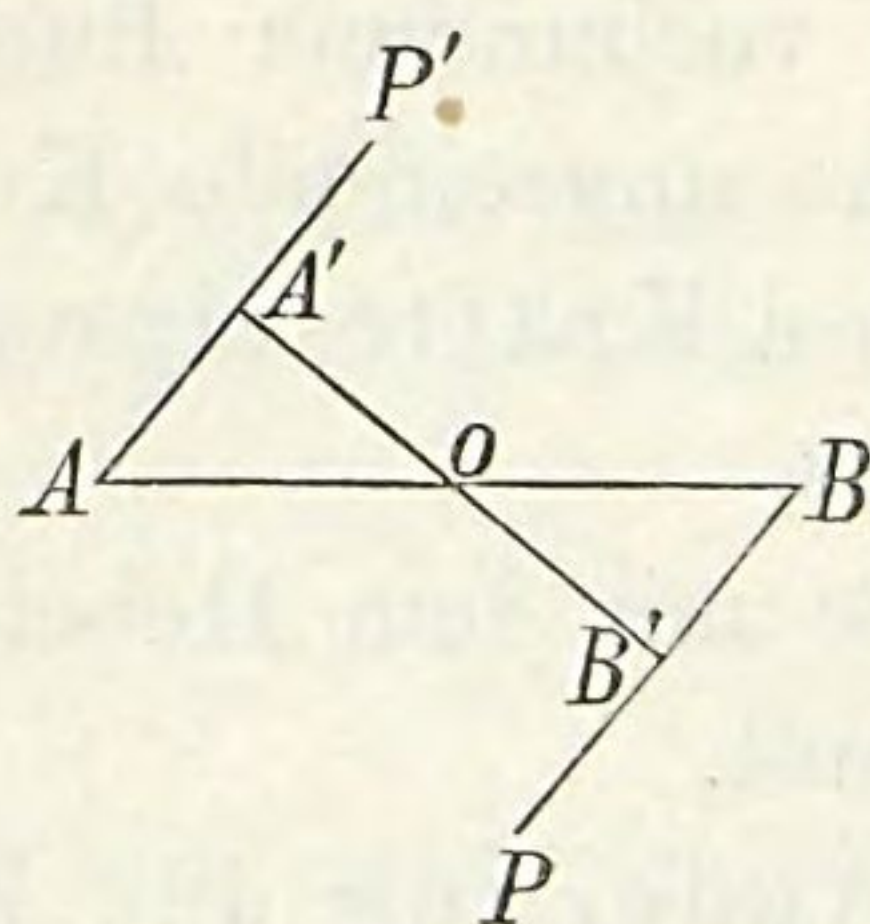
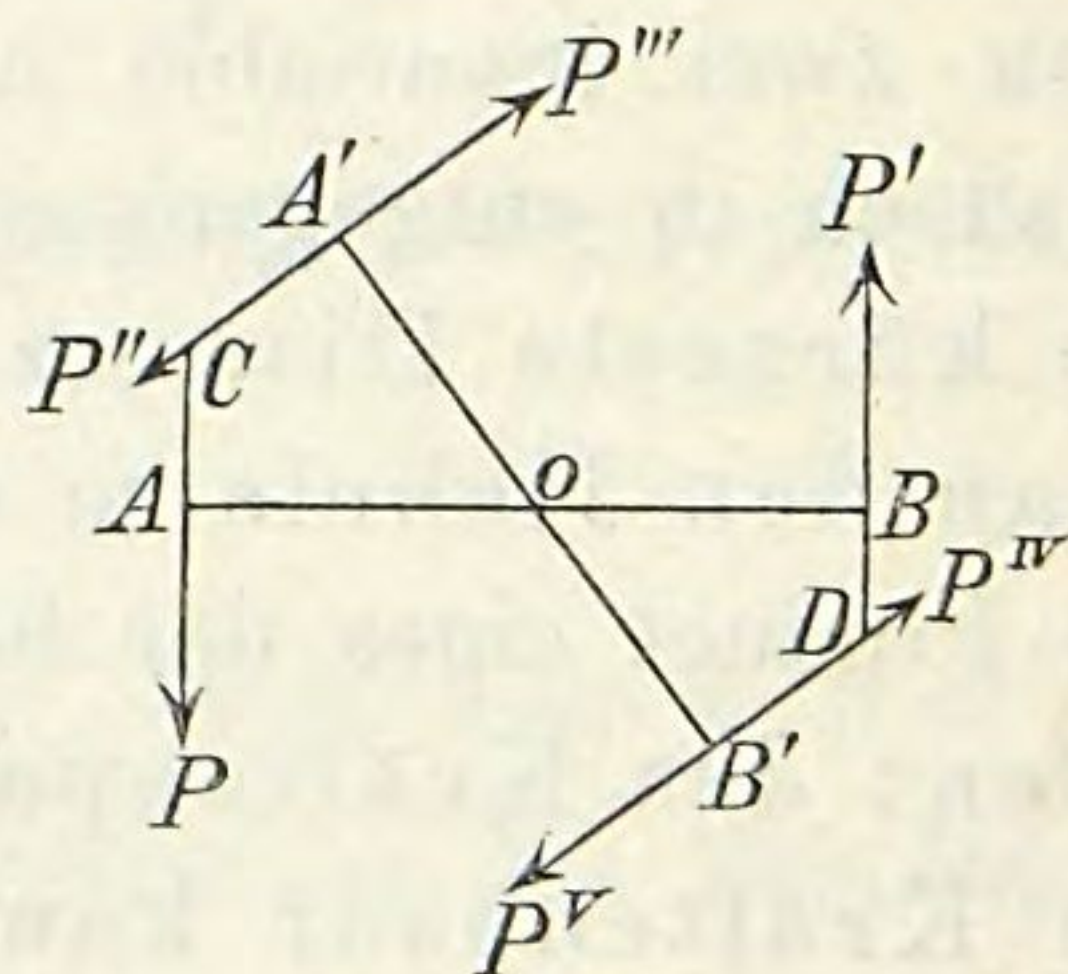


Fig. 14.



durch die Mitte O des Armes AB eine Senkrechte $A'B'$ auf die Richtungen der Kräfte PP' , versetzen diese nach A' , B' , so haben wir ein neues Kräftepaar mit dem senkrechten Hebelarm $A'B'$, welches jenes vollkommen ersetzt. Das Product $P \cdot A'B'$ ist das Moment des Kräftepaares.

§ 46. Der Effect eines Kräftepaares wird auch nicht geändert, wenn man es in welcher Weise immer in seiner Ebene oder in einer parallelen Ebene um einen Winkel dreht, vorausgesetzt, dass der neue Hebelarm mit dem früheren invariable verbunden ist.

Es sei P , AB das Kräftepaar, $A'B' = AB$ mit dieser Linie AB invariable verbunden. An A' und B' bringen wir je zwei in

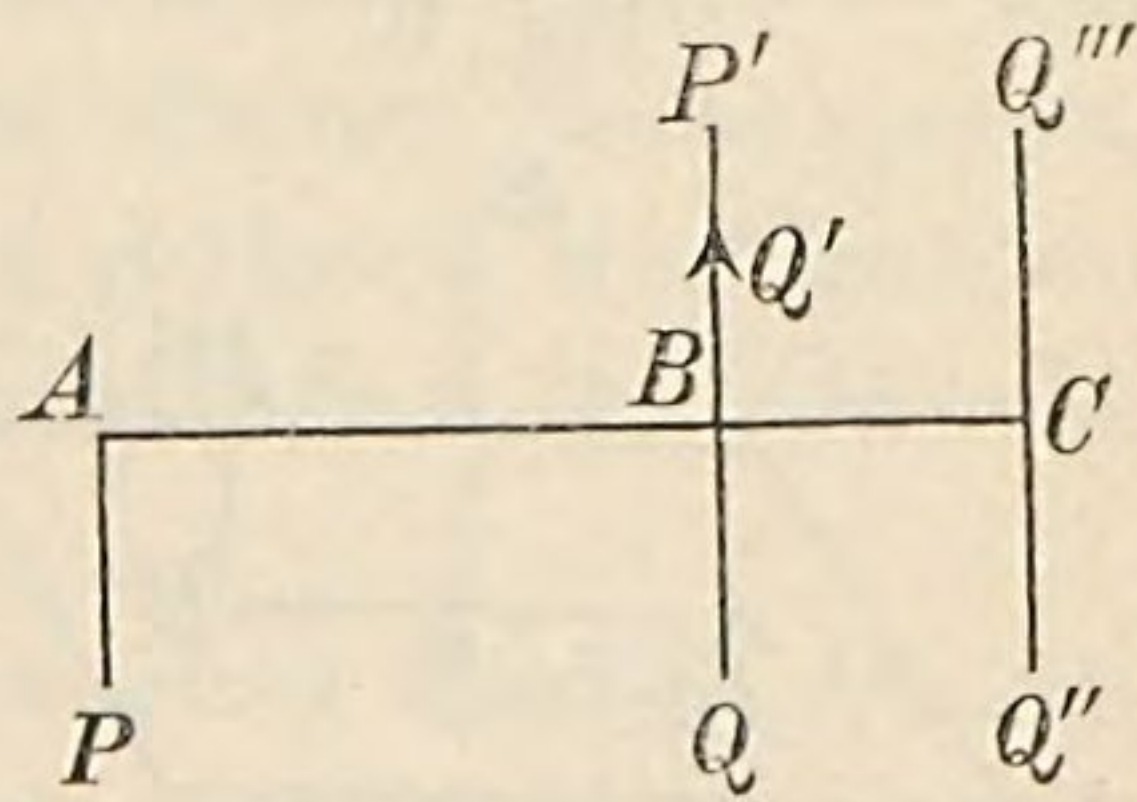
direct entgegengesetztem Sinne wirkende Kräfte an, also vier Kräfte $P^{\text{II}}, P^{\text{III}}, P^{\text{IV}}, P^{\text{V}}$, jede Kraft der P gleich, wodurch der Zustand nicht geändert wird. Die Kräfte P, P^{III} aber, beide nach C versetzt, geben eine nach CO wirkende Resultante. Die Kräfte $P^{\text{V}}, P^{\text{I}}$, beide nach D versetzt, geben eine, der Resultante CO gleiche und direct entgegengesetzte, nach DO wirkende Resultante, so dass die vier Kräfte $P, P^{\text{III}}, P^{\text{V}}, P^{\text{I}}$ zerstört sind und bloß das Kräftepaar $P^{\text{II}}, P^{\text{IV}}$ an $A' B'$ wirkend verblieben, welches das frühere vollkommen ersetzt.

Aus diesem und dem vorvorletzten Satze ergibt sich folgendes Theoreme: Ein Kräftepaar kann, ohne Änderung des Effectes, parallel zu sich selbst, in seiner Ebene transportiert, oder in eine parallele Ebene überführt und in dieser Ebene beliebig gedreht werden, vorausgesetzt, dass der neue Hebelarm mit dem früheren fest verbunden ist.

§ 47. Ein Kräftepaar kann, ohne Änderung des Effectes, durch ein anderes, in derselben Ebene oder in einer dem Kräftepaare parallelen Ebene liegendes Kräftepaar, mit geändertem Hebelarm ersetzt werden, wenn die Größe des Momentes ungeändert bleibt und die neuen Punkte mit den früheren Punkten invariable verbunden sind.

Es sei das Kräftepaar P, AB . Vor allem kann man das Paar in eine parallele Ebene versetzen. In dieser neuen parallelen Ebene verlängern wir den Hebelarm bis C , bringen an den Punkten B und C je zwei direct entgegengesetzte gleiche Kräfte Q, Q', Q'', Q''' von solcher Intensität an, dass $Q \cdot BC = P \cdot AB$ ist, wodurch der Zustand des Systems nicht geändert wird. Andererseits setzten sich $P' Q'$ zu einer Resultante $P' + Q'$ in B nach einer Richtung zusammen. Die Kräfte P, Q'' , indem $P \cdot AB = Q'' \cdot BC$ ist, setzen sich ebenfalls zu einer Resultante $P + Q''$ in B nach direct entgegengesetztem Sinne zusammen und erscheinen diese vier Kräfte zerstört, so dass bloß das Kräftepaar Q, Q''' mit dem Hebelarm BC verblieben. Das Kräftepaar P, AB ist demnach durch ein anderes Kräftepaar Q, BC , wo Kraft und Hebelarm von dem früheren differieren und nur deren Momente gleich sind, vollkommen ersetzt worden.

Fig. 15.



§ 48. Befindet sich also in einer Ebene ein Kräftepaar P, AB und in einer jener Ebene parallelen Ebene ein zweites Paar

Q, BC, wo die Momente $P \cdot AB = P \cdot BC$ sind, so sind diese Paare gleichwertig und können, wenn die Hebelarme AB, BC invariable miteinander verbunden sind, eines durch das andere ersetzt werden.

Drehungsrichtung der Paare.

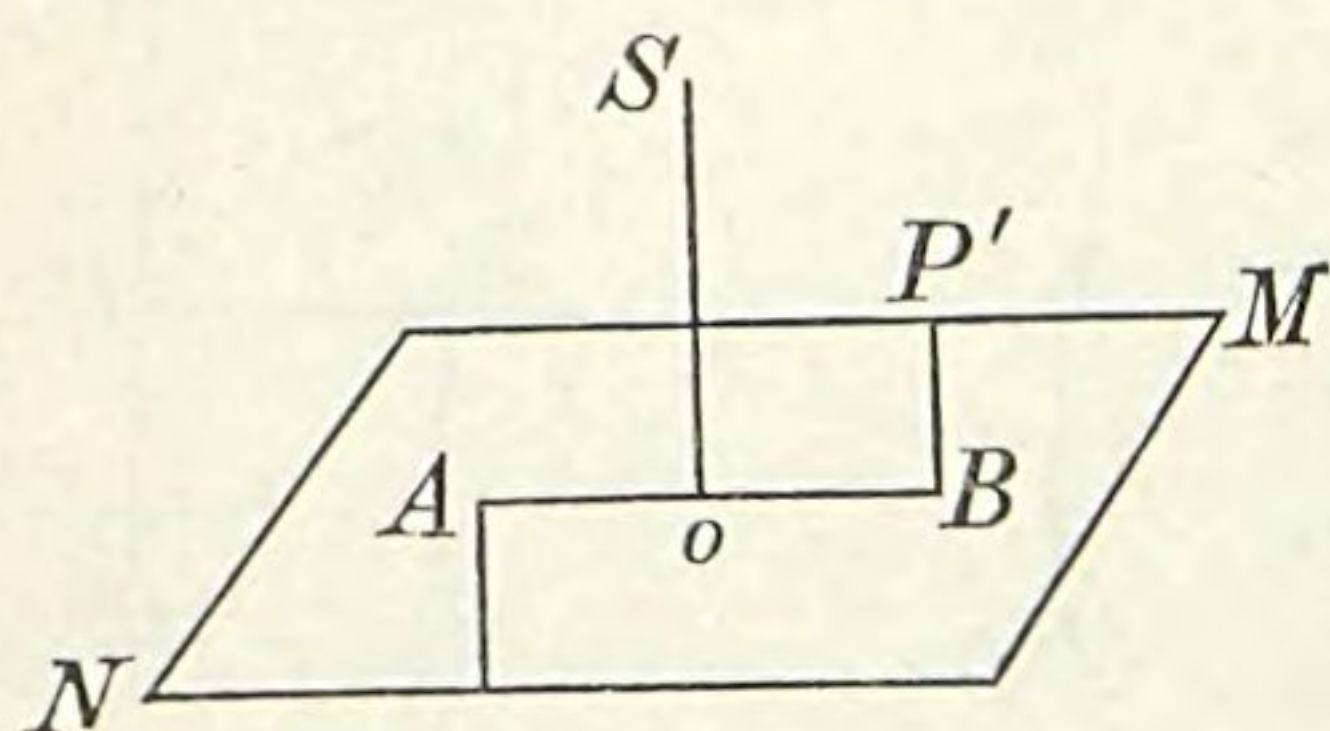
§ 49. Wir wissen, dass ein Kräftepaar keine Resultante hat, was aber nach den entwickelten Grundsätzen direct bewiesen werden kann. Würde ein Kräftepaar eine Resultante haben, so würde eine direct entgegengesetzte Kraft R' dessen Wirkung aufheben und Gleichgewicht herbeiführen. Nun kann man aber das Paar ohne Änderung des Effectes in der Weise parallel verschieben, dass eine Kraft P des Kräftepaares sich mit R' zu einer Kraft S zusammensetzen. Wir würden also dann zwei ungleiche Kräfte S und P' haben, welche sich unmöglich Gleichgewicht machen können, da sie weder einander gleich noch direct entgegengesetzt sind.

Die Wirkung eines Paares besteht in der That nur darin, den Hebelarm um seine Mitte O zu drehen, gleichsam wie um eine Achse nach der einen oder der anderen Richtung.

§ 50. Aus obigen Grundsätzen ist ferner zu ersehen, dass der Effect eines Kräftepaares nur von der Position seiner Ebene, seinem Momente und dem Sinne der Richtung der Drehung abhängt.

Um Moment und Sinn der Drehungsrichtung gehörig zu messen und zu bezeichnen, errichtet man nach dem Vorgange von

Fig. 16.



Poinsot in der Mitte oder in einem beliebigen Punkte des Hebelarmes AB auf der Ebene des Kräftepaares eine Senkrechte Os , Achse des Kräftepaares genannt, deren Länge dem Momente des Kräftepaares $P \cdot AB$ gleich ist, das ist von einer Länge, welche ebensoviel Längeneinheiten als das

Moment des Paares Flächeneinheiten enthält. Diese Achse repräsentiert an Größe das lineäre Moment des Paares.

Um ferner den positiven oder negativen Sinn der Drehung des Paares genau zu bezeichnen, wählen wir eine Richtung, es sei von der Linken zur Rechten, die wir als positiv, und sodann die Drehung in entgegengesetztem Sinne von rechts nach links als negativ bezeichnen. Wir nehmen nun nach dieser getroffenen Wahl an, dass ein Beobachter, mit den Füßen auf einer Seite der Ebene des Paares gestellt, längs der Achse das Auge auf die Spitze der

Achse S gerichtet, sehe die Drehung des Paares von seiner Linken zur Rechten, wie den Zeiger einer Uhr, vor sich gehen, so hat man den positiven Sinn der Drehung des Paares. Die Richtung also, nach welcher dieser Beobachter hinsehen muss längs der Achse, um diese Weise der Drehungsrichtung zu erhalten, bestimmt die Achsenrichtung des Paares. Die Direction und die Länge der Achse bestimmen demnach Sinn und Größe des Kräftepaars.

Siebentes Capitel.

Zusammensetzung von Kräftepaaren.

§ 51. Zwei an einem soliden Körper wirkende Kräftepaare, deren Achsen parallel sind, setzen sich zu einem einzigen Paare zusammen, dessen Achse die algebraische Summe der Achsen der beiden Kräftepaare gleich ist.

Haben nämlich die beiden Paare parallele Achsen, so kann man sie nach früherem in dieselbe Ebene bringen und ihnen daselbst denselben Hebelarm geben, und alsdann summieren sich die Achsen wie die Momente, und betrachtet man die rechtsdrehenden als positiv, so wird man den linksdrehenden das negative Zeichen geben.

Derselbe Lehrsatz hat selbstverständlich auch Geltung bei Zusammensetzung mehrerer Kräftepaare, deren Achsen parallel sind.

§ 52. Zwei in verschiedenen Ebenen liegende Kräftepaare, deren Ebenen, mithin deren Achsen einen Winkel bilden, setzen sich zu einem einzigen Paare zusammen, dessen Achse die Diagonale des aus den Achsen der beiden Paare, unter dem Winkel, den sie einschließen, gebildeten Parallelogramms ist.

Die Ebenen der Paare schneiden sich in einer Linie AA' . Zunächst also verschiebt man die Paare parallel und gibt denselben einen gemeinsamen Hebelarm, und zwar die Linie AA' , in der sich die Ebenen schneiden, in der Weise, dass zwei Kräfte beider Paare am Anfangspunkte des Hebelarmes und die anderen beiden Kräfte am Endpunkte des Armes wirken.

Diesen Arm AA' kann man der Einheit gleich nehmen. Alsdann erscheinen die Achsen der beiden Paare durch dieselben Strecken repräsentiert, wie die respectiven einzelnen Kräfte der Paare.

Fig. 17.



Seien also AP , $A'P'$ und AQ , $A'Q'$ die beiden Paare, so wurden die beiden Kräfte AP , AQ von einer Seite und die zwei Kräfte $A'P'$, $A'Q'$ von der anderen Seite zusammengesetzt und man erhält das Paar AR , $A'R'$, wo AR , $A'R'$ die Diagonalen der beiden Parallelogramme sind. Dreht man das Parallelogramm $APQR$ um 90° , so erscheinen die Strecken AP , AQ , AR als Achsen der zusammengesetzten Paare und des resultierenden Paares, und AR bleibt immer die Diagonale des Parallelogrammes $APRQ$.

§ 53. Mehrere Paare setzten sich in derselben Weise zu einem einzigen Paar zusammen, dessen Achse die Resultante der Achsen der Componentenpaare ist.

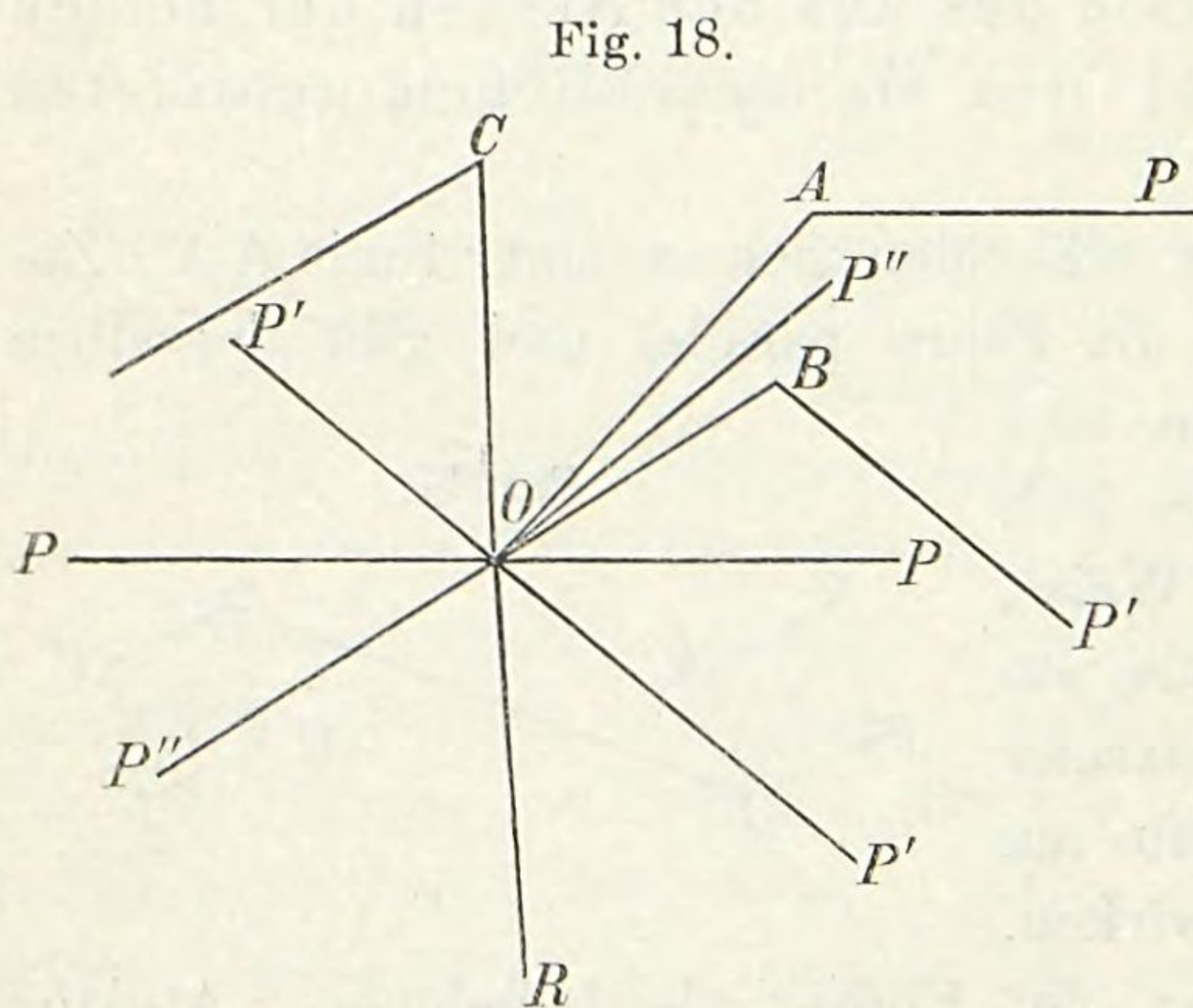
Ebenso kann man ein Kräftepaar in mehrere andere zerlegen und dies in verschiedener Weise.

Kräftepaare setzen sich demnach wie Kräfte zusammen, die an Größe und Richtung den lineären Momenten dieser Paare gleich sind und an einem Punkte wirken, da man die Ebenen der Paare parallel zu sich selbst und in der Weise transportieren kann, dass ihre Ebenen und respective deren Achsen durch denselben Punkt gehen. Drei nicht in einer Ebene liegende Paare werden sich zu einem einzigen Paare zusammensetzen, dessen Achse die Diagonale eines Parallelepipedes ist, von welchem die Achsen der Componentenpaare die Seiten sind.

Achtes Capitel.

Reduction von Kräften an einem invariablen Punktsysteme.

§ 54. Wirken Kräfte an einem System invariable verbundener



Punkte oder an einem soliden Körper, und nehmen wir an, die Punkte A , B , C seien von den Kräften P , P' , P'' sollicitiert, so kann mit diesen Kräften folgende Reduction vorgenommen werden.

Bringen wir an einem beliebigen, im Körper genommenen Punkte O je zwei, den respectiven Kräften P , P' , P'' parallele, gleiche und einander direct entgegengesetzt wirkende Kräfte an, wodurch der Zustand des Systems nicht geändert wird. Statt jeder Kraft

bekommen wir aber drei Kräfte und respective die Kraft P parallel versetzt nach O nebst einem Kräftepaare P, P_1 , versehen mit einem gewissen Hebelarm und so bei allen anderen Kräften P', P'' .

Jede an einem Körper wirkende Kraft kann, ohne Änderung des Effectes, durch eine gleiche und parallele, nach einem beliebigen Punkte des Körpers versetzte Kraft nebst einem Kräftepaare, angreifend an beiden Angriffspunkten, ersetzt werden.

Nehmen wir diese Operation bei allen anderen Kräften vor, so bekommen wir alle Kräfte parallel nach einem beliebigen Punkte des Körpers verschoben und eine Anzahl von Kräftepaaren.

Alle nunmehr an einen einzigen Punkt O verschobenen und daselbst angreifenden Kräfte haben eine Resultante und die Kräftepaare können ebenfalls zu einem einzigen Paare vereinigt werden.

Dabei sieht man, dass Größe und Richtung der Resultante der Kräfte vom Punkte O unabhängig sind. Dagegen ändert sich die Position und das Moment des resultierenden Paares mit dem Punkte O .

Jede Anzahl von an einem soliden Körper angreifenden Kräften lässt sich demnach auf eine Kraft und ein Kräftepaar reducieren.

§ 55. Da man ferner eine Kraft des Resultantenpaares parallel zu sich bis zum Punkte O verschieben und mit der Resultante zu einer neuen Resultante vereinigen kann, so dass wir diese Kraft und die vom Paare verbliebene Kraft haben, welche im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen, so haben wir den weiteren Satz: Eine beliebige Anzahl von Kräften, welche an einem System invariable miteinander verbundener Punkte angreifen, kann auf zwei Kräfte reducirt werden, welche im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen und von denen eine Kraft durch einen beliebigen Punkt O geht.

Reduction auf eine Kraft und ein paralleles Kräftepaar.

§ 56. Die Reduction der an einem Punktsystem oder soliden Körper angreifenden Kräfte auf eine Kraft und ein Kräftepaar kann in mannigfacher Weise geschehen, je nach der Wahl des Punktes O , wohin die Kräfte verlegt wurden.

Man kann aber den Punkt O so erhalten, dass die Achse des resultierenden Paares der Resultante der Kräfte parallel ist.

Das resultierende Paar kann nämlich immer in zwei Paare in der Weise zerlegt werden, dass die Achse des einen Paares mit der

Resultante aller Kräfte parallel geht, die die Achse des anderen Paares auf der Resultante senkrecht steht.

Bezeichnen wir das resultierende Paar mit G und bildet es, das ist dessen Achse mit der Resultante aller Kräfte, die wir R nennen, den Winkel i , so wird das parallele Paar gleich sein $G \cos i$ und das normale Paar gleich sein $G \sin i$.

Dabei kann immer das normale Paar durch eine Drehung so gestellt werden, dass die Kräfte des Paares parallel der Resultante aller Kräfte werden.

Auch heben wir hervor, dass, wenn wir von Richtung, Größe, Projection und Componenten eines Paares sprechen, wir stets darunter nicht das Paar selbst, sondern seine Achse verstehen.

Da nun unter normalem Paare hier und weiterhin verstanden wird, dass die Achse des Paares normal zur Resultante steht, so werden die Kräfte des Paares parallel der Resultante aller Kräfte sein. Parallele Kräfte können aber mit der Resultante aller Kräfte zu einer neuen resultierenden einzigen Kraft vereinigt werden, wo dann aber nicht mehr der früher willkürlich gewählte Punkt O , sondern ein neuer Punkt O' als Angriffspunkt der Kräfte sein wird, wohin alle Kräfte verlegt erscheinen.

Nebst dieser neuen Resultante R' wird noch ein Kräftepaar sein, dessen Achse der Resultante R' parallel ist, was wir eben angestrebt.

§ 57. Diese Zerlegung aller Kräfte in eine Resultierende und ein Kräftepaar, dessen Achse der Resultante parallel ist, kann nur in einer einzigen Weise effectuirt werden. Denn überführt man die Resultierende parallel zu sich selbst, so bekommt man ein neues normales Paar, welches mit dem früheren parallelen Paare sich zusammensetzend, Richtung und Größe des Paares nothwendig ändern, und die Achse des Paares nicht mehr der Resultante parallel sein wird. Die Resultante, die man durch diese Operation erhält, wird Resultante der Translation und ihre Richtung die Centralachse des Kräftensystems genannt.

Das parallele Kräftepaar heißt: Das Paarminimum. Denn das frühere Paar hatte noch ein normales Paar, einen Theil des früheren Paares, also das normale Paar haben wir mit der Resultierenden vereinigt und das zurückgebliebene ist also Minimum. Die Größe des Paarminimum ist, wie wir gesehen $= G \cos i$.

Wir haben demnach folgendes Theoreme:

Ein Kräftensystem kann immer auf eine einzige Kraft und ein Paar, dessen Achse dieser Kraft parallel ist, reduziert werden.

Schließlich wird Folgendes hervorgehoben. Zerlegen wir die Resultante der Kräfte, die wir mit R' bezeichnen, in drei Componenten nach den Achsen X, Y, Z und auch das Paar in drei Componenten nach den Achsen, und seien diese G', G'', G''' .

Da beide die Resultante der Kräfte und die Achse des Paares, die wir mit G_1 bezeichnen, parallel sind, so bilden sie mit den Achsen gleiche Winkel.

Es wird daher sein

$$\frac{X}{R'} = \frac{G'}{G_1}, \quad \frac{Y}{R} = \frac{G''}{G_1}, \quad \frac{Z}{R'} = \frac{G'''}{G_1}$$

daher

$$1. \quad \frac{X}{G'} = \frac{Y}{G''} = \frac{Z}{G'''} = \frac{R'}{G_1}.$$

Parallele Kräfte in einer Ebene.

§ 58. Sind alle Kräfte parallel und liegen in einer Ebene, alsdann wählen wir einen in der Ebene liegenden Punkt O , führen durch diesen Punkt eine zu den Kräften parallele Linie, versetzen dahin, in der Weise, wie im § 54, alle Kräfte und fällen von O eine Senkrechte auf die Kräfte. Die algebraische Summe aller nach O parallel verlegten Kräfte gibt eine Resultante, die wir mit R bezeichnen, so dass man hat

$$R = \Sigma P$$

ferner sind auch die Achsen der aus dieser Reduction erhaltenen Kräftepaare parallel und das Resultantenpaar ist gleich der algebraischen Summe der einzelnen Paare. Bezeichnet man nun die von O auf die Kräfte gefällten Senkrechten, welche die Hebelarme der Paare sind, mit p, p', p'' und das resultierende Paar mit G , so hat man

$$G = \Sigma P p.$$

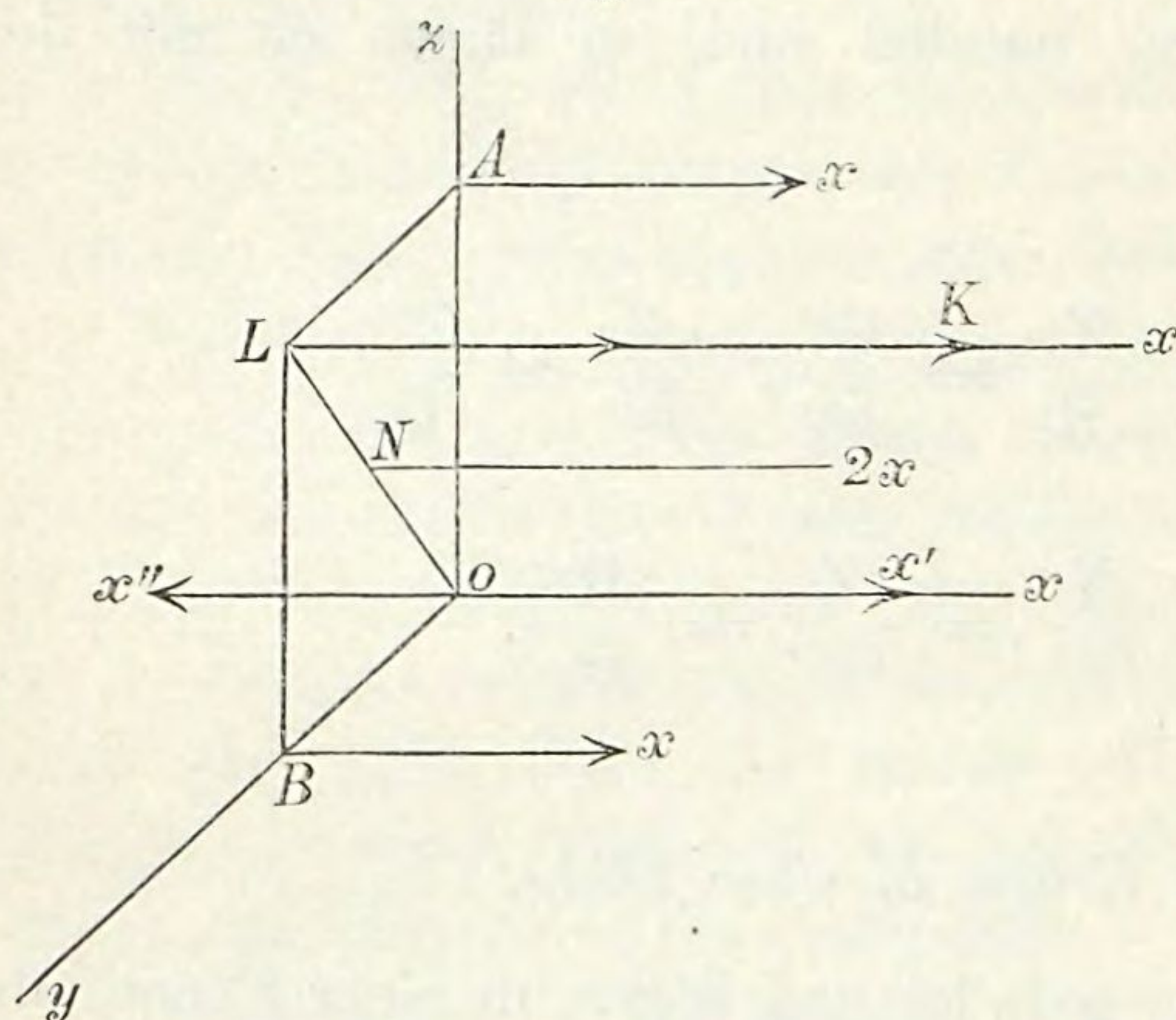
Das Moment des Kräftepaares Pp , also das Product der Kraft mit dem darauf senkrechten Hebelarm, mithin der Kraft mit der vom Punkte O darauf gefällten Senkrechten, wird auf das Moment der Kraft in Beziehung auf den Punkt O genannt.

Zusammensetzung von Kräften.

§ 59. Die Kräfte können aber auch in anderer Weise reduziert werden, wenn man diese auf ein Coordinatensystem bezieht. Wir wählen ein rechtwinkeliges Coordinatensystem.

Wir wissen, dass jede, an welchem Punkte immer angreifende Kraft P in drei Componenten, parallel den Coordinatenachsen zerlegt

Fig. 19.



werden kann. Wir nennen diese Componenten X, Y, Z . Die Coordinaten des Punktes K sind, wie aus der Figur zu ersehen, $x = KL$, $y = OB$, $z = AO$.

Wir nehmen eine der am Punkte K , statt der Kraft P , nunmehr wirkenden drei Componenten, die Componente X , welche parallel der X -Achse angreift, und führen mit ihr folgende

Operation durch. Am Ursprunge des Coordinatensystems O bringen wir zwei der X gleiche und parallele, einander direct entgegengesetzte Kräfte X' und X'' an, wodurch der Zustand des Systems nicht geändert wird. Wir haben also in dieser Weise, statt der Kraft X , eine der X gleiche Kraft X' an O und ein Kräftepaar, zusammengesetzt aus den beiden, der X gleichen Kräften, X in der Richtung XK und X'' in der Richtung OX'' . Die Kraft X versetzen wir in ihrer Richtung nach L , wo sie die Ebene YZ trifft, und denken wir uns die Punkte L wie auch O mit dem Punktsystem invariable verbunden. Das Kräftepaar XL, OX'' , dessen beide Kräfte X, X'' an den Endpunkten L und O der Linie LO liegen, kann durch ein anderes ersetzt werden. Theilen wir nämlich die Linie LO in zwei Hälften, verschieben die Kraft LX nach der Mitte in N , der ebenfalls mit dem System invariable verbunden ist, fügen noch eine Kraft X am selben Punkte in gleicher Richtung und gleichem Sinne hinzu, und auch in O fügen wir eine zweite gleiche Kraft X'' hinzu, in gleicher Richtung und gleichem Sinne. Statt des früheren Paares XL, OX'' an der Linie OL , wo an jedem Punkte eine X wirkt, haben wir

jetzt ein Kräftepaar, wirkend an der halb so großen Linie NO , wo aber an jedem Punkte $2X$ angreifen, welches Paar daher, in Anbetracht, dass der Hebelarm auf die Hälfte gebracht wurde, das frühere Paar vollständig ersetzt.

Schließlich kann die Kraft $2X$ in N zerlegt und die eine X nach A , die andere nach B , beiden Endpunkten der Diagonale AB , parallel verschoben werden. Dabei denken wir uns alle diese Punkte mit dem Systeme invariable verbunden.

§ 60. Durch diese Umwandlungen haben wir den Zustand des Systems nicht geändert und Folgendes erzielt.

Statt der Kraft X an K haben wir 1. eine Kraft OX' an O ,
2. ein Kräftepaar XX'' an der Linie OB in der Ebene xy ,
3. ein Kräftepaar XX'' an der Linie OA in der Ebene der xz .

Das Moment des Kräftepaares in der Ebene der xy ist gleich $-Xy$. Denn der Hebelarm OB ist gleich y , und geben wir ihm das Vorzeichen $-$, weil, wie aus der Figur zu ersehen, ein Beobachter in der Mitte des Hebelarmes OB die Ebene des Paares von rechts nach links sich drehen sehen würde. Das zweite Paar in der Ebene der xz ist gleich Xz , weil der Hebelarm gleich z ist, und die Drehung, wie wir sie angenommen, für den Beobachter von der Linken zur Rechten geht.

Die anderen beiden Componenten der Kraft P , nämlich Y , Z können in derselben Weise transformiert werden, und würde die Kraft Y eine Kraft Y an O parallel in der Richtung Oy , ferner zwei Paare mit den Momenten Yx in der Ebene der xy und $-Yz$ in der Ebene yz , die Kraft Z ebenfalls eine Kraft Z an O , in der Richtung Oz und zwei Paare mit den Momenten $-xZ$ in der Ebene xz und yZ in der Ebene yz ergeben.

§ 61. In dieser Weise kann jede der Kräfte des Systems P , P' , P'' ... ersetzt werden.

1. Durch die ursprünglichen Componenten in K , X , Y , Z versetzt nach O , nach den Richtungen der drei Achsen Ox , Oy , Oz wirkend und nebstdem

2. durch sechs Paare, von welchen zwei Paare in der Ebene xy liegen, mit den Momenten $Yx - Xy$, deren Achsen der Achse Oz parallel sind, und daher in ein einziges Moment zusammengezogen werden können, zwei Paare in der Ebene der yz mit den Momenten $Zy - Yz$, deren Achsen der Achse Ox parallel sind und schließlich zwei Paare in der Ebene der xz mit den Momenten $Xz - Zx$,

deren Achsen der Oy parallel sind und auch hier je zwei Paare auf ein Paar reducirt werden können.

Bei den anderen Kräften werden wir ähnliche Ausdrücke bekommen, X' , Y' , Z' und auch die Momente in dieser Weise.

Nehmen wir also diese Operation bei allen Kräften vor, legen alle Componenten in einer Richtung zu einer Componente zusammen, wobei einigen Componenten das Vorzeichen $+$, anderen das Vorzeichen $-$ zukommen wird, welche Vorzeichen, wie wir wissen, aus den Cosinus der Winkel entnommen werden, welche die Kräfte mit den Achsen einschließen und verstehen wir unter Summe die algebraische Summe der Componenten, so erhalten wir die Kräfte decomponiert in drei Kräfte und drei Paare.

$$2. \quad \begin{cases} X + X' + X'' + \dots = \Sigma X \\ Y + Y' + Y'' + \dots = \Sigma Y \\ Z + Z' + Z'' + \dots = \Sigma Z \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} Zy - Yz + Z'y' - Y'z' + \dots = \Sigma (Zy - Yz) = L \\ Xz - Zx + X'z' - Z'x' + \dots = \Sigma (Xz - Zx) = M \\ Yx - Xy + Y'x' - X'y' + \dots = \Sigma (Yx - Xy) = N, \end{cases}$$

wo wir nämlich die resultierenden Paare in den drei Ebenen der zy , xz , xy mit den Buchstaben L , M , N bezeichnet haben.

Neuntes Capitel.

Gleichgewicht von an einem soliden Körper oder Punktsystem angreifenden Kräften.

§ 62. Aus den vorgenommenen Reductionen ergeben sich nachstehende Folgerungen.

Ein Kräftepaar P , P' und eine Kraft S , diese möge einer der Kräfte des Paares gleich oder davon verschieden sein, und mögen die Richtungen der Kräfte wie immer beschaffen sein, können nicht zusammen Gleichgewicht bringen, was schon früher hervorgehoben wurde. Denn man kann das Paar parallel verschieben, eine Kraft desselben mit S zusammensetzen und wir bekommen zwei ungleiche Kräfte, die sich unmöglich Gleichgewicht machen können.

Auch können die nach einer Achse wirkenden Kräfte unmöglich mit Kräften im Gleichgewichte sein, die nach der Richtung einer zweiten Coordinatenachse wirken, was sich von selbst versteht, da zum Gleichgewichte erforderlich ist, dass die einen Kräfte den anderen direct entgegengesetzt angreifen.

Ebensowenig können Paare, deren Achsen nicht parallel sind, im Gleichgewichte sein.

§ 63. Damit also Kräfte an einem Punktsystem sich Gleichgewicht machen, müssen die parallel an einen Punkt, nach der Richtung einer jeden Coordinatenachse verschobenen Componenten für sich gleich Null, und eben so jede der in den verschiedenen Coordinatenebenen liegenden resultierenden Paare für sich gleich Null sein.

Damit also alle Kräfte sich Gleichgewicht machen, müssen folgende sechs Gleichungen stattfinden:

$$1. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \Sigma X = 0 \\ 2. \Sigma Y = 0 \\ 3. \Sigma Z = 0 \\ 4. \Sigma (Zy - Yz) = L = 0 \\ 5. \Sigma (Xz - Zx) = M = 0 \\ 6. \Sigma (Yx - Xy) = N = 0. \end{array} \right.$$

Diese sechs Gleichungen sind nothwendig und hinreichend, damit ein System von Kräften, welches an einem freien soliden Körper oder an einem System von invariable miteinander verbundenen Punkten angreift, sich Gleichgewicht mache.

Dabei drücken die Bedingungen 1, 2, 3 aus, dass der Körper nicht fortgeschoben werde, indem die Kräfte der Translation nach irgend einer Richtung gleich Null sind, $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$.

Die Bedingungen 4, 5, 6 drücken aus, dass auch keine Drehung des Körpers statfinde, indem die Kräftepaare, also die Rotationskräfte in jeder Ebene gleich Null sind, $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$.

§ 64. Dass in der That 6 Bedingungsgleichungen zum Gleichgewichte nothwendig und hinreichend sind, kann man aber auch a priori einsehen.

Es sei die Anzahl der Punkte im soliden Körper, an welchen die Kräfte angreifen, gleich n . Um nun die Solidität des Punktsystems auszudrücken, werden wir andeuten, dass die Punkte miteinander durch starre Linien invariable verbunden sind, dass daher die Distanzen zwischen denselben invariable sind.

Zu diesem Ende werden wir drei Punkte A, B, C hervorheben, sie miteinander durch starre Linien verbinden, und daraus bekommen wir drei Gleichungen, indem wir ausdrücken, dass die Distanzen constant bleiben. Die restierenden $n-3$ Punkte werden wir mit jedem

der bereits fixierten drei Punkte ebenfalls durch starre Linien verbinden und die Invariabilität der Distanzen von jenen drei Punkten durch Gleichungen ausdrücken, und dies in der Anzahl $3(n-3) = 3n-9$. Die Anzahl der zur Festsetzung der Invariabilität der wechselseitigen Distanzen zwischen den Punkten, um auszudrücken, dass das System solid sei, vorhandenen Gleichungen beträgt demnach $3n-9 + 3 = 3n-6$.

Da aber, um die $3n$ -Coordinationen der n -Punkte des Systems zu bestimmen, $3n$ -Gleichungen erforderlich sind, erscheinen noch sechs Bedingungen nothwendig und hinreichend, um sämtliche $3n$ -Coordinationen der n -Punkte zu bestimmen, und auszudrücken, dass alle Punkte des Systems fix sind. Zum Gleichgewichte sind also sechs Bedingungen nothwendig und hinreichend.

Sind nicht alle Punkte invariable miteinander verbunden, müssen im Zustande des Gleichgewichtes auch diese sechs Gleichungen verificiert sein. Nur sind sie nicht hinreichend und müssen noch andere Gleichungen hinzutreten, wie wir weiter sehen werden. Andererseits kann, nach der Natur des Problems oder wenn der Körper nicht vollkommen frei ist, wie wir bald sehen werden, eine oder die andere der Gleichungen, als bereits von selbst erfüllt, entfallen.

§ 65. Sind sämtliche Kräfte einer Geraden und einander parallel, so wählen wir jene Gerade zu einer Achse, sei es der z -Achse. Dadurch fallen nach den Achsen der Ox und der Oy gar keine Componenten. Alle X und Y entfallen von selbst, da jede gleich Null ist. Jede Z ist gleich der entsprechenden P , da die Projectionen der Kräfte auf die parallele Achse Oz den Kräften gleich sind.

Von obigen Gleichungen entfallen demnach ΣX , ΣY und N von selbst. $\Sigma Z = \Sigma P$, L wird gleich $\Sigma Zy = \Sigma Py$. M wird gleich $\Sigma -Zx = \Sigma -Px$ und die Gleichungen des Gleichgewichtes reducieren sich auf drei:

$$2. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \Sigma P = 0 \\ 2. \Sigma Py = 0 \\ 3. \Sigma Px = 0. \end{array} \right.$$

Dieselben Gleichungen haben wir bereits § 42 in anderer Weise gefunden und man drückt sie in Worten aus: Zum Gleichgewichte paralleler Kräfte ist es nothwendig und hinreichend, dass die algebraische Summe der Kräfte gleich Null ist und

auch die algebraische Summe der Paare oder, was auf dasselbe hinauskommt, die algebraische Summe ihrer Momente in Beziehung auf zwei sich schneidende, zur Richtung der Kräfte parallele Ebenen gleich Null ist.

Die erste Bedingung ist nöthig, damit keine Translation stattfinde, die zwei anderen Gleichungen, damit auch keine Rotation erzeugt werde, und alsdann ist das ganze System im Gleichgewichte.

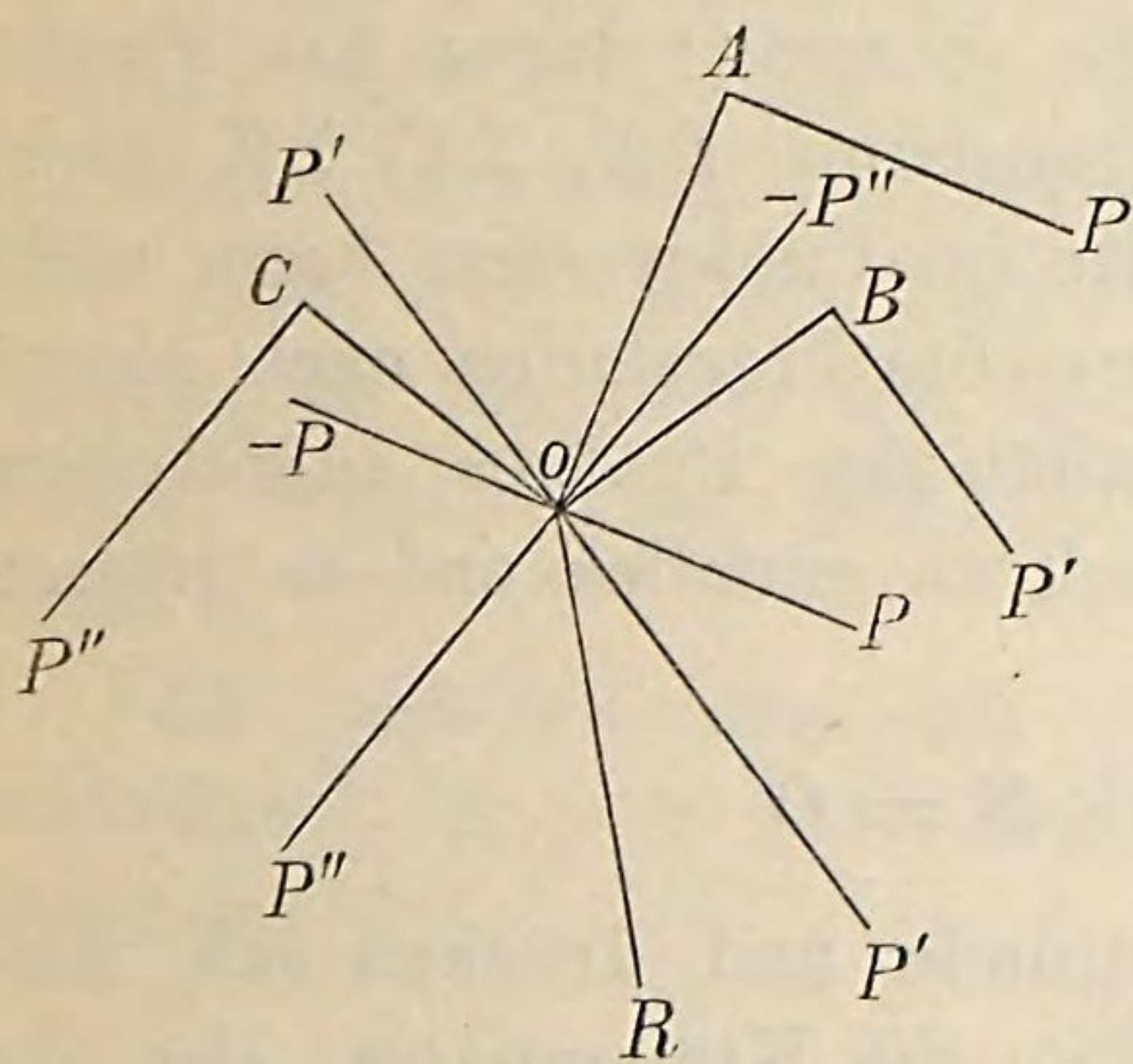
§ 66. Befinden sich alle Kräfte in einer Ebene, nehmen wir sie für die Ebene der xy , und so entfallen alle Z und auch die z -Achse, mithin alle Coordinaten z , und die Gleichungen reducieren sich auf folgende

$$3. \quad \begin{cases} 1. \Sigma X = 0 \\ 2. \Sigma Y = 0 \\ 3. \Sigma (Yx - Xy) = 0, \end{cases}$$

als nothwendige und hinreichende Bedingungen des Gleichgewichtes.

§ 67. Kehren wir zur Reduction der Kräfte nach § 54 zurück und setzen wir voraus, wie im letzten Falle, dass sich alle Kräfte

Fig. 20.



in einer Ebene befinden, die wir für die Ebene der xy nehmen. Nennen wir die Kräfte P, P', P'' , die wir nach einem Punkte O in der Ebene verlegen und die auf die Kräfte gefällten senkrechten Strecken $OA, OB, OC, p, p', p'' \dots$, und betrachten wir A, B, C als die Angriffspunkte der Kräfte. Aus der Versetzung der Kräfte nach O haben wir alle Kräfte in O wirkend gleich R , ferner Kräfte-

paare, wirkend an dem Hebelarm $OA = p$, an dem Hebelarm $OB = p'$, an dem Hebelarm $OC = p''$ und so fort, welche durch die Größen $Pp, P'p', P''p'' \dots$ vorgestellt werden. Alle diese Paare, von welchen einige ihre Ebene in einem Sinne, die anderen in entgegengesetztem Sinne drehen, setzten sich zu einem Resultantenpaare zusammen, das wir mit G bezeichnen, wobei die Achsen der in einer Ebene liegenden Paare parallel sind.

Wir haben also die Gleichung

$$G = Pp + P'p' + P''p'' + \dots$$

wo wir unter Summe die algebraische Summe verstehen, dabei können $P, P' \dots$ positiv oder negativ sein, je nachdem sie in einem oder entgegengesetztem Sinne wirken, und auch p, p' positiv oder negativ sein, je nachdem sie in Beziehung auf O in der einen oder entgegengesetzten Seite liegen und darnach hat man das Vorzeichen der Producte $Pp, P'p' \dots$.

Das Resultantenpaar ist also gleich der Summe der Momente aller Kräfte in Bezug auf den Punkt O .

Das Resultantenpaar $\Sigma (Yx - Xy)$ ist also auch gleich ΣPp , und man hat für den Fall des Gleichgewichtes, statt der dritten der Gleichungen 3, die Gleichung

$$\Sigma (Yx - Xy) = \Sigma Pp = 0.$$

Das Product Pp einer Kraft multipliciert mit der von irgend einem Punkte auf die Kraft gefällten Senkrechten, nennt man das Moment der Kraft in Beziehung auf diesen Punkt, was wir bereits früher bemerkt. Beim Gleichgewichte muss also auch die Summe der Momente aller Kräfte, bezogen auf irgend einen Punkt der Ebene, wo die Kräfte wirken, gleich Null sein.

§ 68. Findet sich im Punktsystem ein fixer Punkt, so nehmen wir ihn zum Coordinatenursprunge. Es sei also O dieser fixe Punkt, alsdann brauchen die Kräfte der Translation $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ nicht mehr gleich Null sein, der Körper oder das Punktsystem kann nicht fortgeschoben werden und jede angestrebte Translation nach irgend einer Richtung wird durch die Fixität des Punktes aufgehoben. Diese drei Gleichungen haben demnach zu entfallen und es müssen nur die drei Gleichungen

$$L = 0, M = 0, N = 0$$

erfüllt sein, damit Gleichgewicht stattfinde und drücken aus, dass auch keine Drehung stattfinde, indem die Kräftepaare, also die Rotationskräfte in jeder Ebene gleich Null sind.

Man kann die Fixität des Punktes durch eine unbekannte Kraft ersetzen und den Körper als völlig frei betrachten. Lassen wir nun das Coordinatensystem durch den fixen Punkt als Ursprung gehen und bezeichnen die Componenten dieser unbekannten Kraft, dieser Reaction des fixen Punktes, welche s heißen möge und die durch den Coordinatenursprung geht, nach den Achsen mit s', s'', s''' . Alsdann werden wir für das Gleichgewicht des nunmehr ganz freien Körpers die Gleichungen haben

$$4. \quad \begin{cases} \Sigma X + s' = 0 \\ \Sigma Y + s'' = 0 \\ \Sigma Z + s''' = 0, \end{cases}$$

dann wie früher

$$5. \quad \begin{cases} L = 0 \\ M = 0 \\ N = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen 5 bleiben ungeändert und bekommen durch die eingeführte neue Kraft s keinen neuen Ausdruck, weil sie die durch den Coordinatenursprung gehende Kraft der Reaction s nicht enthalten können.

Aus den ersten drei Gleichungen hat man die Werte von s' , s'' , s''' und die letzten drei Gleichungen sind Gleichgewichtsbedingungen.

Die Gleichungen 4 zeigen, dass die Reaction (s' , s'' , s''') der Resultante (X , Y , Z) gleich und direct entgegengesetzt ist.

§ 69. Finden sich zwei fixe Punkte im Systeme, also eine fixe Achse, so wählen wir sie zu einer Coordinatenachse, es sei der z -Achse. Die Translationskräfte brauchen nicht gleich Null zu sein und entfallen. Die Kräftepaare in der yz und der xz brauchen ebenfalls nicht gleich Null zu sein, sie werden, ihre Intensität möge wie immer beschaffen sein, durch die Fixität der Achse Oz zerstört. Dies sieht man schon daraus, da wir die Kräftepaare drehen können, der Art, dass die beiden Kräfte, welche jedes der Paare bilden, senkrecht zur fixen Achse sind, wo dann diese die Kräfte zerstört.

Es entfallen demnach von den Gleichungen des Gleichgewichtes 1, 2, 3, 4, 5 als hier nicht nöthig und verbleibt bloß die Gleichung 6

$$N = 0,$$

welche erfüllt sein muss, damit Gleichgewicht statffinde und nicht von den Kräftepaaren in der Ebene der xy eine Drehung um die Achse Oz erzeugt werde.

Könnte der Körper längs der Achse gleiten, so gehört zum Gleichgewichte noch die Bedingung

$$Z = 0$$

und müssen demnach, damit Gleichgewicht statffinde, zwei Gleichungen erfüllt sein

$$\Sigma Z = 0, N = 0.$$

§ 70. Man kann auch hier statt der fixen Achse, die man als nicht vorhanden betrachtet, zwei unbekannte Kräfte, die Reaction der Achse einführen.

Nimmt man auf der Achse, die wir für die z-Achse nehmen, zwei Punkte, den einen zum Ursprunge, dessen Coordinaten mithin $x = 0, y = 0, z = 0$ sind, den anderen in der Höhe $= h$, dessen Coordinaten also $x = 0, y = 0, z = h$ sind, bringt daran die beiden Kräfte an, die wir mit s und s_1 und deren Componenten wir mit s', s'', s''' und s'_1, s''_1, s'''_1 bezeichnen, so haben wir als Gleichungen des Gleichgewichtes des nunmehr ganz freien Körpers

$$\Sigma X + s' + s'_1 = 0$$

$$\Sigma Y + s'' + s''_1 = 0$$

$$\Sigma Z + s''' + s'''_1 = 0$$

$$L - s''_1 h = 0$$

$$M + s'_1 h = 0$$

$$N = 0.$$

Die letzte Gleichung ist die einzige Bedingungsgleichung $N = 0$. Aus den übrigen fünf Gleichungen findet man die Werte von $s', s'', s''', s'_1, s''_1, s'''_1$, als $s'_1 = -\frac{M}{h}$ u. s. w.

Die dritte Gleichung gibt $s''' + s'''_1 = -\Sigma Z$, also bloß die Summe beider Größen $s''' + s'''_1$, was sein muss, denn diese beiden, in derselben Richtung wirkenden Kräfte könnte man am Ursprunge anbringen. Würde man statt zwei Punkte drei Punkte fixieren, so hat man immer nur fünf Gleichungen zur Bestimmung von neun Componenten, so dass die Vertheilung der Reaction nicht bestimmt ist und willkürlich gemacht werden kann. In der Natur ist alles bestimmt und hängt die Vertheilung der Drucke von der Vertheilung der inneren Kräfte ab. Um also die Größen s''', s'''_1 zu bestimmen, müsste man die Art der Vertheilung der inneren Kräfte kennen, was aber die Kräfte der Analysis übersteigt. Nur durch die Erfahrung können wir die Vertheilung der inneren Kräfte eines Körpers wissen und daher kann jede der Größen s'', s'''_1 nicht abgesondert bestimmt sein.

§ 71. Stützt sich ein Körper mit einer beliebigen Anzahl von Punkten auf einer Ebene, so nehmen wir diese zur Coordinatenebene der xy , wo also jede Componente nach der z-Achse durch den Widerstand der Ebene xy aufgehoben wird. Die Componente nach der z-Achse braucht demnach nicht gleich Null zu sein, und haben deshalb die Gleichungen ΣZ wie auch L, M zu entfallen,

da die der z-Achse parallelen Kräfte keine Wirkung ausüben, so dass bloß die Gleichungen verbleiben

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, N = 0,$$

welche erfüllt sein müssen, wenn Gleichgewicht stattfinden soll.

§ 72. Man kann auch hier die normale Reaction der Ebene als Kraft einführen und den Körper als völlig frei betrachten. Bezeichnen wir sie mit s' , so hat man, wenn man den Stützpunkt zum Ursprunge nimmt, indem nur die eine Gleichung bezüglich ΣZ geändert wird, die anderen fünf Gleichungen aber offenbar ungeändert bleiben, statt der dritten der Gleichungen 1, die Gleichung

$$\Sigma Z + s' = 0,$$

woraus sich der Wert dieser normalen Kraft ergibt. Dies ist für den Fall, wo der Körper sich mit einem Punkte auf die Ebene stützt, den wir zum Ursprunge genommen und also für ihn $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ sind.

Stützt sich der Körper mit zwei Punkten, so kann man zwei normale Reaktionskräfte s' , s'_1 einführen. Bezeichnet man die Coordinaten dieser Punkte mit x , y , x' , y' , so hat man

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0, \Sigma Y = 0, \Sigma Z + s' + s'_1 = 0 \\ L + s'y + s'_1 y' &= 0, M - s'x - s'_1 x' = 0, N = 0, \end{aligned}$$

Hier kann man die normalen Reaktionskräfte aus der dritten und vierten Gleichung bestimmen, die anderen vier Gleichungen sind die des Gleichgewichtes.

Stützt sich der Körper mit drei Punkten, so kann man in eben angegebener Weise die Reaktionskräfte berechnen. Stützt sich aber der Körper mit mehr als drei Punkten, so hat man zur Berechnung der Drucke immer nur drei Gleichungen, während die anderen drei Gleichungen

$$\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0, N = 0$$

die des Gleichgewichtes sind. Die Vertheilung der Drucke erscheint also hier unbestimmt. Man kommt also hier wieder auf einen analogen Fall, wie bei der fixen Achse, und greift auch hier die frühere Bemerkung Platz. In der Natur ist in jedem besonderen Fall der Druck an jedem Stützpunkt bestimmt.

§ 73. Die Gleichungen des Gleichgewichtes können auch in einer anderen Form ausgedrückt werden, wenn man statt X , Y , Z , X' ... die Kräfte P , P' , P'' ... und die Winkel α , β , γ , α' , β' , γ' ... einführt, welche die Richtungen der Kräfte mit den Achsen

einschließen. Man hat alsdann jene Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes in folgender Form:

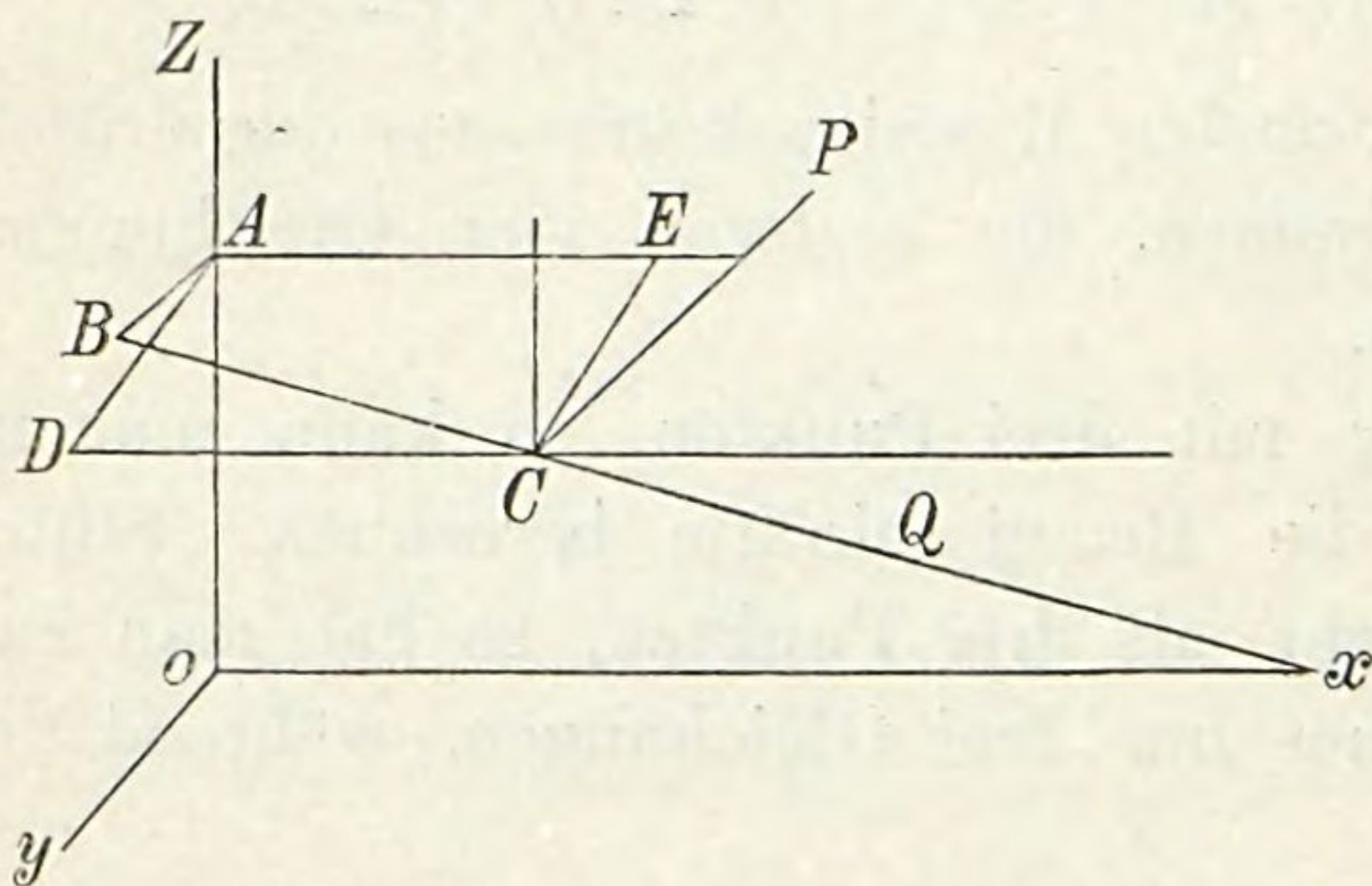
$$6. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \Sigma P \cos \alpha = 0 \\ 2. \Sigma P \cos \beta = 0 \\ 3. \Sigma P \cos \gamma = 0 \\ 4. \Sigma P (y \cos \gamma - z \cos \beta) = L = 0 \\ 5. \Sigma P (z \cos \alpha - x \cos \gamma) = M = 0 \\ 6. \Sigma P (x \cos \beta - y \cos \alpha) = N = 0. \end{array} \right.$$

§ 74. Man nennt das Moment einer Kraft in Beziehung auf eine Gerade, das Product der Projection dieser Kraft auf eine Ebene, welche auf jener Geraden senkrecht steht, multipliciert mit der kürzesten Distanz dieser Projection von jener Geraden.

Die Größen L , M , N stellen nun die Momente aller an einem Körper angreifenden Kräfte in Beziehung auf die drei Coordinatenachsen Ox , Oy , Oz vor.

Um dieses klar einzusehen, wollen wir jede der Kräfte, also die Kraft P in zwei Componenten zerlegen, die eine parallel der

Fig. 21.



Oz und die andere Q in einer der Ebene der xy parallelen Ebene, mithin in einer auf der Oz senkrechten Ebene $ADCE$ liegend. Die Kraft Q wird demnach die Resultante der beiden Componenten X und Y sein, die wir bei der früheren Zerlegung in drei Componenten hatten.

Die Kraft Q wird irgend eine Richtung QCB in der zur Ebene xy parallelen Ebene haben, fällen wir von A , wo die Ebene $ADCE$ die Oz schneidet, eine Senkrechte AB auf die Componente Q , so wird AB die kürzeste Distanz der Achse Oz von der Componente Q sein, die wir q nennen. AB wird aber auch die kürzeste Distanz der Achse Oz von der Richtung der Kraft P sein, weil P in der Ebene der PCQ liegt und Oz parallel zu dieser Ebene ist.

Das Moment der in der Ebene $ADCE$ liegenden Kraft Q in Beziehung auf die Oz ist gleich Qq , also gleich den Momenten

der Componenten X und Y , welche in derselben Ebene liegen in Beziehung auf die Oz , und respective auf den Punkt A . Da nun Q die Resultante von X und Y ist, so hat man

$$Qq = Yx - Xy.$$

In dieser Weise können wir die anderen Kräfte P' , $P'' \dots$ zerlegen, und wir erhalten ähnliche Ausdrücke.

Auch können wir ähnliche Zerlegungen aller Kräfte bezüglich der anderen beiden Achsen vornehmen.

Wir bekommen alsdann, wenn wir die Componenten der anderen Kräfte in der Ebene der xy mit Q' , Q'' , $Q''' \dots$, die Distanzen von der Oz mit q' , q'' , $q''' \dots$, ferner die nach den anderen Achsen zerlegten Componenten mit Q , Q' , $Q'' \dots$, Q , Q' , Q'' , und die respectiven Distanzen mit q , q' , $q'' \dots$, q , q' , $q'' \dots$ bezeichnen.

$$L = \Sigma (Zy - Yz) = Q''q'' + Q'''q''' + \dots = \Sigma Q''q''$$

$$M = \Sigma (Xz - Yz) = Qq + Q'q' + \dots = \Sigma Qq$$

$$N = \Sigma (Yx - Xy) = Qq + Q'q' + \dots = \Sigma Qq.$$

Im Falle des Gleichgewichtes sind die Summen aller Momente gleich Null, also

$$\Sigma Q''q'' = 0$$

$$\Sigma Qq = 0$$

$$\Sigma Qq = 0.$$

Im Falle des Gleichgewichtes muss demnach die algebraische Summe der Momente aller an einem Körperpaar angreifenden Kräfte in Beziehung auf drei durch denselben Punkt geführten rechtwinkligen Achsen gleich Null sein.

§ 75. Andererseits repräsentieren die Größen L , M , N die in den respectiven Ebenen der yz , xz und xy liegenden Paare, in jeder Ebene zu einem Paare vereinigt, deren Größen durch ihre Achse vorgestellt werden, und kann das lineäre Moment der Paare in der yz -Ebene auf der x -Achse, welche auf dieser Ebene senkrecht steht, der Paare in der Ebene xz auf der y -Achse und der Paare in der Ebene xy auf der z -Achse genommen werden.

Wir wissen ferner, dass man Kräftepaare, deren Achsen beliebige Richtungen und Größen haben, in der Weise zusammensetzt, dass man die Achsen nach einem gemeinschaftlichen Punkte zusammenschiebt und sie wie Kräfte zusammensetzt.

Nehmen wir also ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, verlegen, wie in Figur 18, alle Kräfte parallel zu sich selbst an einen

beliebig im Körper genommenen Angriffspunkt O, den wir zum Ursprung nehmen. So kann man aus den Größen L, M, N, Größe und Lage des resultierenden Paares aller Kräfte und respective dessen Achse bestimmen.

Bezeichnet man nämlich das resultierende Paar und respective dessen Achse mit G und die Winkel, welche diese mit den Coordinatenachsen einschließt, mit λ , μ , ν , so hat man

$$7. \quad \begin{cases} G^2 = L^2 + M^2 + N^2 \\ \cos \lambda = \frac{L}{G}, \quad \cos \mu = \frac{M}{G}, \quad \cos \nu = \frac{N}{G}. \end{cases}$$

§ 76. Im Falle kein Gleichgewicht vorhanden ist, entsteht die Frage, ob diese Kräfte eine einzige Kraft zur Resultante haben.

Dieses ergibt sich aus folgender Überlegung. Geben alle Kräfte eine Resultante, so müsste durch Hinzufügung einer gleichen und direct entgegengesetzten Kraft Gleichgewicht werden. Andererseits kann jedes Kräftensystem auf eine Kraft R und ein Kräftepaar s, s' reducirt werden. Damit also durch Hinzufügung einer Kraft Gleichgewicht werden, könnte dies nur in der Weise geschehen, dass 1. die hinzuzufügende Kraft mit der Einzelkraft ein dem Paare gleiches und entgegengesetztes Paar bilden, 2. diese zwei Paare sich so zusammensetzen, dass sie sich ganz zerstören.

Damit aber diese Bedingungen erfüllt werden, müssen beide Paare in parallelen Ebenen liegen, sonst könnte eine wechselseitige Zerstörung nicht herbeigeführt werden und vielmehr würden zwei Paare, deren Ebenen einen Winkel bilden, sich zu einem neuen Resultantenpaare zusammensetzen.

Liegen aber die beiden Paare in paralleler Ebene, so muss auch die Einzelkraft mit dem Paare, auf welche das System reducirt wurde, in parallelen Ebenen liegen.

Mit anderen Worten: Damit ein Kräftensystem eine Resultante habe, ist es nothwendig, dass, wenn man die Kräfte auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar reducirt, die Einzelkraft parallel sei zur Ebene des resultierenden Kräftepaares und nicht verschwinden.

Ist aber die Einzelkraft parallel zur Ebene des Paares, so steht sie senkrecht auf der Achse des Paares.

Diese nothwendige Bedingung ist aber auch hinreichend, damit das Kräftensystem sich auf eine einzelne Kraft reducire.

Ist nämlich die Bedingung erfüllt, dass die Einzelkraft parallel zur Ebene des Paares ist, alsdann kann man immer in der parallelen

Ebene zu der Einzelkraft eine direct entgegengesetzte Kraft R' in der Art hinzufügen, dass das Paar $R-R'$ jenem Paare $s,-s$, welches aus der Reduction der Kräfte entstanden, gleich und entgegengesetzt sei und jenes Paar vollkommen zerstöre.

Indem also R' dem Paare und der Kraft Gleichgewicht mache, wird eine der Kraft R' gleiche und direct entgegengesetzte Kraft die Resultante des Systems sein.

§ 77. Diese Bedingung kann analytisch ausgedrückt werden.

Die Resultante aller Kräfte bildet mit den Coordinatenachsen Winkel, deren Cosinus ausgedrückt werden

$$\cos a = \frac{X}{R}$$

$$\cos b = \frac{Y}{R}$$

$$\cos c = \frac{Z}{R}$$

Die Cosinus der Winkel ferner, welche das aus den Paaren oder deren Achsen zusammengesetzte Resultantenpaar und respective dessen Achse mit den Coordinatenachsen bildet, sind, wie wir aus früherem wissen, wenn man das Resultantenpaar mit G , und die Winkel mit λ , μ , ν bezeichnet,

$$\cos \lambda = \frac{L}{G}$$

$$\cos \mu = \frac{M}{G}$$

$$\cos \nu = \frac{N}{G}$$

Der Cosinus des Winkels demnach zwischen der Einzelkraft und dem Paare ist

$$\cos R'G = \frac{X}{R} \cdot \frac{L}{G} + \frac{Y}{R} \cdot \frac{M}{G} + \frac{Z}{R} \cdot \frac{N}{G}.$$

Nun steht aber, im Falle das Kräftensystem eine Resultante hat, die Einzelkraft senkrecht auf der Paarachse, und alsdann muss dieser Cosinus $= 0$ sein. Wir bekommen daher als Bedingungsgleichung, dass die Kräfte eine Resultante haben, indem man den gemeinsamen Nenner weglässt

$$8. \quad XL + YM + ZN = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, alsdann steht die Einzelkraft auf der Paarachse senkrecht, und ist also mit der Paarebene parallel, mithin das Kräftensystem nothwendig eine Resultante hat.

Verschwundet bei der Reduction der Kräfte die Einzelkraft, so bleibt nur das Resultantenpaar. Die Kräfte reducieren sich demnach auf ein Paar und haben keine Resultante.

§ 78. Wenn die Bedingung

$$XL + YM + ZN = 0$$

nicht erfüllt ist, so haben die Kräfte keine Resultante und lässt sich das ganze System, wie wir wissen, immer auf zwei nicht in einer Ebene liegende Kräfte oder auf ein Kräftepaar und eine Einzelkraft reducieren, welche nicht in einer zum Paare parallelen Ebene liegt.

Machen sich Kräfte, die in einer Ebene liegen und nicht verschwinden, nicht Gleichgewicht, so hat man die Gleichungen

$$\Sigma X = A, \quad \Sigma Y = B, \quad \Sigma (Yx - Xy) = N.$$

Wie wir oben gesehen, kann die letzte Gleichung in anderer Form gegeben werden; sobald man die Momente der Kräfte in Beziehung auf den Coordinatenursprung nimmt.

Ist nämlich R die Resultante, Rr ihr Moment, wenn nämlich r ihren Hebelarm bedeutet, so ist das Moment der entgegengesetzten Kraft $-Rr$, und daher beim Gleichgewichte

$$-Rr + \Sigma Pp = 0,$$

daher hat man

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \dots = \Sigma Pp,$$

und drückt diese Gleichung aus, dass das Moment der Resultante gleich ist der algebraischen Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf jeden Punkt in dieser Ebene.

Zehntes Capitel.

Von den Momenten der Kräfte in Bezug auf verschiedene Achsen.

§ 79. Wir wollen aus der Theorie der Momente, von welcher früher die ganze Lehre vom Gleichgewichte hergeleitet wurde, einige Sätze anführen und dabei einige Definitionen aus dem früheren zur besseren Klarheit zusammenstellen.

Errichten wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit dem Ursprunge in O. Die Kraft nach Richtung und Größe durch AB vorgestellt, liege in einer durch den Ursprung O gehende Ebene AOB, auf der wir in O eine Senkrechte Oz' errichten, und fällen von O auf AB die Senkrechte Oc, welche die AB in c trifft. Die Kraft AB nennen wir P, die Senkrechte Oc p.

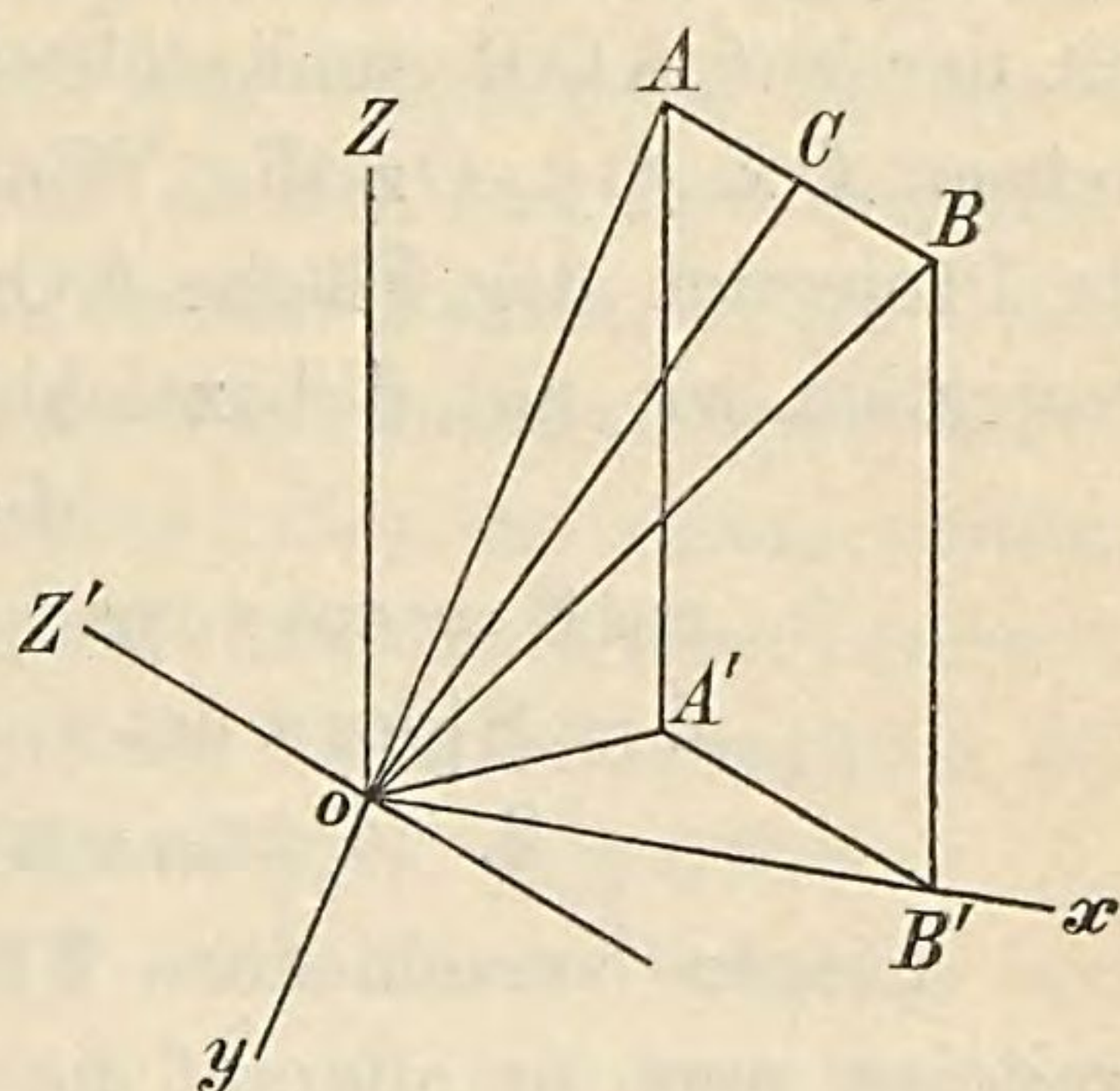
Das Product $AB \cdot OC = Pp$ wird sein

1. das Moment der Kraft P in Beziehung auf die Gerade Oz' und rücksichtlich des Punktes O , weil Oc die kürzeste Distanz der Kraft von Oz' ist.

2. Wenn wir uns am Punkte O eine zweite, der Kraft P gleiche Kraft P' in entgegengesetztem Sinne angebracht denken, auch das Moment des Kräftepaars $P, -P'$, wenn wir uns nämlich Oc als Hebelarm denken, an dessen beiden Endpunkten O und C die beiden Kräfte $P, -P'$ in auf dem Hebelarme p senkrechten Richtungen angreifen.

3. Wenn wir auf der Oz' eine Strecke gleich dem Producte Pp abmessen, auch das lineäre Moment oder die Achse des Kräftepaars $P, -P'$ vorstellen.

Fig. 22.



§ 80. Projicieren wir die Kraft AB auf die Ebene der xy , nennen die Projection $A'B'$ die Kraft Q , fällen auf diese vom Ursprunge die Senkrechte OC' , die wir mit q bezeichnen, so wird das Product $A'B' \cdot OC' = Qq$, das Moment der Kraft P in Beziehung auf die Gerade Oz sein. Man versteht nämlich darunter, wie wir wissen, das Product der Projection der Kraft P auf eine Ebene, welche auf der Oz senkrecht steht, also hier auf die Ebene der xy , multipliciert mit der kürzesten Distanz der Projection von der Geraden Oz , rücksichtlich vom Punkte O . Das Moment der Kraft P in Beziehung auf die Gerade Oz hat demnach den Ausdruck Qq .

Bringen wir an OC' am Punkte O eine der Kraft Q gleiche Kraft Q' in entgegengesetztem Sinne an, so wird Qq auch das Moment des Kräftepaars $Q, -Q'$, das ist Q, OC' , vorstellen, indem beide Kräfte gleichsam am Hebelarm OC' wirken. Wird auf Oz eine diesem Producte Qq gleiche Strecke genommen, so wird diese das lineäre Moment des Paares $Q, -Q'$ vorstellen.

§ 81. Das Product $AB \cdot OC = Pp$ repräsentiert aber auch eine gewisse Fläche, nämlich das Doppelte des Dreieckes AOB , welche Fläche des Dreieckes wir mit S bezeichnen. Die drei Projectionen dieser Fläche auf die Coordinatenebenen xy, xz, yz werden der Reihe nach sein, wenn wir sie mit c, b, a , die Winkel aber,

welche die Ebene AOB mit den Coordinatenebenen bilden, und eigentlich die Winkel der Oz' mit den Achsen Oz , Oy , Ox mit γ , β , α bezeichnen

$$1. \quad c = S \cos \gamma, \quad b = S \cos \beta, \quad a = S \cos \alpha.$$

Die Projectionen a , b , c werden als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem die Winkel α , β , γ spitz oder stumpf sind.

Denken wir uns eine andere Ebene, die mit der Fläche AOB , und respective eine auf dieser anderen Ebene errichtete Senkrechte mit der auf AOB senkrechten Oz' den Winkel Θ , und mit den Achsen Ox , Oy , Oz die Winkel φ , ψ , χ bildet, so wird man für die Projection der Fläche $AOB = S$ auf diese andere Ebene, welche Projection wir mit d bezeichnen, haben

$$d = S \cos \Theta$$

$$\cos \Theta = \cos \alpha \cos \varphi + \cos \beta \cos \psi + \cos \gamma \cos \chi$$

$$d = S [\cos \alpha \cos \varphi + \cos \beta \cos \psi + \cos \gamma \cos \chi]$$

$$2. \quad d = a \cos \varphi + b \cos \psi + c \cos \chi.$$

Liegen verschiedene Flächen S , S'' , ... in der Ebene AOB , projiciert man sie alle auf die Coordinatenebenen und dann auf eine andere Ebene, und nennt die Summe der Projectionen auf die Coordinatenebenen yz , xz , xy A , B , C , und auf die andere Ebene D , so hat man immer

$$3. \quad D = A \cos \varphi + B \cos \psi + C \cos \chi.$$

Dabei ist unter Summe immer die algebraische Summe zu verstehen.

Die Cosinus der Winkel sind durch die Gleichung liert

$$\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi + \cos^2 \chi = 1$$

Das alles ist aus der Analysis bekannt. Die Hälfte des Productes $AB \cdot OC = Pp$ haben wir gleich der Fläche S , und die Projection die Fläche auf die Ebene der xy , also die Dreiecksfläche

$A'OB'$ gleich der Hälfte des Productes $A'B' \cdot OC' = \frac{Qq}{2}$ gleich C gesetzt, und wir haben

$$C = S \cos \gamma = \frac{Qq}{2}.$$

Verschiebt man die Coordinatenebene xy und mithin die Fläche $A'OB'$ parallel zu sich selbst auf der Achse Oz , so ändert sich für dieselbe Kraft AB ihr Moment, da die Senkrechte Oc eine andere sein wird und auch der Winkel γ geändert sein wird. Aber das Product $S \cos \gamma$ bleibt ungeändert, da das Dreieck $A'OB'$ bloß parallel verschoben und $C = \frac{Oq}{2} = S \cos \gamma$ ungeändert geblieben.

§ 82. Wir hatten früher bei der Reduction der Kräfte die Gleichungen

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2$$

$$\cos \lambda = \frac{L}{G}, \quad \cos \mu = \frac{M}{G}, \quad \cos \nu = \frac{N}{G},$$

wo unter L, M, N die algebraischen Summen der Momente aller Kräfte in Beziehung auf die Coordinatenachsen verstanden werden, also die Summen der Producte der Projectionen dieser Kräfte auf die Coordinatenebenen multipliciert mit den respectiven kürzesten Distanzen zwischen den Projectionen der Kräfte und der betreffenden Achse. G ist die Achse des resultierenden Paares, λ, μ, ν sind die Winkel, welche diese Paarachse mit den Coordinatenachsen bildet.

§ 83. Wir wollen nun die Momente aller an einem soliden Körper angreifenden Kräfte bezüglich irgend einer durch den Ursprung O gehenden Geraden bestimmen, die mit den Coordinatenachsen die Winkel φ, ψ, χ einschließt, kurz die Gerade φ, ψ, χ genannt.

Stellen wir uns also eine Kraft P vor, deren Richtung mit den Achsen Ox, Oy, Oz die Winkel α, β, γ und mit jener Geraden (φ, ψ, χ) den Winkel ϑ einschließt, so haben wir die Projection dieser Kraft auf eine Ebene zu nehmen, welche auf jener Geraden senkrecht steht und diese Projection mit der kürzesten Distanz von jener Geraden, rücksichtlich vom Punkte O , die wir q nennen, zu multiplicieren und so das Moment der Kraft in Beziehung auf jene Gerade zu erhalten. Da die Kraft mit jener Geraden den Winkel ϑ einschließt, wird ihre Projection auf die Ebene, welche auf jener Geraden senkrecht steht, gleich sein $P \sin \vartheta$ und das Moment der Kraft P in Beziehung auf jene Gerade demnach gleich sein $P \sin \vartheta \cdot q$.

Es werden mithin die Momente aller Kräfte $P, P', P'' \dots$, wenn wir die Winkel, die sie mit jener Geraden einschließen, $\vartheta, \vartheta', \vartheta'' \dots$ und die kürzesten Distanzen der Projectionen von jener Geraden $q, q', q'' \dots$ nennen, in Beziehung auf jene Gerade, den Ausdruck haben

$$\Sigma P \sin \vartheta q.$$

Wie wir ferner gesehen, stellen L, M, N die Summe der Momente aller Kräfte in Beziehung auf die rechtwinkligen Achsen vor.

Projicieren wir ferner die Paarachse G auf jene Gerade und bildet sie mit derselben den Winkel Θ , so erhält man für die Projection, die wir G' nennen

$$G' = G \cos \Theta.$$

Es ist aber

$$\cos \Theta = \cos \lambda \cos \varphi + \cos \mu \cos \psi + \cos \nu \cos \chi$$

daher, wenn wir für $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ die erhaltenen Werte setzen,

$$\cos \Theta = \frac{L}{G} \cos \varphi + \frac{M}{G} \cos \psi + \frac{N}{G} \cos \chi$$

oder

$$4. \quad G \cos \Theta = L \cos \varphi + M \cos \psi + N \cos \chi.$$

Wir wissen endlich, dass das Moment einer Kraft eine gewisse Fläche vorstellt. L , M , N als Momente aller Kräfte in Beziehung auf die Coordinatenachsen stellen also gleichfalls gewisse, in den Coordinatenebenen liegende Flächen vor. Projicieren wir nun diese auf eine Ebene D , wo die auf dieser Ebene D errichtete Senkrechte mit den Coordinatenachsen die Winkel φ , ψ , χ bildet, also eben die Gerade, in Beziehung auf welche wir die Momente aller Kräfte suchen, so hat man nach 3

$$5. \quad D = L \cos \varphi + M \cos \psi + N \cos \chi.$$

Diese Projection D ist aber klar die Summe der Producte aller Projectionen der Kräfte auf die Ebene D , welche auf die Gerade φ , ψ , χ senkrecht steht, multipliciert mit den respectiven kürzesten Distanzen zwischen den Projectionen und der Geraden φ , ψ , χ , also eben die Summe der Momente aller Kräfte in Beziehung auf die Gerade φ , ψ , χ , die wir gesucht, und so hat man

$$6. \quad \Sigma P \sin \vartheta \cdot q = D = L \cos \varphi + M \cos \psi + N \cos \chi$$

und demnach bei Entgeghaltung mit 4 und 5

$$7. \quad \Sigma P \sin \vartheta \cdot q = G \cos \Theta.$$

In Worten ausgedrückt:

Die Summe der Momente aller Kräfte, welche an einem soliden Körper angreifen, in Beziehung auf eine durch den Ursprung gehende Gerade ist gleich der Projection der Achse des Resultantenpaares auf diese Gerade.

Die Summe der Momente aller Kräfte in Beziehung auf eine durch einen gegebenen Punkt gehende Gerade wird demnach am größten, wenn man an diesen Punkt als Angriffspunkt alle Kräfte verlegt und die Gerade mit der Achse des für diesen Fall resultierenden Paares zusammenfallen lässt, da alsdann $\Theta = 0$ und $\cos \Theta = 1$ wird.

Zweiter Theil.

KINEMATIK.

Elftes Capitel.

Arten der Bewegungen.

§ 84. In diesem Theile werden wir die Bewegungen an sich, unabhängig von den diese erzeugenden Ursachen, in Betracht ziehen. Bei der Bewegung tritt ein neues Element hinzu, die Zeit.

Den Begriff der Zeit haben wir bereits besprochen. Die Messung der Zeit hat man der Astronomie entnommen. Man nennt die constante Dauer der Umdrehung der Erde um seine Achse einen siderischen Tag. Die Zeiteintheilung geschieht aber nach Sonnenzeit, die Zeit, welche die Sonne benöthigt, um von der unteren Culmination wieder zu derselben zu gelangen, nennt man wahren Sonnentag. Derselbe ist länger als der Sterntag. Da nun die Geschwindigkeit der scheinbaren täglichen Bewegung der Sonne keine gleichmäßige ist, so hat man einen mittleren Sonnentag fingiert und als mittleren Tag genommen, denselben in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten und diese in 60 Secunden getheilt, so dass 86.400 Secunden einen mittleren Tag ausmachen. Ein Sterntag hat nur 86.164.09 Secunden.

Unter Augenblick verstehen wir einen Trennpunkt zwischen Ruhe und Beginn der Bewegung oder zwischen aufeinander folgenden Bewegungen. Er hat keine Dauer und ist gewissermaßen der geometrische Punkt.

Wir sagen, dass ein solider Körper oder ein materieller Punkt in Bewegung ist, wenn er im Verhältnisse zu anderen Körpern oder anderen Punkten nach und nach in verschiedene Lagen gelangt. Im gegentheiligen Falle sagt man, er sei in Ruhe.

Man unterscheidet translatorische und rotierende Bewegungen.

Wir nennen eine Bewegung translatorisch, wenn der Punkt sich in gerader Linie und die Punkte des soliden Körpers sich in parallelen, gleichen Linien bewegen.

Wir sagen ferner, dass ein Punkt oder solider Körper mit einer Rotationsbewegung um eine Achse ausgerüstet sei, wenn alle Punkte dieser invariable mit dem Punkte oder dem

soliden Körper verbundenen Achse während der Bewegung unbeweglich bleiben.

Die Achse kann eine feste oder augenblickliche, Momenten-Achse, wirkliche oder fingierte sein.

Bewegung eines materiellen Punktes.

§ 85. Um die Bewegung eines Punktes kennen zu lernen, wollen wir diese auf ein Coordinatensystem beziehen. Wir wählen ein rechtwinkeliges. Die Coordinaten seien x, y, z , die Zeit heiße t .

Während der Punkt auf seiner Bahn von M nach M' schreitet, wird auf der x -Achse m , die Projection von M , nach m' gehen und dasselbe wird auch bezüglich der anderen Achsen der Fall sein.

Die auf den Achsen zurückgelegten Wege werden demnach Functionen der Zeit sein und sind diese gegeben, alsdann werden die Gleichungen der Bewegung sein

$$x = f(t), y = f_1(t), z = f_2(t),$$

wodurch die Bewegung des Punktes auf seiner Bahn vollständig bestimmt ist. Für jedes t hat man die Coordinaten, also die Lage des Punktes. Der Zeitpunkt, von welchem aus die Zeit gewählt wird, nennt man den Anfangspunkt oder Ursprung der Zeit. Die Ausdrücke $F(0), F_1(0), F_2(0)$ werden alsdann die Coordinaten des Ursprunges der Zeit sein.

Eliminieren wir die Zeit t , so bekommen wir die vom Punkte zurückgelegte Bahn, Trajectorie genannt, ausgedrückt durch die Gleichungen einer Curve

$$F(x, y, z). F_1(x, y, z).$$

Geht die Bewegung eines Punktes in einer Ebene vor sich, alsdann kann man diese Ebene für eine Coordinatenebene, als die Ebene der xy nehmen. Man benöthigt dann bloß zwei Coordinaten und nur zwei Bewegungsgleichungen

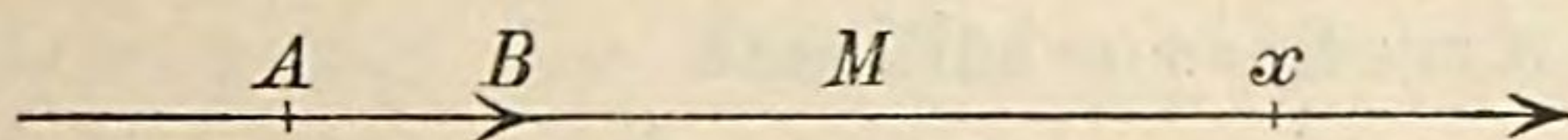
$$x = F(t), y = f(t).$$

a) Geradlinig gleichförmige Bewegung.

§ 86. Gehen wir nun vom einfachsten Falle der Bewegung aus, die ein materieller Punkt annehmen kann, wenn nämlich die Bahn eine gerade Linie ist und das Mobile in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt. Man sagt dann, die Bewegung sei geradlinig und gleichförmig und dient diese Bewegung als Vergleichungsmodus für alle anderen Bewegungen.

Unter gleichförmiger Bewegung versteht man eine Bewegung, wo die Geschwindigkeit während der ganzen Bewegung constant bleibt. Bei dieser Bewegung wird die Geschwindigkeit durch den in der Zeiteinheit zurückgelegten, stets gleichen Weg gemessen.

Fig. 23.



Bewegt sich der Punkt M auf der geraden Linie Ax, befand er sich am Ursprunge der Zeit, also am Zeitpunkte, von welchem wir die Zeit zu zählen beginnen, mithin zur Zeit $= 0$, in A, und durchläuft er in der Zeiteinheit eine Strecke $= a$, wodann seine constante Geschwindigkeit $v = a$ ist, alsdann wird der Punkt auf seiner Bahn in der Zeit t die Strecke $= at$ zurücklegen.

Nennt man den zurückgelegten Weg S , so hat man dessen Bewegungsgleichung, indem, wie man sieht, der Weg eine Function der Zeit ist,

$$s = f(t), \quad s = at, \quad s = vt.$$

Die Gleichungen

$$s = at, \quad s = vt$$

sind identisch. In ersterer wird im Producte der in der Zeiteinheit durchlaufene Weg, in der zweiten die Geschwindigkeit v genommen, welche bei der gleichförmigen Bewegung constant und hier gleich a ist.

Aus obiger Gleichung haben wir auch

$$v = \frac{s}{t}.$$

Eine gleichförmige Bewegung unterscheidet sich von einer anderen gleichförmigen Bewegung durch die Größe der Geschwindigkeit, also durch die constante Länge des Raumes, welche das Mobile in der Zeiteinheit durchläuft.

§ 87. Beziehen wir die Lage des Mobile auf einen fixen Punkt A und befand sich das Mobile am Ursprunge der Zeit, also zur Zeit 0, in B in der Distanz $AB = b$ von A, so wird nach Ablauf der Zeit t die Distanz des Mobile von A gleich sein dem in der Zeit t zurückgelegten Wege mit Hinzurechnung der ursprünglichen Distanz b zur Zeit 0 und die allgemeine Gleichung einer geradlinig gleichförmigen Bewegung wird demnach sein

$$s = at + b, \quad s = vt + b.$$

Umgekehrt stellt jede Gleichung des ersten Grades von der Form $s = at + b$ oder $s = vt + b$ zwischen Raum und Zeit oder Geschwindigkeit und Zeit eine gleichförmige Bewegung vor. Denn sie ergibt

$$a = v = \frac{s-b}{t},$$

und setzt man $t = 1$, so erhält man

$$v = s - b,$$

mithin die Geschwindigkeit constant ist, was aber eben das Merkmal einer gleichförmigen Bewegung ausdrückt.

b) Geradlinig ungleichförmige Bewegung.

§ 88. Ist die Bewegung geradlinig und ungleichförmig, alsdann variiert die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke und zu ihrer Messung fehlt eigentlich ein Maßstab. Würde man die während eines größeren Zeitraumes ermittelte mittlere Geschwindigkeit zum Maßstabe nehmen, so würde man weit von der Wahrheit sein.

Nimmt man aber eine sehr kurze Zeit $\triangle t$, so wird die Bewegung während dieser sehr kurzen Zeitperiode fast gleichförmig sein, und das Verhältniß $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ wird daher die mittlere Geschwindigkeit des Mobile während der sehr kurzen Zeit $\triangle t$ vorstellen. Es ist dies die constante Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt begabt sein müsste, um die Strecke $\triangle s$ in der Zeit $\triangle t$ zu durchlaufen.

§ 89. Diese nicht bloß von t , sondern auch von $\triangle t$ abhängige Geschwindigkeit gibt aber noch immer keinen Aufschluss über die Natur der Bewegung zur Zeit t . Dieses Ziel erreicht man erst, wenn man $\triangle s$ und $\triangle t$ unendlich klein werden lässt, also zur Grenze schreitet.

Lässt man nämlich $\triangle s$ und $\triangle t$ sich der Grenze Null nähern und übergeht man zur Grenze $\frac{ds}{dt}$ dieser mittleren Geschwindigkeit $\frac{\triangle s}{\triangle t}$, so wird dieses Verhältniß bestimmt und gibt genügenden Aufschluss über die Natur der Bewegung. Eben dadurch, dass wir die Größen $\triangle s$, $\triangle t$ unendlich klein werden ließen, haben wir die frühere Unbestimmtheit beseitigt. Wir nennen $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Mobile zur Zeit.

Wie man sieht, enthält die Lösung dieser Frage den Keim der Differenzialrechnung.

Die Gleichung

$$v = \frac{ds}{dt}$$

sagt also aus, dass die Geschwindigkeit einer ungleichförmigen Bewegung die Derivierte des Raumes in Beziehung auf die Zeit ist.

§ 90. Nach Taylors Theoreme hat man aber

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 s}{dt^2} \Delta t.$$

Man sieht also, dass wir, zur Grenze übergehend, unendlich kleine Größen höherer Ordnung vernachlässigen.

Ist nun v als Function von t durch die Gleichung gegeben

$$v = \frac{ds}{dt} = f(t),$$

so hat man

$$ds = f(t) dt,$$

und wenn man integriert, kommt

$$s = \int f(t) dt.$$

Wenn man nun sagt, die Geschwindigkeit, von der das Mobile zur Zeit t belebt ist, sei gleich v , so versteht man unter v die Geschwindigkeit, die das Mobile weiter beleben würde, wenn die Kraft, die bis dahin gewirkt und die Geschwindigkeit erzeugt, zu wirken aufhören würde. Dauert demnach die Wirkung der motorischen Kraft fort, so wird das Mobile, in dem nach Verlaufe der Zeit t folgenden Zeittheile dt , Kraft der bereits erlangten Geschwindigkeit v , den Weg ds und überdies, infolge des Fortwirkens der Kraft, während des Zeitelementes dt , auch einen unendlich kleinen Weg ε beschreiben, den wir aber, als unendlich kleine Größe höherer Ordnung, vernachlässigen. Die Größe des vom Mobile während des Zeitelementes dt beschriebenen Weges wird demnach sein, infolge der Geschwindigkeit v , $v dt$ und infolge der Weiterwirkung der Kraft ε zusammen also

$$ds = v dt + \varepsilon.$$

Wir werden auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Belangend den Sinn der Bewegung, wird man diese als positiv bezeichnen, wenn das Mobile sich nach irgend einer Richtung AM

bewegt und alsdann die Bewegung in entgegengesetztem Sinne als negativ betrachten.

c) Gleichförmig variierte geradlinige Bewegung.

§ 91. Gleichförmig variiert ist die Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleiche Zuwachse erlangt, wo also der Zuwachs der Geschwindigkeit constant ist.

Der Zuwachs der Geschwindigkeit wird Acceleration oder Beschleunigung genannt.

Bezeichnen wir die Acceleration mit φ und nehmen an, dass die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, v_0 war, alsdann wird die Geschwindigkeit zur Zeit t , indem sie mit jeder Zeiteinheit um φ vermehrt wird, sein

$$v = v_0 + \varphi t.$$

War die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ gleich Null, alsdann ist $v_0 = 0$ und wir haben

$$v = \varphi t.$$

Die Geschwindigkeit hat aber zum Ausdrucke

$$v = \frac{ds}{dt},$$

daher haben wir

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + \varphi t$$

und mithin

$$ds = v_0 dt + \varphi t dt.$$

Integriert man, so kommt

$$s = v_0 t + \varphi \frac{t^2}{2} + c,$$

wo unter c die Integrationsconstante verstanden wird. Bestimmen wir diese Constante in der Weise, dass die vom Mobile beschriebenen Räume vom Ausgangspunkte zu zählen sind, wo sich das Mobile am Zeitursprunge befand, so ist $c = 0$, und die Gleichung wird sein

$$s = v_0 t + \varphi \frac{t^2}{2}$$

hatte das Mobile zur Zeit $t = 0$ gar keine Geschwindigkeit, alsdann wird $v_0 = 0$ und wir haben die Gleichung

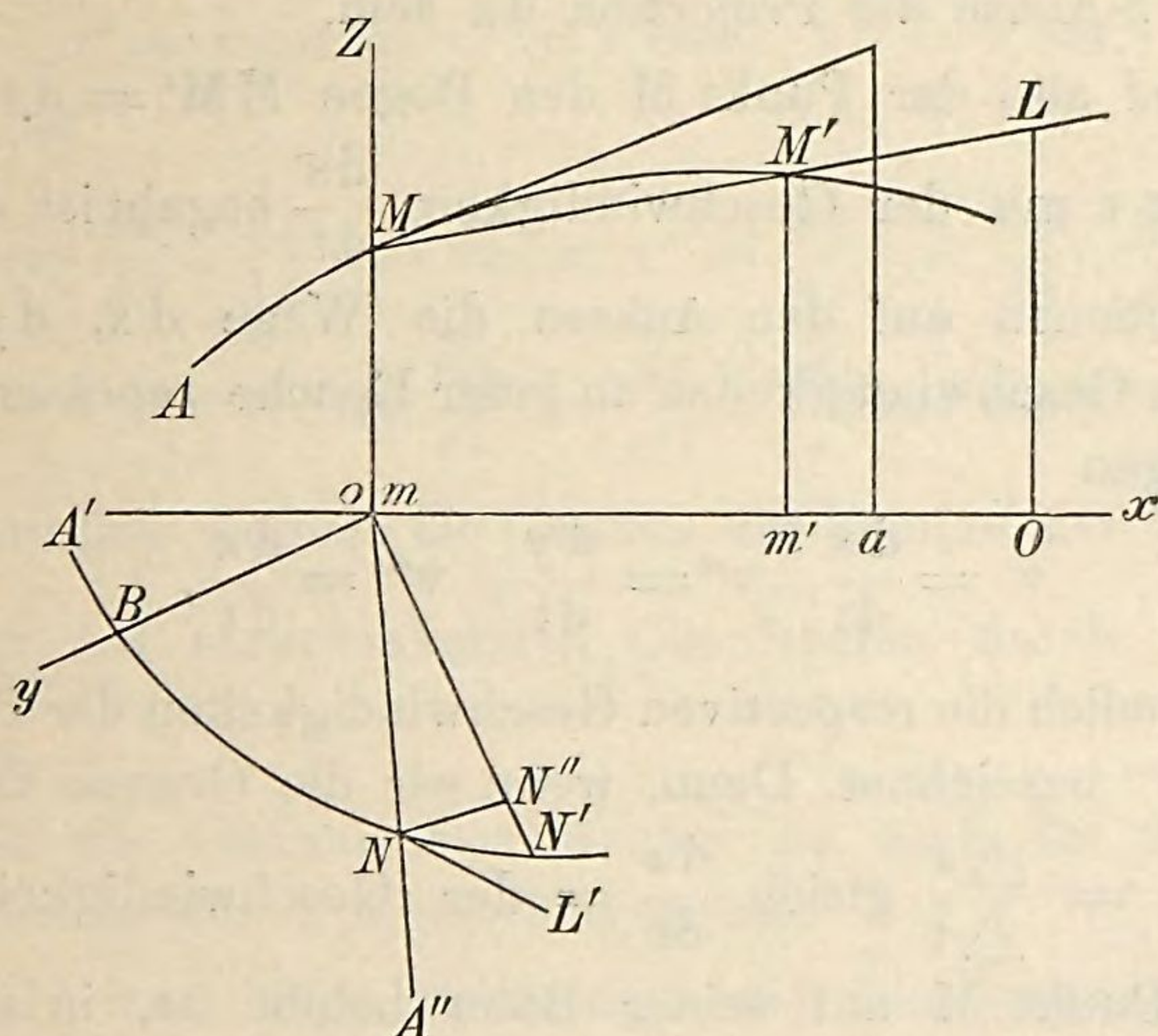
$$s = \frac{\varphi t^2}{2}.$$

d) Beliebige Bewegung.

§ 92. Betrachten wir jetzt eine beliebige gerad- oder krummlinige Bewegung mit variierter Geschwindigkeit, so wird man auch hier den vorigen Weg einschlagen und nehmen wir dabei ein rechtwinkeliges Coordinatensystem und beziehen darauf die Bewegung.

Es sei AMM' die Curve der Trajectorie von einfacher oder doppelter Krümmung. Zur Zeit t befinde sich der Punkt auf der

Fig. 24.



Bahn in M und nach Verlauf einer sehr kurzen Zeit Δt , also zur Zeit $t + \Delta t$ in M' , so dass er während dieser sehr kurzen Zeit den Bogen $MM' = \Delta s$ durchlaufen und mithin die mittlere Geschwindigkeit zur Zeit t gleich $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ist. Nähern sich die beiden Größen Δs , Δt der Null, so wird die Geschwindigkeit des Punktes zur Zeit t durch die Gleichung

$$v = \frac{ds}{dt}$$

vorgestellt.

Dem unendlich kleinen Bogen MM' kann bekanntlich die Sehne MM' substituiert werden, indem beide nur um ein unendlich kleines dritter Ordnung differieren und ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Bei dieser Annahme betrachtet man die krumme Linie als ein Polygon mit sehr kleinen Seiten, welche, indem man sich der Grenze

nähert, an Zahl unendlich groß und an Länge unendlich klein werden. Die Richtung des Laufes des Punktes auf jeder elementaren Seite wird die der Tangente am betreffenden Punkte der Bahn sein.

§ 93. Während das Mobile in seiner Trajectorie den Bogen oder die Sehne $MM' = ds$ durchläuft, geht dessen Projection m bis m' , so dass der auf der x -Achse durchlaufene Raum durch dx vorgestellt wird, und ebenso wird die Projection auf der y -Achse dy und auf der z -Achse die Projection dz sein.

Während also der Punkt M den Bogen $MM' = ds$ durchläuft und zur Zeit t mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ begabt ist, durchlaufen dessen Projectionen auf den Achsen die Wege dx , dy , dz und werden deren Geschwindigkeiten zu jener Epoche repräsentiert durch die Gleichungen

$$v' = \frac{dx}{dt}, \quad v'' = \frac{dy}{dt}, \quad v''' = \frac{dz}{dt},$$

wenn man nämlich die respectiven Geschwindigkeiten der Projectionen mit v' , v'' , v''' bezeichnet. Denn, wenn wir die Grenze des Verhältnisses $\frac{MM'}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ gleich $\frac{ds}{dt}$ = der Geschwindigkeit v , von welcher der Punkt M auf seiner Bahn belebt ist, in Größe und Richtung durch die Länge ML darstellen und mo die Projection von ML auf die x -Achse ist, so wird die Geschwindigkeit der Projection m auf der x -Achse durch die Grenze des Verhältnisses $\frac{mm'}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$, also in Größe und Richtung durch die Länge mo vorgestellt sein, da $\frac{ML}{mo} = \frac{MM'}{mm'} = \frac{MM' : dt}{mm' : dt}$ ist, mithin die Geschwindigkeit der Projection $mo = \frac{mm'}{dt} = \frac{dx}{dt}$ sein wird. Dasselbe gilt auch für die Geschwindigkeiten der Projectionen auf die beiden anderen Achsen, welche $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ zu Ausdrücken haben.

Die Projection der Geschwindigkeit eines Punktes auf eine Achse ist also in Größe und Richtung durch die Geschwindigkeit der Projection dieses Punktes dargestellt.

Da ferner

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

ist, so wird man auch haben

$$v^2 = v'^2 + v''^2 + v'''^2.$$

Bildet ferner zur Zeit t die Tangente der Trajectorie, im Sinne der Richtung der Bewegung mit den positiven Achsen die Winkel α, β, γ , so wird man auch haben

$$v' = v \cos \alpha, \quad v'' = v \cos \beta, \quad v''' = v \cos \gamma$$

denn man hat

$$v' = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{ds} = v \cos \alpha, \quad v'' = \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{ds} = v \cos \beta, \\ v''' = \frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dz}{ds} = v \cos \gamma.$$

Bekanntlich werden die Cosinus der Winkel der Tangente mit den Achsen bei rechtwinkligen Coordinaten durch $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ ausgedrückt.

Durch die Cosinus der Winkel ist auch der Sinn der Bewegungsrichtung der Trajectorie gegeben.

Schreibt man obige Gleichungen der Geschwindigkeit der Projectionen auf die Achsen in der Form

$$dx = v' dt, \quad dy = v'' dt, \quad dz = v''' dt$$

und integriert dieselben, so hat man

$$x = \varphi(t) + a, \quad y = \psi(t) + b, \quad z = \chi(t) + c$$

und eliminiert man t , so hat man die Trajectorie, welche M beschreibt, in der Form

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0.$$

§ 94. Es sei ferner die Bahn eine ebene Curve BNN' (Fig. 24) in der Coordinatenebene xy und nehmen wir Polarcoordinaten, Ox sei die Polarachse, ON der Radiusvector $= r$, der Winkel $xON = \theta$, NA'' die Verlängerung des Radius, NN' der unendlich kleine, vom Mobile N während des Zeitelementes dt beschriebene Bogen oder dessen Sehne, NL' die Tangente an diesem Punkte, der unendlich kleine Winkel $NON' = d\theta$, so kann die Geschwindigkeit des Punktes N in zwei Componenten zerlegt werden, die eine nach der Verlängerung des Radius r , NA'' und die anderen nach einer darauf senkrechten

Richtung NN'' . Die Größen derselben werden in folgender Weise ermittelt.

Die Geschwindigkeit des Mobile N an diesem Punkte ist gleich $\frac{ds}{dt}$ und, wie hervorgehoben, nach der Tangente NL' gerichtet. Die Componente dieser Geschwindigkeit nach NA'' wird daher zum Ausdrucke haben $\frac{ds}{dt} \cos L'NN'' = \frac{ds}{dt} \cos N'NA''$. Die Componente der Geschwindigkeit nach NN'' wird gleich sein $\frac{ds}{dt} \cos N''NL' = \frac{ds}{dt} \cos N''NN'$.

Aus dem Dreiecke $NN'N''$ ist aber zu ersehen, dass der Winkel $L'NA''$, oder was derselbe ist, der Winkel $N'NA''$ das Complement des Winkels $N''NN'$ in jenem Dreiecke ist, dass daher

$$\cos L'NA'' = \cos N'NA'' = \sin N''NN' = \frac{N''N'}{NN'} = \frac{dr}{ds}$$

$$\cos L'NN'' = \cos N''NN' = \frac{NN''}{NN'} = \frac{d\Theta r}{ds}$$

sind. Denn $N''N'$ ist offenbar das Differenzial des Radius $= dr$, und ebenso wird der unendlich kleine Bogen NN'' durch das Product des unendlich kleinen Winkels $d\Theta$ multipliciert mit dem Radius r ausgedrückt.

Die beiden Componenten der Geschwindigkeit des Bogens NN' werden demnach sein, und zwar:

Die Componente der Geschwindigkeit nach

$$NA'' = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}.$$

Die Componente der Geschwindigkeit nach

$$NN'' = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{rd\Theta}{ds} = \frac{rd\Theta}{dt}.$$

Aus dem Dreiecke $NN'N''$ ist ferner zu ersehen, dass

$$NN'^2 = NN''^2 + N''N'^2$$

und mithin

$$\frac{NN'^2}{dt^2} = \frac{NN''^2}{dt^2} + \frac{N''N'^2}{dt^2}$$

ist. Wir haben demnach

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\Theta^2}{dt^2}.$$

Die Componente $\frac{rd\Theta}{dt}$ wird die Geschwindigkeit der Circulation des Punktes, $\frac{d\Theta}{dt}$ dessen Winkelgeschwindigkeit, und $\frac{dr}{dt}$ die Geschwindigkeit der Translation des Punktes nach der Länge des Radiusvector r genannt. Die Größe $\frac{r}{2} \cdot \frac{rd\Theta}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\Theta}{dt}$ heißt die Flächengeschwindigkeit.

Es wird bemerkt, dass während die Richtungen der Componenten der Geschwindigkeit des Mobile nach den rechtwinkligen Achsen, auch cartesische Coordinaten genannt, fest sind, die Richtungen der Componenten in Polarcoordinaten ausgedrückt, $\frac{dr}{dt}$, $\frac{rd\Theta}{dt}$ mit der Lage des Mobile sich ändern.

Zwölftes Capitel.

Die Acceleration bei ungleichförmigen geradlinigen Bewegungen.

§ 95. Die Acceleration, der Zuwachs der Geschwindigkeit ist continuierlich, die Geschwindigkeit wächst mit jedem Augenblicke und ist der Zuwachs nicht gleichförmig, nicht proportional den Zeiten, entsteht die Frage, wie man die Acceleration messen kann, da sie doch fließend ist und sich nicht halten lässt.

Aber auch die Trajectorie ist continuierlich, und wie wir uns damit geholfen haben, dass wir die Curve in ein Polygon von unendlich vielen Seiten umgewandelt und in dieser Weise eine mittlere Geschwindigkeit $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ geschaffen und dann uns der Grenze $v = \frac{ds}{dt}$ genähert, ganz ähnlich werden wir bei der Bestimmung der Acceleration vorgehen.

Es sei v die Geschwindigkeit des Mobile zur Zeit t . Zur Zeit $t + \Delta t$ wird die Geschwindigkeit $v + \Delta v$ sein, und daher wird die mittlere Acceleration zur Zeit t gleich sein

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Man geht dabei von der Vorstellung aus, dass die während einer sehr kurzen Zeit Δt erlangte Acceleration gleichförmig sei, und die Geschwindigkeit sich während dieses Zeitverlaufes um den Zuwachs Δv vergrößert, daher die Acceleration obigen Ausdruck

$\frac{\Delta v}{\Delta t}$ habe. Wird die Zeit unendlich klein, nähert sich also Δt der Grenze Null zu, so schreitet auf die mittlere Acceleration einer von Δt unabhängigen Grenze zu und wird die Acceleration zur Zeit t ausgedrückt durch die Gleichung

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

Die Acceleration ist die Derivierte der Geschwindigkeit in Beziehung auf die Zeit.

Dieser Ausdruck enthält auch die gleichförmige Acceleration. Denn bei einer gleichförmigen Acceleration haben wir

$$v = \varphi t.$$

Differenzieren wir diese Gleichung, hat man

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

Da wir ferner hatten

$$v = \frac{ds}{dt},$$

so ist

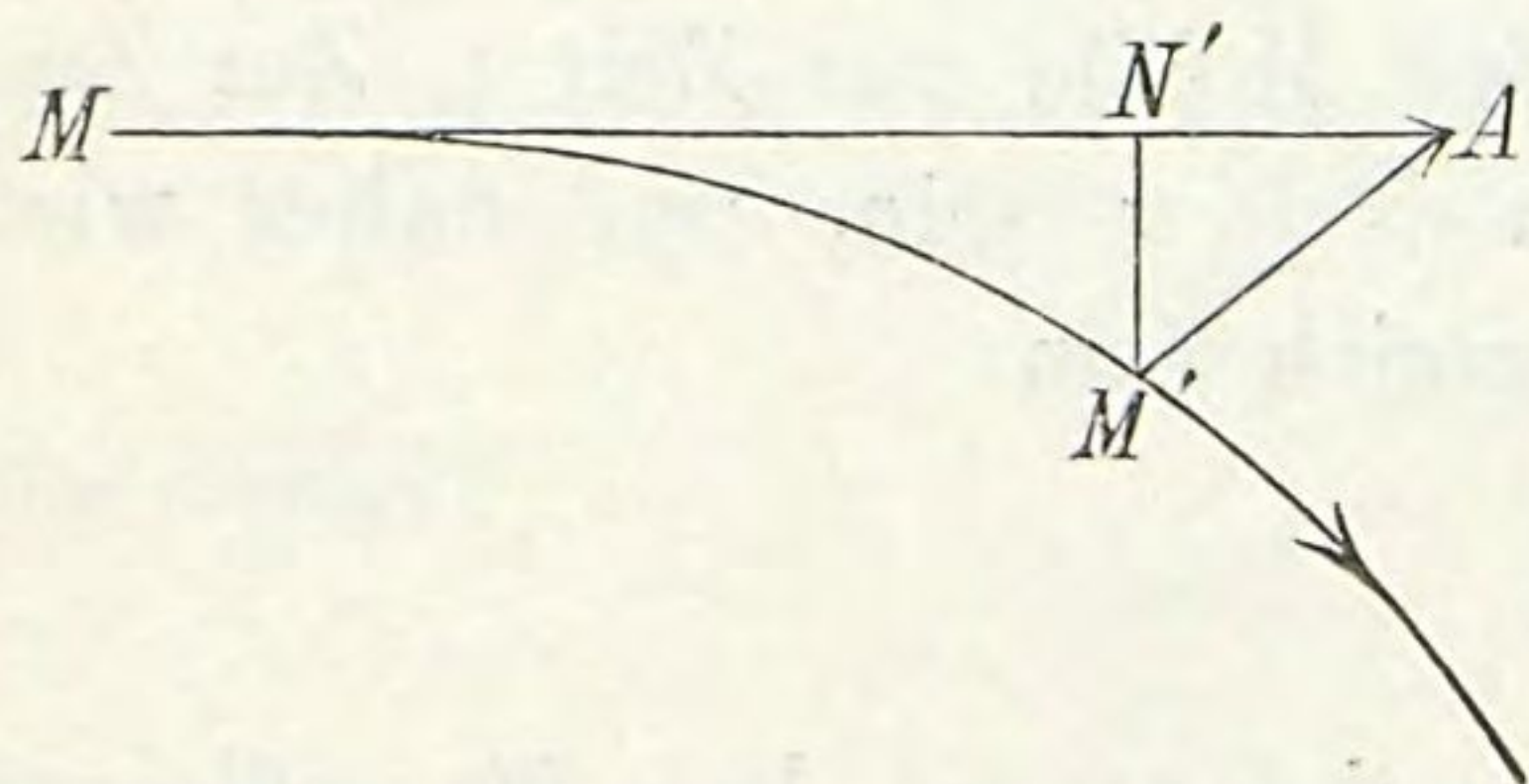
$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Die Acceleration ist auch die zweite Derivierte des Raumes in Beziehung auf die Zeit.

Die Deviation und Acceleration bei ungleichförmigen krummlinigen Bewegungen.

§ 96. Der Punkt durchlaufe eine krummlinige Bahn mit ungleichförmig variierter Geschwindigkeit und sei zur Zeit t in M .

Fig. 25.



Wir legen an M die Tangente MA und nehmen an, dass, während M in einem sehr kurzen Zeittheile Δt den Weg MM' durchläuft, ein zweiter Punkt, ebenfalls in M sich befindend, gleichzeitig und mit derselben Geschwindigkeit sich auf der Tangente MA bewege und am

Ende des Zeittheiles Δt in A anlange. Verbinden M' mit A durch die Linie $M'A$, so stellt diese Linie MA' die Abweichung beider Bewegungen vor und heißt Deviation.

Diese Linie $M'A$ stellt nun, wenn $\triangle t$ der Grenze 0 zustrebt, offenbar die Richtung der Acceleration vor und haben wir deren Größe zu bestimmen.

Man könnte einfach bestimmen, $\frac{M'A}{\triangle t}$ stelle die mittlere Deviation vor, das heißt, als wäre die Deviation $M'A$ während des kurzen Zeittheiles $\triangle t$ mit einer mittleren constanten Acceleration durchlaufen und alsdann würde man haben, wenn diese Acceleration mit φ' bezeichnet wird,

$$M'A = \varphi' \frac{\triangle t^2}{2}$$

mithin

$$\varphi' = \frac{M'A}{\frac{\triangle t^2}{2}}.$$

Daher beim Zustreben der Grenze

$$\varphi' = \frac{\frac{M'A}{dt^2}}{2} = \frac{2M'A}{dt^2}.$$

Wir wollen aber klarer ableiten. Denken wir uns die Bewegungen beider Punkte auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogen. Die beiden Punkte befinden sich zur Zeit t in M , dessen Coordinaten x, y, z seien. Der eine Punkt bewegt auf seiner Trajectorie MM' und wird am Ende der Zeit $t + \triangle t$ in M' anlangen. Die Componenten seiner Geschwindigkeit auf den Achsen werden

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

sein.

Da sich der andere Punkt mit derselben Geschwindigkeit auf der Tangente bewegt, so wird er am Ende des Zeittheiles $\triangle t$ im Punkt A sein, dessen Coordinaten sind

$$1. \quad x + \frac{dx}{dt} \triangle t, \quad y + \frac{dy}{dt} \triangle t, \quad z + \frac{dz}{dt} \triangle t.$$

Die Coordinaten des Punktes M' findet man aus folgender Überlegung.

x ist, wie wir gesehen, eine Function von t , $x = f(t)$, folglich wird das x' von M' ausgedrückt sein durch $f(t + \triangle t)$.

Nach dem Theorem von Taylor hat man aber

$$f(t + \Delta t) = f(t) + f'(t) \Delta t + f''(t) \frac{\Delta t^2}{2} + \dots =$$

$$= x + \frac{dx}{dt} \Delta t + \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots$$

und in dieser Weise hat man für die drei Coordinaten die drei Gleichungen

$$2. \quad \begin{cases} x' = x + \frac{dx}{dt} \Delta t + \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \\ y' = y + \frac{dy}{dt} \Delta t + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \\ z' = z + \frac{dz}{dt} \Delta t + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \end{cases}$$

Lässt man in Betracht, dass Δt sehr klein ist, die kleinen Größen höherer Ordnung weg und zieht die in 1 ersichtlichen Coordinaten des Punktes A von 2 ab, so erhält man die Ausdrücke für die Componenten der Deviation AM' nach den Achsen

$$\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2}.$$

Die Größe der Deviation als Diagonale ist demnach

$$M'A = \frac{\Delta t^2}{2} \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

§ 97. Betrachtet man diesen Ausdruck genau und vergleicht ihn mit dem Ausdrucke für den mit constanter Acceleration zurückgelegten Raum

$$s = \varphi \frac{t^2}{2},$$

so wird man einsehen, dass

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

die ungleichförmige Acceleration in der Deviation bedeutet, welche mithin durch

$$\varphi' = \frac{M'A}{\frac{\Delta t^2}{2}} + \frac{2M'A}{\Delta t^2}$$

vorgestellt wird, wenn Δt der Grenze zuschreitet.

Man hat daher, wenn man die Deviation mit D und die Acceleration mit φ' bezeichnet,

$$D = \frac{\Delta t^2}{2} \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2},$$

$$\varphi' = \frac{D}{\frac{\Delta t^2}{2}} = \frac{M'A}{\frac{\Delta t^2}{2}} = \frac{2M'A}{\Delta t^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2}.$$

Die Cosinus der Winkel zwischen der Deviation und den Achsen sind die Quotienten der Componenten dividiert durch die Diagonale. Mithin sind diese Cosinus, wenn man obigen Ausdruck mit h bezeichnet

$$\frac{\frac{d^2 x}{dt^2}}{h}, \frac{\frac{d^2 y}{dt^2}}{h}, \frac{\frac{d^2 z}{dt^2}}{h}.$$

Multipliziert man diese Ausdrücke mit h , welche Größe, wie wir oben gesehen, die Acceleration vorstellt, so erhält man für die Componenten der Acceleration nach den Achsen

$$\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

$$\text{Die Acceleration} = \frac{2M'A}{\Delta t^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2}$$

nennt man die totale Acceleration des Mobile zur Zeit t .

§ 98. Die Deviation kann man in eine tangentielle und normale Componente theilen.

Fällt man die Senkrechte $M'N'$ (Fig. 24) auf MA , so stellt $N'A$ die tangentielle, $M'N'$ die normale Componente der Deviation vor.

Projiciert man aber die Componenten der Deviation nach den Achsen auf die Tangente, in Anbetracht, dass die Cosinus der Winkel zwischen der Tangente und den Achsen durch die Ausdrücke

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$$

gegeben sind, so hat man

$$N'A = \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{ds} + \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dy}{ds} + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{dz}{ds} \right].$$

Man hat aber auch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

woraus man durch Differentiation hat

$$ds \, d^2 s = dx \, d^2 x + dy \, d^2 y + dz \, d^2 z$$

$$d^2 s = \frac{dx \, d^2 x}{ds} + \frac{dy \, d^2 y}{ds} + \frac{dz \, d^2 z}{ds}$$

daher

$$3. \quad N'A = \frac{d^2s}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{dv}{dt}.$$

Man weiß ferner, dass bei jeder Curve die von einem Curvenpunkte auf die Tangente gefällte Senkrechte $M'N'$, wenn das Curvenelement gleich MM' und der Krümmungshalbmesser $= \rho$ ist, zum Ausdrucke hat

$$M'N' = \text{Sehne} \frac{MM'^2}{2\rho}.$$

Ist aber hier MM' unendlich klein, wodann Bogen und Sehne nur mit unendlich kleinen Größen dritter Ordnung differieren, so dass beide als gleich betrachtet werden können, so hat man auch

$$M'N' = \text{Sehne} \frac{MM'^2}{2\rho} = \frac{\text{arc } MM'^2}{2\rho}$$

$M'M$, der während des Zeitelementes Δt durchlaufene Raum, ist gleich $v\Delta t$, folglich

$$4. \quad M'N' = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{v^2}{\rho}.$$

Die beiden Componenten der Deviation

$$\frac{\Delta t^2}{2} \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

sind demnach

$$5. \quad \begin{cases} N'A = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{dv}{dt} \\ M'N' = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

§ 99. Ebenso wie die Deviation wird auch die totale Acceleration in eine tangentielle und normale Componente getheilt.

Für die totale Acceleration hat man

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

und sind demnach die beiden Componenten

$$\frac{dv}{dt}, \quad \frac{v^2}{\rho}.$$

Bezeichnet man ferner die Winkel, welche die Tangente mit den Achsen bildet und deren Cosinus auszudrücken haben $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, mit α, β, γ und die Winkel, welche der Krümmungs-

halbmesser mit den Achsen einschließt, mit λ , μ , ν , so hat man für die Componenten der totalen Acceleration nach den Achsen folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} \cos \alpha + \frac{v^2}{\rho} \cos \lambda \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} \cos \beta + \frac{v^2}{\rho} \cos \mu \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} \cos \gamma + \frac{v^2}{\rho} \cos \nu\end{aligned}$$

Die eine Componente der totalen Acceleration $\frac{dv}{dt}$ ist die Acceleration des Mobile in der Trajectorie und heißt Tangential-Acceleration. Diese ist es, die wir in der Regel mit φ bezeichnen.

Die andere Componente der Acceleration $\frac{v^2}{\rho}$ heißt die centripetale Acceleration. Sie steht normal auf der Tangente, ist nach der Länge des Krümmungshalbmesser gerichtet und trägt nichts zur Geschwindigkeit der Bahn bei.

§ 100. Ist die Bewegung geradlinig, alsdann ist $\rho = \infty$ und $\frac{v^2}{\rho}$ wird $= 0$. Es reducirt sich daher die totale Acceleration auf

$$\varphi = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}.$$

Ist die geradlinige Bewegung überdies gleichförmig variiert, so ist $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ constant. Ist die Bewegung in einem Kreise und gleichförmig, also ist v constant und $\frac{dv}{dt} = 0$. Mithin ist dann die tangentielle Acceleration gleich Null und die totale Acceleration reducirt sich auf die centripetale Acceleration

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r},$$

indem der Krümmungshalbmesser hier constant und mit r bezeichnet wird. Man sieht ferner, dass die centripetale Acceleration nur bei krummlinigen Bewegungen vorkommen kann.

§ 101. Der Wichtigkeit halber wollen wir die bisherigen Formeln zusammenstellen:

a) für geradlinig gleichförmige Bewegungen haben wir

$$1. \quad s = vt + b,$$

b) für geradlinig ungleichförmige Bewegungen

$$2. \quad v = \frac{ds}{dt},$$

c) für gleichförmig variierte geradlinige Bewegungen

$$3. \quad \begin{cases} v = v_0 + \varphi t \\ s = c + v_0 t + \frac{\varphi t^2}{2}, \end{cases}$$

d) für beliebige Bewegungen

$$4. \quad \begin{cases} \frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dx}{dt} = v', \quad \frac{dy}{dt} = v'', \quad \frac{dz}{dt} = v''' \\ v^2 = v'^2 + v''^2 + v'''^2 \\ \frac{ds^2}{dt} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \end{cases},$$

e) für Polarcoordinaten hat man die Ausdrücke

$$5. \quad v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\Theta^2}{dt^2}$$

$$6. \quad \begin{cases} \text{Circulations-Componente} = \frac{r d\Theta}{dt} \\ \text{Componente der Translation} = \frac{dr}{dt} \\ \text{Winkelgeschwindigkeit} = \frac{d\Theta}{dt} \\ \text{Flächengeschwindigkeit} = \frac{r^2}{2} \frac{d\Theta}{dt} \end{cases}$$

f) für die Deviation bei krummlinigen Bewegungen

$$7. \quad D = \frac{\Delta t^2}{2} \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

für die Componenten nach den Achsen

$$8. \quad \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2z}{dt^2},$$

$$9. \quad \begin{cases} \text{Tangential-Componente} = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{dv}{dt} \\ \text{Normale Componente} = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

g) für die totale Acceleration

$$10. \quad \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2},$$

die Componenten nach den Achsen

$$11. \quad \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2},$$

$$12. \quad \begin{cases} \text{Tangential-Componente} = \frac{dv}{dt} \\ \text{Centripetale Componente} = \frac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

für geradlinige Bewegung

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

für die Componenten der Tangential-Acceleration und Centripetal-Acceleration nach den Achsen

$$14. \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \alpha + \frac{v^2}{\rho} \cos \lambda \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \beta + \frac{v^2}{\rho} \cos \mu \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \gamma + \frac{v^2}{\rho} \cos \nu \end{cases}$$

Dreizehntes Capitel.

Bewegung solider Körper.

§ 102. Wir haben bereits bemerkt, dass wir unter soliden Körpern einen Körper oder ein Punktsystem verstehen, bei welchem die Distanzen zwischen allen Punkten während der ganzen Bewegung constant bleiben. In der Natur gibt es solche Körper nicht. Wir betrachten sie in einem Zustande, wo jede Elasticität und Ausdehnbarkeit aufgehört hat.

Bewegt sich ein Körper, so kann die Bewegung Circulation, Translation, oder beides zugleich sein. Die Drehungsbewegung wie auch die Translationsbewegung können gleichförmig oder ungleichförmig sein.

Der Körper kann ferner einen fixen Punkt haben. Wir betrachten hier die Bewegung eines soliden, völlig freien Körpers, und werden dann auf den Fall kommen, wo der Körper einen fixen Punkt präsentiert.

Um die Bewegung eines soliden Körpers im Raume besser zu erfassen, theilt man dieselbe in eine Rotationsbewegung um einen Punkt des Körpers und eine allen Punkten des Körpers gemeinschaftliche translatorische Bewegung, wo aber eine oder die andere Bewegung entfallen kann. Die Geschwindigkeit eines jeden Punktes in einem beliebigen Zeitpunkte wird also im allgemeinen als aus zwei Geschwindigkeiten zusammengesetzt betrachtet, von welchen die translatorische alle Punkte des Körpers in gleichen parallelen Linien transportiert, die Rotationsgeschwindigkeit hingegen den ganzen Körper um einen Punkt, Mittelpunkt der Umdrehung genannt, rotieren lässt, und jedem Punkte des Körpers besonders angehört.

Zusammensetzung von Bewegungen.

a) Translatorische.

§ 103. Translatorische Bewegungen werden wie an einem Punkte angreifende Kräfte zusammengesetzt und zerlegt, und haben die Sätze vom Parallelogramme und Parallelepiped der Kräfte volle Anwendung. Man hat hier ein Parallelogramm und Parallelepiped der Geschwindigkeiten, und gelten hier ganz dieselben Gesetze. Das alles leuchtet von selbst ein, denn bei der translatorischen Bewegung machen alle Punkte gleiche parallele Wege. Macht nun ein Punkt des Körpers successive translatorische Bewegungen, welche durch die Strecken $ab, bc, \dots lm$ vorgestellt werden, so werden die von einem andern Punkte gleichzeitig durchlaufenen Wege durch gleiche und parallele Strecken $a'b', b'c', \dots l'm'$ vorgestellt, und am gleich und parallel $a'm'$, wird die Resultante der Translation der Strecken $ab, bc, \dots lm$ sein, welche die componierenden Bewegungen vorstellen. Jede translatorische Geschwindigkeit wird, wie eine Kraft, durch eine Strecke nach Größe, Richtung und Sinn vorgestellt. Alle diese Strecken können zerlegt und zusammengesetzt werden. Man hat auch in dieser Weise ein Polygon der Geschwindigkeiten, und haben alle Geschwindigkeiten eine Resultante.

b) Zusammensetzung von Rotierungen.

§ 104. Über Zusammensetzung und Zerlegung von Drehungen hat man, und insbesondere Poinsot, der die Vektoren eingeführt, Sätze aufgestellt, die wir hier entwickeln wollen, und zuerst angeben, wie eine Drehung repräsentiert wird.

Ist ein Körper von einer Rotationsbewegung belebt, so denken wir uns im betreffenden Zeitpunkte eine mit dem Körper verbundene,

durch die Rotationsachse gehende Ebene, welche mit diesem Körper mitrotiert, und in einem gewissen Zeittheile einen gewissen Bogen durchläuft, welchem eine proportionale Winkelgeschwindigkeit, Winkeldeplacierung entspricht. Ist die Rotierung eine gleichförmige, so wird der Rotierungswinkel und respective die Rotierungsgeschwindigkeit constant sein, ist sie nicht gleichförmig, alsdann wird der Winkel eine Function der Zeit sein und durch das Verhältniß $\frac{d\Theta}{dt}$ bestimmt.

Diese Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\Theta}{dt}$ nennt man Geschwindigkeit der Drehung eines soliden Körpers. Sie ist zugleich die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher von der Rotationsachse um die Längeneinheit entfernt ist.

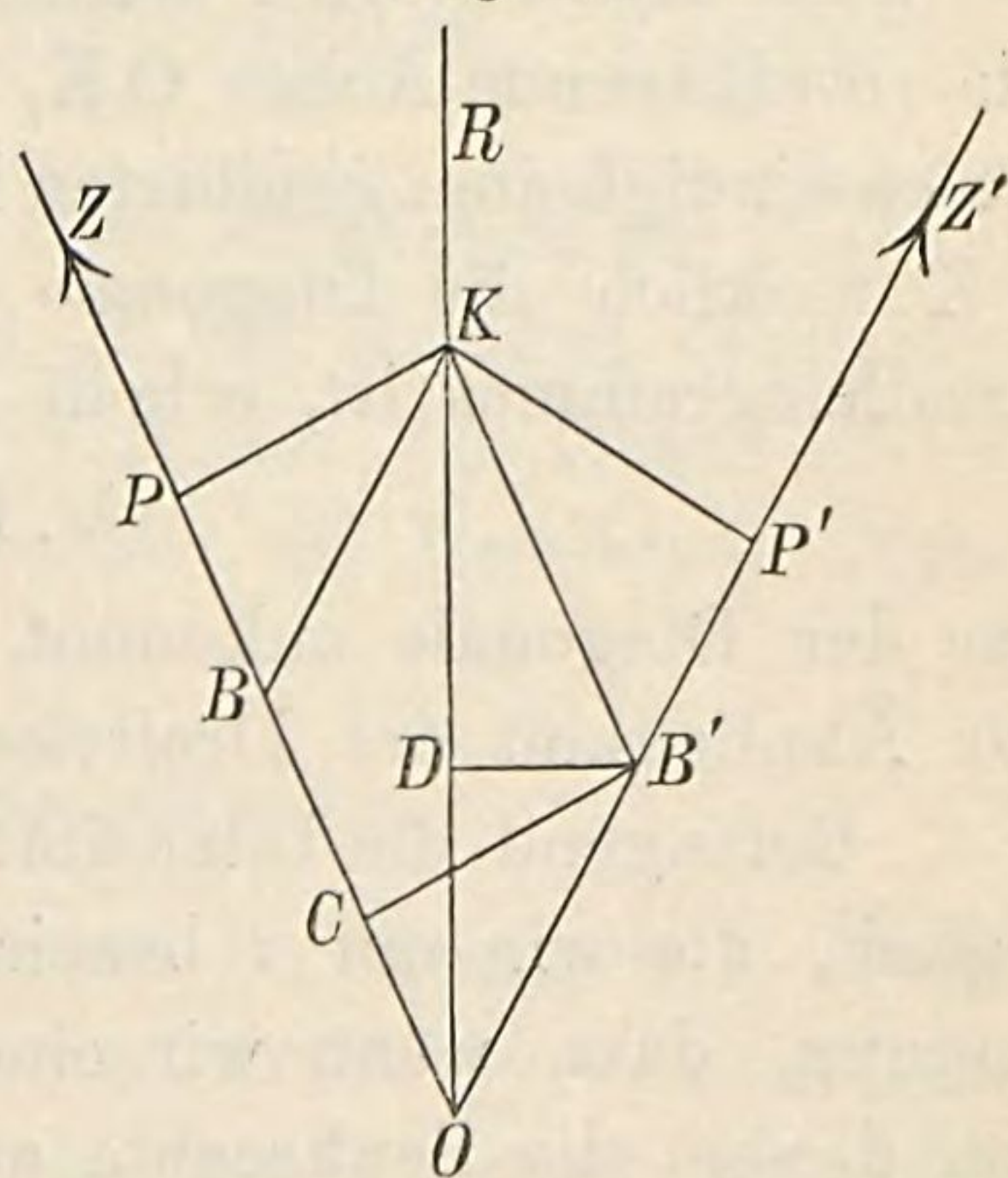
Diese Winkeldeplacierung stellen wir, nach dem Vorgange von Lagrange, analog wie bei Kräftenpaaren, durch eine Strecke von bestimmter Länge vor, die wir auf der Rotationsachse in der Weise nehmen, dass ein Beobachter, mit den Füßen am Ursprunge, den Kopf nach der Extremität der Achse gestellt, die Drehung in einem bestimmten Sinne, wie von der Linken zur Rechten sieht. Diese wird man als positiv bezeichnen, wogegen die Drehung im entgegengesetzten Sinne als negativ betrachtet wird.

Kleine Rotierungen um Achsen, die zusammentreffen.

§ 105. Wurde ein Körper mit zwei unendlich kleinen Drehungen um zwei Achsen oz , oz' begabt, welche zusammentreffen, so entsteht die Frage, ob es nicht möglich ist, diese zwei successiven Bewegungen durch eine einzige zu ersetzen und den Körper in dieselbe Lage zu bringen, wie durch die beiden successiven Drehungen, ferner die Achse zu finden, um welche die resultierende Drehung erfolgt, und wie groß die Rotierung sei. Nachstehende Überlegung führt zur Lösung.

Es seien die beiden Achsen Oz , Oz' , die sich in einem Punkte O schneiden, die Drehungsgeschwindigkeit um Oz sei durch die Strecke $OB = \lambda$, die um Oz' durch die Strecke $OB' = \lambda'$ vorgestellt. Ein Punkt in der Ebene Ozz'

Fig. 26.



befindlich soll, vermöge der einen Drehung, eine Rotierung um $Oz = \lambda$ mit dem Halbmesser KP , und dann eine zweite Rotation $= \lambda'$ um Oz' mit dem Halbmesser KP' vollziehen. Die Größe des einen Bogens wird gleich sein $\lambda \cdot KP$, die des andern Bogens gleich sein $\lambda' \cdot KP'$. Man setzt ferner beide Drehungen als unendlich klein voraus, so dass man die zwei unendlich kleinen Drehungen λ, λ' als unendlich kleine, auf der Ebene Ozz' normal stehende Gerade ansehen kann.

Setzt man nun beide Geschwindigkeiten nach dem Parallelogramme der Geschwindigkeiten zusammen, so ergibt sich die Drehungsachse und Größe der Resultante.

Nehmen wir an, wir haben die Gleichung

$$\lambda \cdot KP = \lambda' \cdot KP',$$

alsdann ist K ein Punkt der Drehungsachse, denn die von der Drehung des Punktes K um Oz und von der Drehung um Oz' beschriebenen Kreisbögen sind von entgegengesetzter Richtung, der Punkt K wird bei der zweiten Drehung einen Bogen im entgegengesetzten Sinne von der frühern beschreiben, und da sie gleich sind, so zerstören sie sich nothwendig. Der Punkt K wird also bei diesen Bewegungen in Ruhe bleiben, wodurch erwiesen erscheint, dass K auf der Rotationsachse sich befindet, und dass die Rotation des Körpers um die Achse KO vor sich geht, und wird daher diese Eigenschaft allen auf dieser Achse liegenden Punkten zukommen, das ist, dass sie bei der Bewegung immobile bleiben.

§ 106. Das Resultat dieser dem Körper ertheilten Drehungen um zwei Achsen wird demnach das sein, dass der Körper sich um die resultierende Achse OK , also um die Diagonale des aus beiden Geschwindigkeiten gebildeten Parallelogrammes dreht. Dass die Achse OK wirklich die Diagonale des aus beiden Rotierungen gebildeten Parallelogrammes ist, erhellt daraus, weil die Relation

$$\lambda \cdot KP = \lambda' \cdot KP'$$

nur der Diagonale zukommt, was leicht zu erweisen, und auch aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $KBO, KB'O$ zu ersehen ist.

Belangend die Intensität der resultierenden Drehungsgeschwindigkeit, die wir mit σ bezeichnen, so findet man sie durch die Erwägung, dass, wenn wir einen Punkt B' auf der Oz' nehmen und von diesem die Senkrechte auf OK fällen, welche diese in D trifft, und von B' eine andere Senkrechte auf Oz fällen, $B'C$, wir die Gleichung haben

$$\lambda \cdot B'C = \sigma \cdot B'D, \quad \sigma = \frac{\lambda B'C}{B'D}.$$

Denn der Punkt B' , welcher auf der Achse Oz' liegt, ändert seine Lage bei der ersten Drehung nicht, sondern erst bei der zweiten Drehung, und beschreibt um Oz die unendlich kleine Drehung $= \lambda \cdot B'C$. Die gesuchte Geschwindigkeit ist aber gleich diesem beschriebenen Wege $\lambda \cdot B'C$ getheilt durch die Distanz des Punktes B' von der Achse OK , also durch $B'D$.

Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke KBO , $KB'O$ haben wir aber

$$\begin{aligned} OB : OK &= \sin OKB : \sin OBK \\ &= \sin KOB' : \sin BOB' \\ &= B'D : B'C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OK &= OB \cdot \frac{\sin BOB'}{\sin KOB'} \\ &= \lambda \cdot \frac{\sin BOB'}{\sin KOB'} \end{aligned}$$

ein Ausdruck, welcher eben den Wert der Diagonale des aus den Seitengeschwindigkeiten errichteten Parallelogrammes ausdrückt, und repräsentiert also die Diagonale als Achse.

Die Diagonale OK erweist sich also in Richtung und Größe als die Achse der resultierenden Drehung, und man hat den Lagrange zu verdankenden Satz vom Parallelogramm der Drehungen:

Zwei unendlich kleine Rotierungen um Achsen, welche sich schneiden, können durch eine einzige Rotierung ersetzt werden, welche durch die Diagonale eines aus den componierenden Rotierungen construierten Parallelogrammes repräsentiert wird.

Man wird aber einsehen, dass alle diese Relationen nur deshalb bestehen, weil wir die unendlich kleinen, in der Rotation erzeugten Bogen als unendlich kleine Gerade normal auf der Ebene ZOZ betrachten. Bei größeren Bogen sind deshalb die Relationen nicht mehr richtig.

Rotierungen um parallele Achsen.

§ 107. Sind zwei unendlich kleine Drehungen λ , λ' um parallele Achsen OZ , OZ' dem Körper ertheilt worden, so kann diese durch eine einzige Rotation ersetzt werden. Diese ist gleich der algebraischen Summe der componierenden Rotierungen, und hat die resultierende Achse eine

solche Lage, dass die Distanzen der Componenten von derselben im verkehrten Verhältnisse wie das der Componenten stehen.

Stellen OB , OB' die Intensitäten der successiven Drehungen λ , λ' um die Achsen OZ , OZ' vor, welche in Fig. 27 a) von gleichem

Fig. 27a.

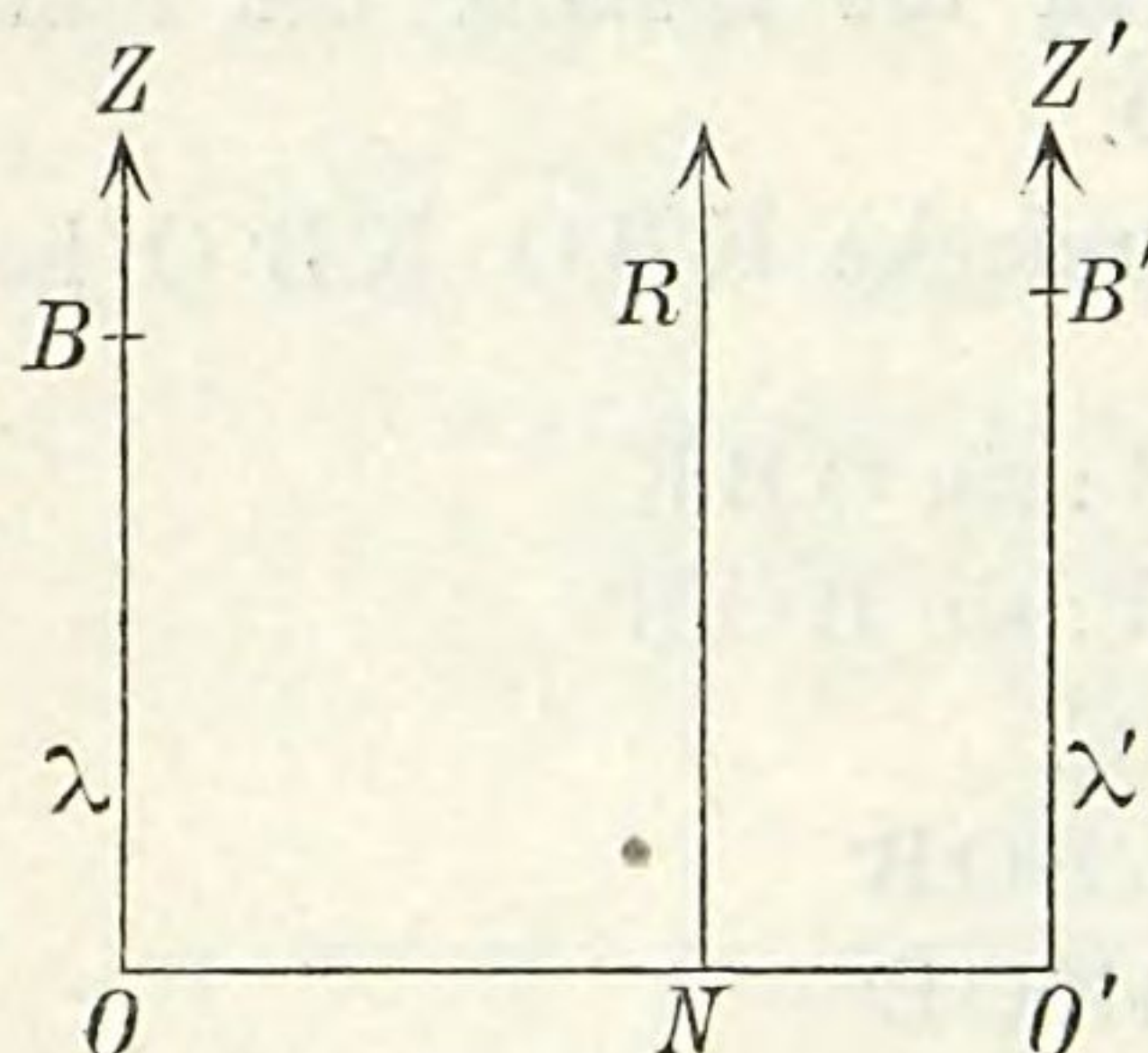
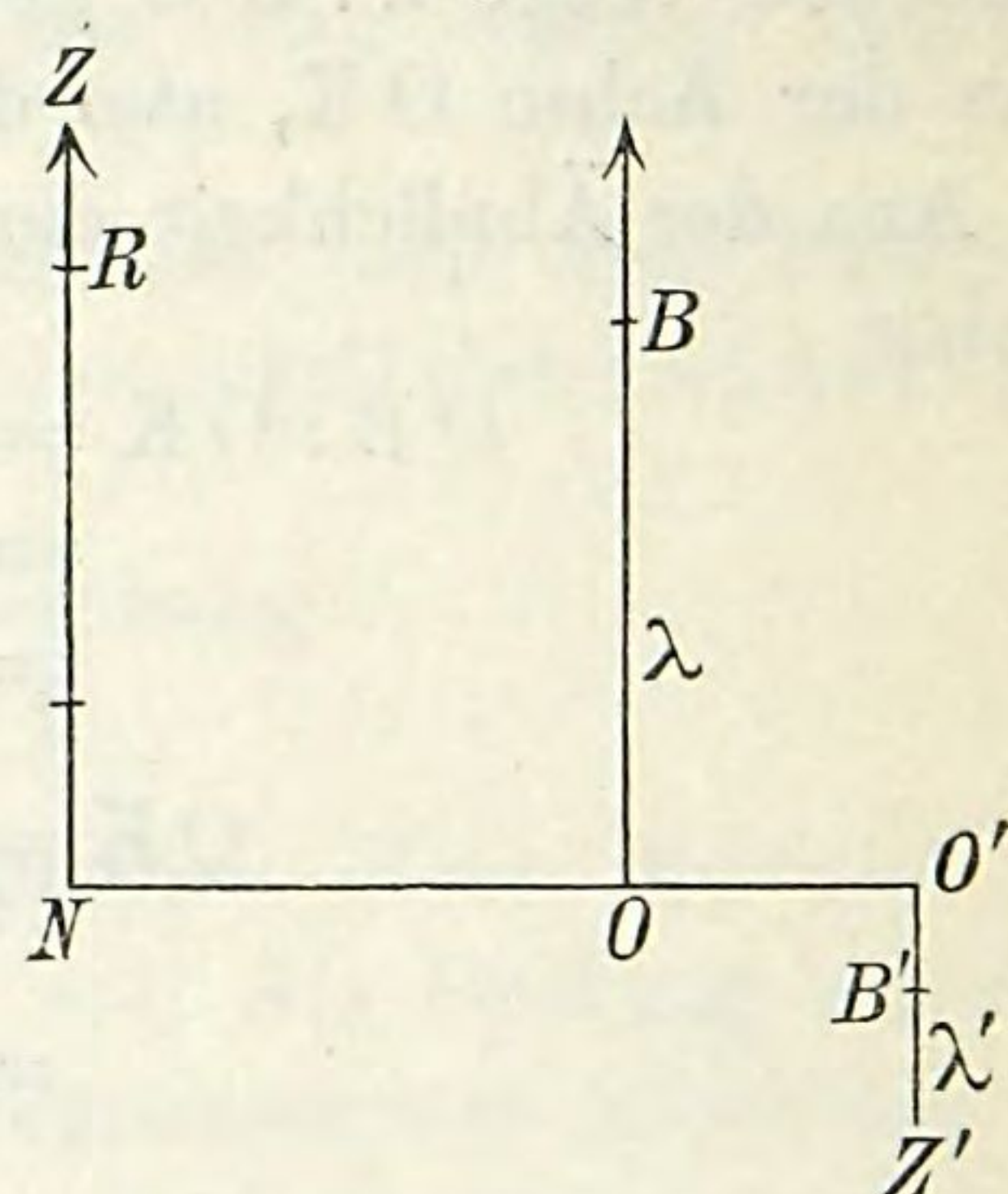


Fig. 27b.



Sinne, in Fig. 27 b) von entgegengesetztem Sinne sind, und legen wir zu beiden Achsen eine senkrechte Ebene NOO' , welche infolge beider Rotierungen eine Drehung um eine Achse beschreiben wird. Ein Punkt N dieser Ebene wird in Ruhe bleiben, und zwar dann, wenn man für ihn die Relation hat

$$\lambda \cdot ON = \lambda' \cdot O'N$$

oder

$$ON : O'N = \lambda' : \lambda,$$

da $\lambda \cdot ON$, $\lambda' \cdot O'N$ die Größen der von den componierenden Drehungen λ , λ' beschriebenen Wege vorstellen. Der Punkt N wird sich also auf der Rotationsachse befinden. Die successiven Bewegungen $\lambda \cdot ON$, $\lambda' \cdot O'N$ sind aber von entgegengesetztem Sinne, da die Distanzen ON , NO' des Punktes N von den Drehungen λ , λ' , welche in Fig. 27 a) in gleichem Sinne sind, von entgegengesetztem Sinne sind. Ist $\lambda \cdot ON$ negativ, so ist $\lambda' \cdot NO'$ positiv. Sind nun diese Producte einander gleich, so wird N in Ruhe bleiben, und so werden auch alle Punkte, die sich auf der den Achsen OZ , $O'Z'$ parallelen Achse NK befinden, in Ruhe bleiben.

Der Punkt N und in dieser Weise alle Punkte auf der Achse NK werden also in Ruhe bleiben, wenn die Distanzen NO , NO' in entgegengesetztem Sinne gerichtet sind, und man dabei die Gleichung hat

$$\lambda \cdot ON + \lambda' \cdot O'N = 0$$

Dieses alles ist der Fall, wenn beide Drehungen, wie in Figur 27 a) in demselben Sinne sind, dann wird N in die Mitte zwischen O Z und O Z' fallen, und N K wird die resultierende Achse vorstellen, um welche die einzige Drehung effectuirt wird, die jene beiden Drehungen ersetzt. Ein Punkt B', auf der Achse O Z' liegend, welcher demnach von der Achse N K um N O' entfernt ist, und seine Lage erst bei der zweiten Drehung ändert, wird bei dieser einen Weg $\lambda \cdot O O'$ beschreiben, und daher seine Drehungsintensität zum Ausdrucke hat, wenn wir diese mit σ bezeichnen,

$$\sigma = \frac{\lambda \cdot O O'}{O' N}$$

aus obigem Verhältnisse

$$\lambda' : \lambda = O N : O' N$$

folgt aber

$$\begin{aligned} \lambda' + \lambda : \lambda &= O N + O' N : O' N \\ &= O O' : O' N \end{aligned}$$

folglich

$$\sigma = \frac{\lambda \cdot O O'}{O' N} = \lambda' + \lambda.$$

Die einzige Drehung, welche die beiden successiven parallelen Drehungen ersetzt, ist also gleich der Summe jener beiden Drehungen $\lambda + \lambda'$ und ist diesen parallel.

§ 108. Sind die Drehungen, wie in Figur 27 b) von entgegengesetztem Sinne, so wird die resultierende Achse N K außerhalb der O O' fallen, und wird die Lage des Punktes N und der Achse N K gegeben sein durch die Gleichung

$$\lambda \cdot O N = \lambda' O' N$$

und man hat für die resultierende Drehung

$$\sigma = \lambda - \lambda'$$

die resultierende Drehung ist also immer der algebraischen Summe der Componenten gleich.

Drehungspaare.

§ 109. Sind die Drehungen um parallele Achsen im entgegengesetzten Sinne und gleich, so hat man ein Drehungspaar, und die obige Gleichung

$$\lambda \cdot O N = \lambda, O' N$$

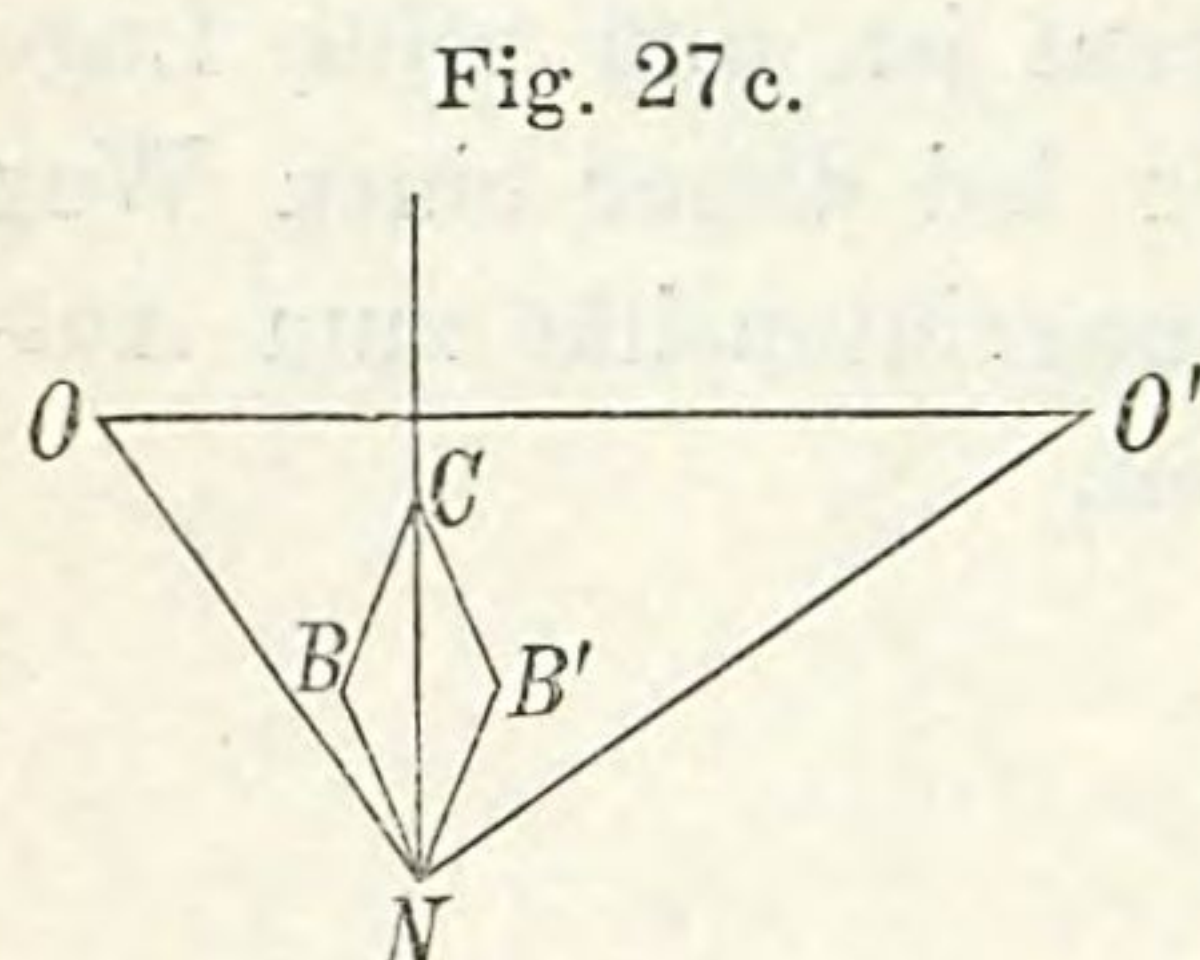
führt hier ins Absurde:

$$O N = O' N.$$

Die Gleichung verliert also hier ihre Anwendung, und zeigt eben an, dass eine resultierende Drehung in einem solchen Falle

ausgeschlossen ist. Der Körper kann durch diese zwei entgegengesetzten Drehungen nicht mehr in die frühere Lage zurückgebracht werden.

In der That, wie aus Figur 27 c) zu ersehen, wo OO' die die Achsen senkrecht durchschneidende Ebene vorstellt, wird ein Punkt



N, infolge einer Drehung, den unendlich kleinen Bogen NB , infolge der andern Drehung BC durchlaufen, welche infolge ihrer unendlichen Kleinheit als gerade Linien betrachtet werden können, und verhalten sie sich wie NO' zu NO , der Punkt wird also am Ende einer unendlich kleinen Zeit am Endpunkte der Diagonale der

Rhombe $NBCB'$ anlangen, wobei NC auf der Ebene OO' senkrecht steht, und die Proportion sich ergibt, da die Dreiecke NBC , NOO' ähnlich sind

$$NC : OO' = NB' : NO'$$

also

$$NC = \frac{OO' \cdot NB'}{NO'} = OO' \lambda',$$

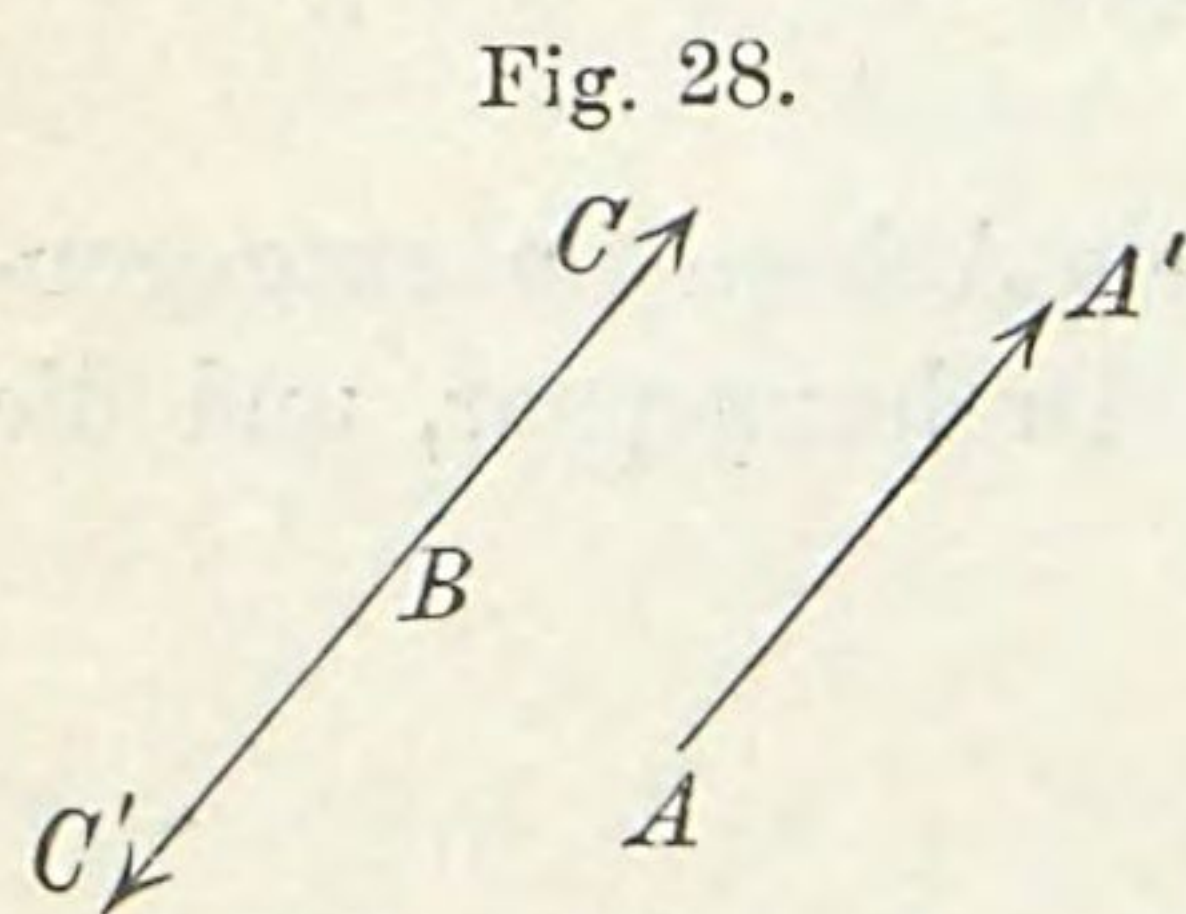
wenn die Winkelgeschwindigkeit oder die Rotation mit λ' bezeichnet wird.

Die Wirkung eines Drehungspaares besteht also in einer Translation senkrecht zur Ebene des Paares, und ist die Intensität dieser Translation gleich dem Producte der Rotation multipliciert mit der Distanz der beiden Achsen.

Diese translatorische Bewegung ist für alle Punkte des Körpers dieselbe.

Verschiebung von Drehungen.

§ 110. Stelle AA' (Figur 28) eine Rotation in Richtung und Größe vor. An einem beliebigen Punkt



des Körpers B bringen wir zwei direct entgegengesetzte, der AA' parallele, successiv effectuierte Rotierungen BC , BC' an, wodurch der Zustand des Systems nicht geändert wird. Wir bekommen aber, wie bei den Kräften, statt der einen Drehung

AA' eine Drehung versetzt nach $B = BC = AA'$ und ein Drehungspaar $BC' \cdot AA'$.

Wir können demnach alle Drehungen an den verschiedenen Punkten des Körpers nach einem beliebigen Punkte versetzen und zusammenschieben, unter der Bedingung, dass für jede verschobene Drehung noch ein Drehungspaar, also noch eine Translation hinzugefügt werde.

Wir haben nämlich in dieser Weise die Drehung AA' nach einem andern Punkte des Körpers B verschoben mit derselben Intensität $BC = AA'$, und dabei ein Drehungspaar BC' , AA' hinzugefügt, so dass nunmehr die Drehung AA' durch die Drehung $BC +$ Drehungspaar AA' , BC vollkommen ersetzt erscheint. In dieser Weise können wir mit allen Drehungen vorgehen.

Reduction aller kleiner Bewegungen.

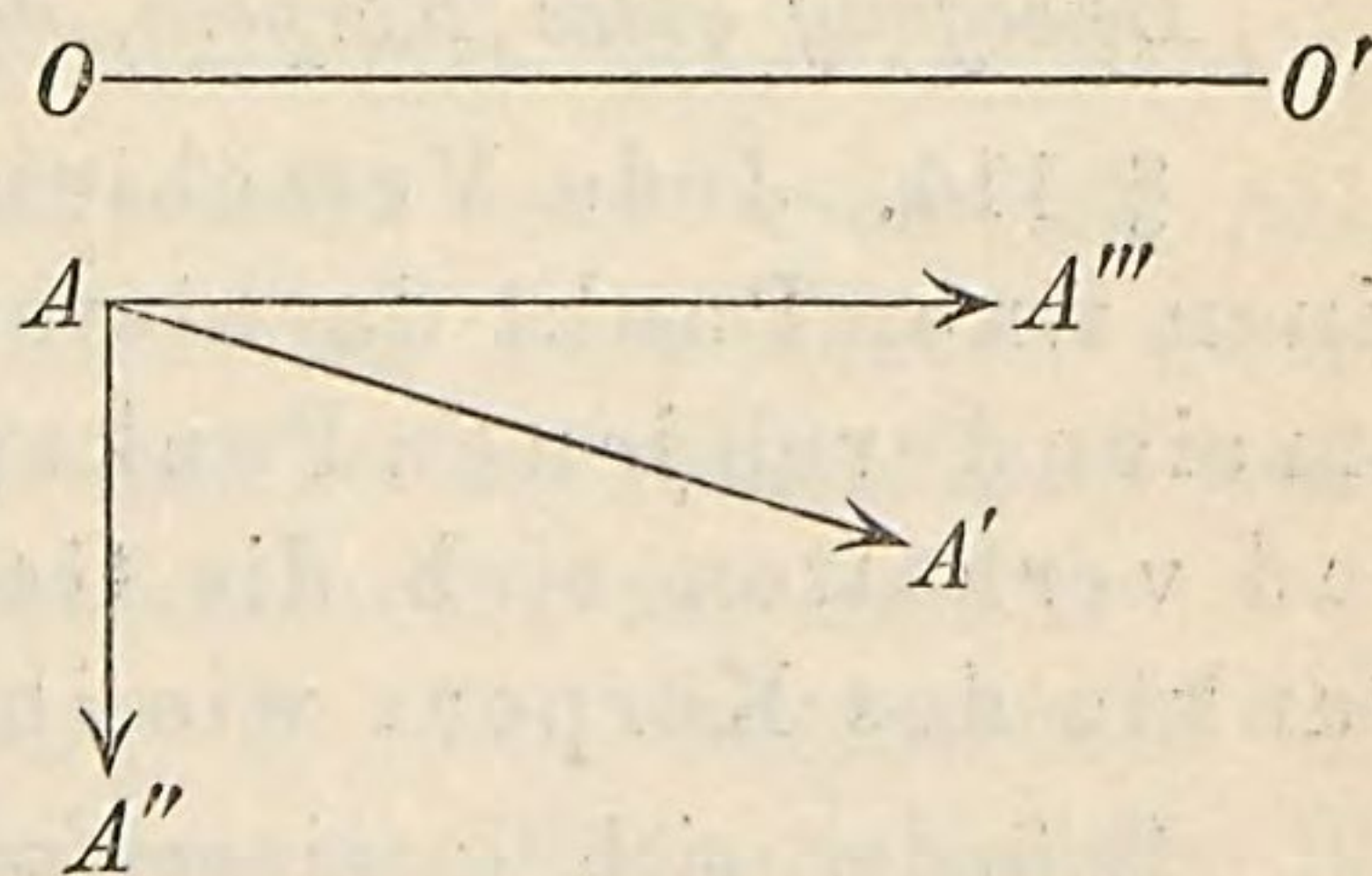
§ 111. Ist nun ein Körper von vielen kleinen Translationen und Rotierungen belebt, so schiebt man alle Rotierungen an einen beliebigen Punkt, setzt daselbst eine mit der zweiten, die beiden mit der dritten in der Weise zusammen, wie oben bei Zusammensetzung zweier Rotierungen gezeigt wurde, deren Achsen sich schneiden, und so setzt man alle an einen Punkt verschobenen Rotierungen zu einer resultierenden Rotation zusammen. Die Translationen mit den aus den Drehungspaares sich ergebenden neuen Translationen setzt man ebenfalls zu einer Resultante zusammen.

Man kann demnach immer jede beliebige Anzahl der an den verschiedenen Punkten eines Körpers angebrachten unendlich kleinen Rotierungen und Translationen auf eine einzige, durch einen gegebenen Punkt gehende Rotierung und einzige Translation reducieren.

§ 112. Man kann aber die Reduction so vornehmen, und infolge dessen den Punkt, wohin die Drehungen zu verschieben sind, so erhalten, dass die Drehungsachse parallel wird der Translation.

Gesetzt, dass die Reduction der Rotationen ein Resultat herbeigeführt habe, wonach die Achse der Rotierung die Richtung OO' , die Translation die Richtung AA' hat, und stelle OO' auch die Größe der Drehung vor. So zerlegen wir diese Translation in zwei

Fig. 29.



Translationen, die eine AA'' parallel der Rotation OO' , die andere darauf senkrecht, die senkrechte Translation AA'' betrachten wir als ein Drehungspaar, vereinigen es mit der vorhandenen Drehung OO' zu einer Rotation von derselben Größe und Richtung wie OO' , wodann aber die Drehungsachse nicht mehr durch O geht, sondern parallel nach einem anderen Punkte verschoben wird. Die Translation ist aber parallel der Achse der Rotierung OO' .

Diese Bewegung nennt man Helicoidal-Bewegung.

Die Achse der Rotierung, zu der man bei dieser Reduction gelangt, nennt man Spontanachse der Rotation.

§ 113. Alle diese Zusammensetzungen setzen, wie wir bereits hervorgehoben, voraus, dass die Bewegungen unendlich klein sind.

Würde man endliche Bewegungen in dieser Weise zusammensetzen, so würden die gehäuften Fehler das Resultat modificieren und dieses würde nicht mehr richtig sein. Continuirliche endliche Bewegungen, welche während einer endlichen Zeit vor sich gehen, sei es parallel einer festen Ebene, seien es continuirliche Drehungen um einen festen Punkt oder allgemeine continuirliche Bewegungen, werden wir im zweiten Bande besprechen.

Hier wollen wir kurz andeuten, dass man eine allgemeine continuirliche Bewegung sich in eine unendlich große Zahl unendlich kleiner Bewegungen getheilt denkt, jede kleine Bewegung wird in eine Rotation und eine der Achse derselben parallele Translation zerlegt, alle Translationen werden zusammengesetzt, und die Drehungen ebenfalls. Jede Drehung wird ihre Spontanachse haben, und alle Spontanachsen bilden gewisse Flächen.

Bewegung eines Körpers, der einen fixen Punkt präsentiert.

§ 114. Jede Verschiebung eines soliden Körpers, der einen fixen Punkt darbietet, kann immer auf eine Drehung um eine durch jenen Punkt gehende Achse reducirt werden, und verhalten sich die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte des Körpers wie ihre Distanzen von der Achse.

Befindet sich in einem soliden Körper ein fixer Punkt M , so beschreiben wir um diesen Punkt als Mittelpunkt mit einem beliebigen Radius eine Sphäre. Zwei Punkte noch reichen hin, um die Lage des Körpers zu bestimmen.

Betrachten wir also auf der beschriebenen Kugel irgend eine krumme Linie AA' , welche invariabel mit dem Körper verbunden,

und bei der Deplacierung des Körpers in die Position BB' gekommen ist.

Auf den Mitten der Bogen größter Kreise AB und $A'B'$ errichten wir Bogen normaler größter Kreise, die sich in N schneiden.

Unser obiger Satz behauptet nun, dass dieses Bringen des Körpers in die neue Lage dadurch erzielt wurde, dass wir den Körper um die Achse MN gedreht haben, so dass alle Punkte, welche auf dieser Achse liegen, bei dieser Drehung ihre frühere Lage beibehalten haben und mithin in Ruhe geblieben sind.

In der That, die sphärischen Dreiecke ANA' , BNB' sind einander gleich, da ihre respectiven Seiten paarweise einander gleich und in derselben Ordnung gestellt sind. Die Seite NA ist gleich NB , ebenso $NA' = NB'$, indem der Schnittpunkt N auf einem Bogen liegt, welcher auf AB in dessen Mitte senkrecht steht, mithin das Dreieck ANB gleichschenkelig ist.

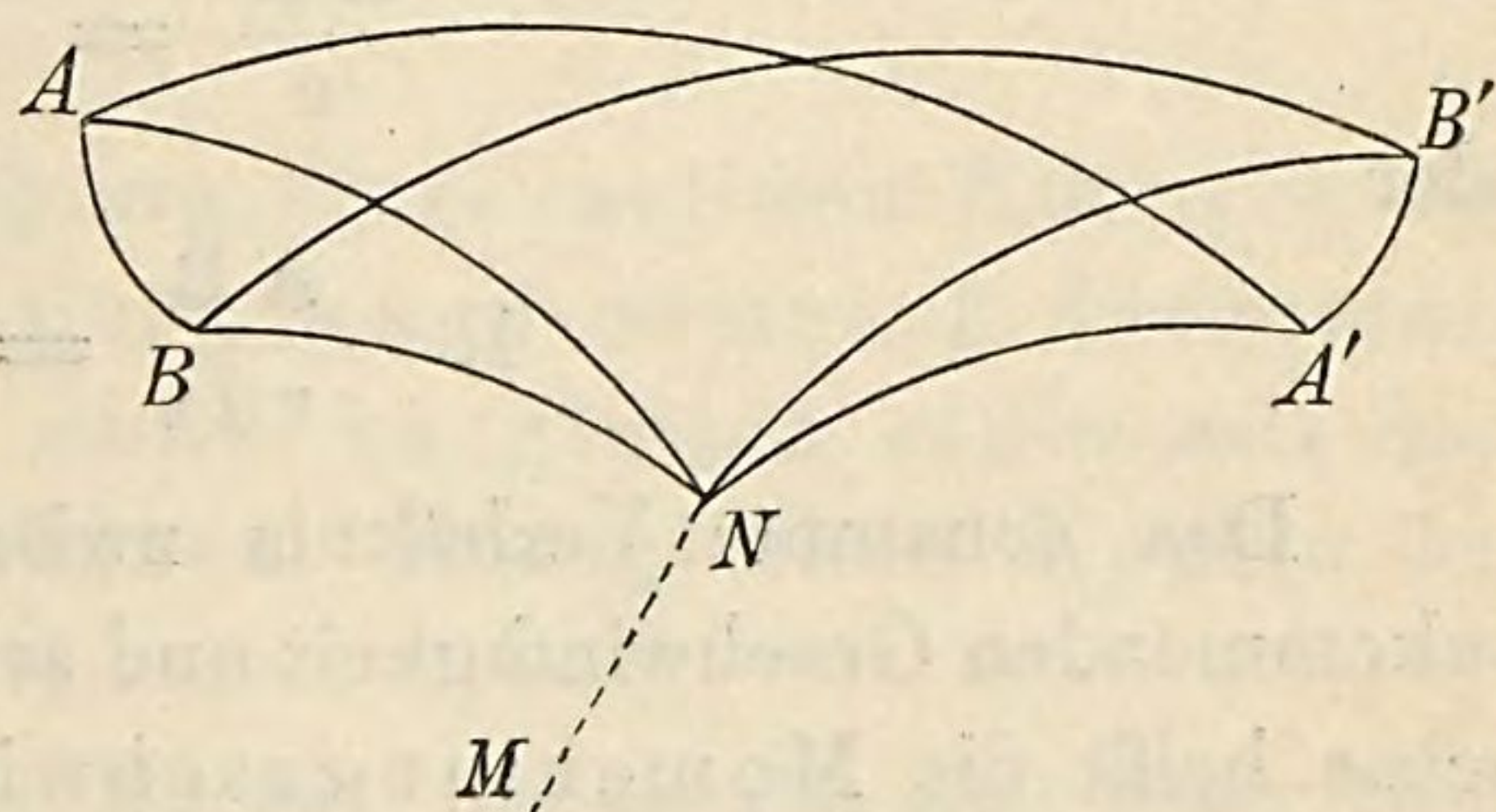
Dreht man daher ANA' um die Achse MN um den Winkel ANB , so kommt der Punkt A auf B , A' auf B' , und die Figur ANA' fällt mit BNB' zusammen. Der Körper kommt also durch die Bewegung der Figur ANA' von seiner ursprünglichen Lage in die neue Lage. Die Rotationsachse MN ist der Durchschnitt zweier Ebenen, welche auf den Mitten der vom Körper beschriebenen Strecken normal stehen.

Sind die beiden Lagen einander unendlich nahe, entsprechend den Zeiten t , $t + dt$, sind also AA' , BB' zwei unendlich nahe Lagen derselben, mit dem Körper invariabel verbundenen Curve, alsdann wird die Achse MN einer Grenzlage zustreben. Man nennt nach Poinso die Achse MN die Momentanachse zur Zeit t .

Die Momentanachse der Rotation ist der Durchschnitt der Ebenen, welche auf den von den Punkten des Körpers bei der Bewegung beschriebenen Wegen AB , $A'B'$, und überhaupt von den verschiedenen Punkten beschriebenen Wegen normal stehen.

§ 115. Die Geschwindigkeiten der Punkte A , A' sind die Grenzen der Verhältnisse $\frac{AB}{dt}$, $\frac{A'B'}{dt}$, und deren Winkelgeschwin-

Fig. 30.



digkeit wird durch die Ausdrücke

$$\frac{AB}{dt} : r, \quad \frac{A'B'}{dt} : r'$$

vorgestellt, wo unter r, r' die respectiven Distanzen der Punkte A, A' von der Momentanachse MN verstanden werden.

Da nun allen Punkten des Körpers die gleiche Winkelgeschwindigkeit zukommt, so hat man

$$\frac{AB}{r} = \frac{A'B'}{r'}$$

oder

$$1. \quad \frac{AB}{r dt} = \frac{A'B'}{r' dt}$$

Das constante Verhältniß zwischen der einem Körperpunkte zukommenden Geschwindigkeit und seiner Distanz von der Momentanachse heißt die Momentangeschwindigkeit der Drehung.

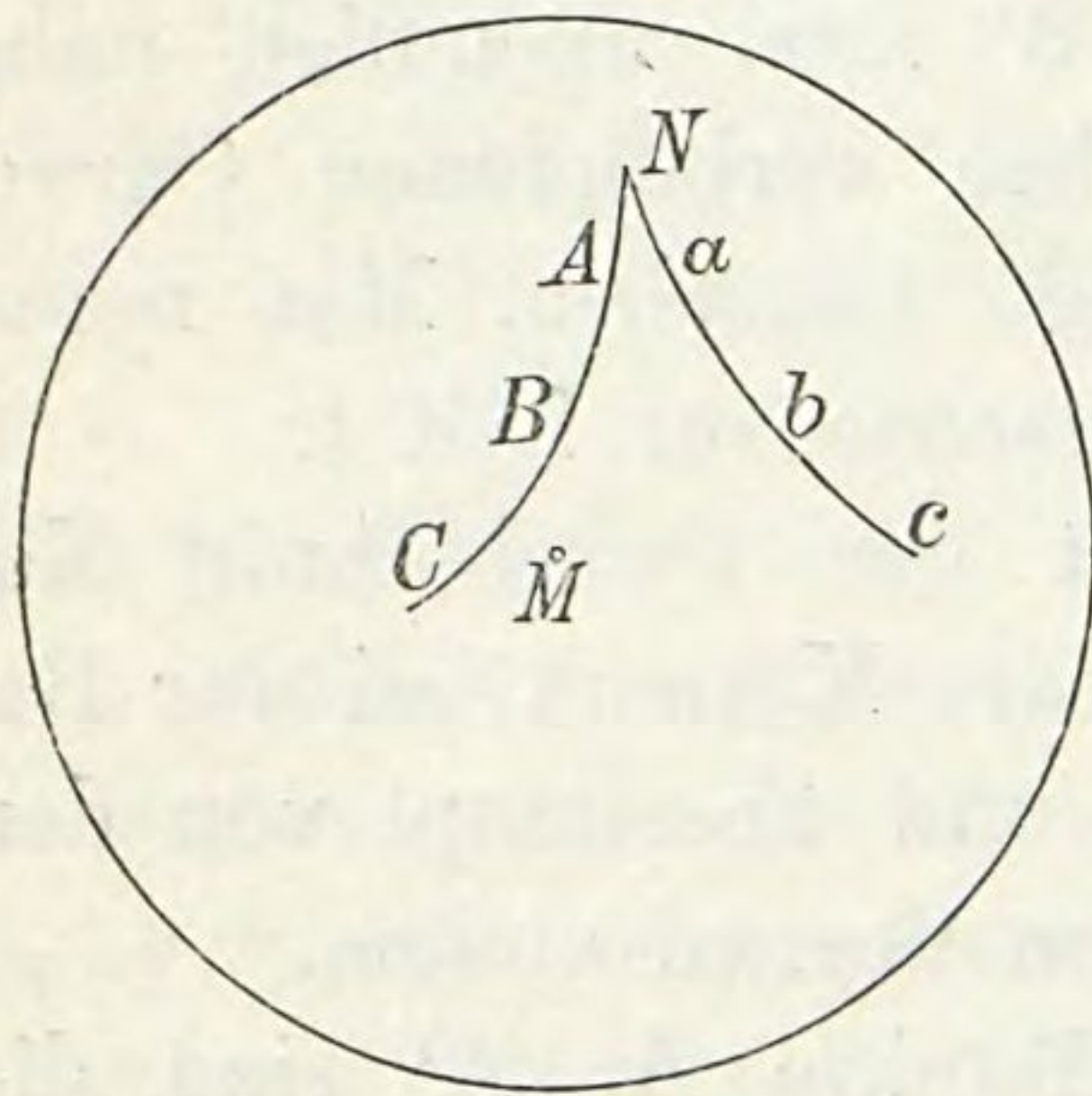
Lässt man in der Gleichung 1 die Größe dt weg, so sieht man dass die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte sich wie ihre Distanzen von der Momentanachse verhalten, und dass daher den Punkten der Momentanachse die Geschwindigkeit gleich Null zukommt, was wir eben oben behauptet. Obiges Theoreme ist also bewiesen.

§ 116. Präsentiert ein solider Körper in Bewegung einen fixen Punkt, so ändert die Momentanachse fortwährend ihre Richtung im Körper und im Raume.

Diesen von Poincot aufgestellten Lehrsatz findet man durch folgende Überlegung.

Wir beschreiben um den fixen Punkt M eine Sphäre. N, A, B, C , stellen Schnittpunkte der Momentanachsen in den Epochen $t, t + dt, t + 2dt \dots$ im Raume betrachtet. N, a, b, c stellen Punkte vor, in welchen dieselben Achsen gleichzeitig zur Epoche t den Körper durchschneiden. Nach Verlauf unendlich kleiner Zeittheile $dt, 2dt \dots$, während welcher der Körper um eine und die andere Achse unendlich kleine Drehungen vollzogen, sind die Punkte a und A , dann b und B und schließlich c und C zusammengefallen, so dass in jedem folgenden unendlich kleinen Zeittheile eine neue Gerade im Raume Momentanachse geworden ist. Früher war MN Momentanachse, dann sind in

Fig. 31.



den $t + dt$, $t + 2dt$ MA , MB , MC successiv Momentanachsen. Die beiden Curven sind tangierend, und stellen wir uns den Complex der Momentanachsen als einen Kegel mit der Spitze in M vor, so wird der bewegliche Kegel der im Körper aufeinander folgenden Momentanachsen $MNabc$ tangierend zu dem festen Kegel $MNABC$ der Momentanachsen im Raume sein, und bis auf ein unendlich kleines zweiter Ordnung sind die unendlich kleinen Bogen NA , Na gleich und superpassabel. Die beiden Kegel rollen demnach ohne zu gleiten einer auf dem andern.

Die allgemeine Bewegung eines soliden Körpers, der einen fixen Punkt präsentiert, kann demnach dargestellt werden durch das Rollen ohne zu gleiten eines mit dem Körper invariabel verbundenen, beweglichen Kegels auf einem fixen Kegel.

§ 117. Ist die Achse fix im Körper, hat sie also eine feste Lage, so ist sie es nothwendig im Raume. Sieht man daher eine Achse, um die sich ein Körper dreht, mobil im Raume und scheinbar fix im Körper, kann man mit Sicherheit schließen, dass die reelle Achse im Körper auch Momentanachse, und nicht, wie es bloß scheint, fix ist. So wechselt die Rotationsachse der Erde jeden Augenblick ihre Richtung, was wir aus der Precession der Nachtgleichen ersehen. Deshalb muss die Achse im Innern der Erde nur Momentanachse sein. Der Pol ist nicht absolut fix auf der Oberfläche. Er beschreibt einen sehr kleinen Kreis vom Durchmesser, $0^m. 28$.

Allgemeine Bewegung eines völlig freien Körpers.

§ 118. Die allgemeine Bewegung eines soliden völlig freien Körpers reducirt sich auf eine Rotation und eine Translation.

Man nehme einen beliebigen Punkt A , ertheilt ihm eine Translation in seine finale Lage. Um nun den Körper in seine definitive Lage zu bringen, wird man den Körper deplacieren, dabei aber den Punkt A als fix belassen, welche Deplacierung aber dargestellt wird durch eine Drehung des Körpers um eine durch den fixen Punkt gehende Achse.

Man kann, wie wir wissen, den Punkt A so wählen, dass die Rotationsachse parallel der Translation ist. Aber dann wird der Körper um eine bestimmte Achse sich drehen, und längs dieser Achse gleiten.

Die allgemeine unendlich kleine Bewegung eines soliden Körpers wird demnach reducirt auf eine Helicoidalbewegung, also auf eine Rotation und eine Translation längs der Rotationsachse.

Die Achsen dieser successiven Drehungen werden gleitende Momentanachsen genannt. Auch diese Momentanachsen sind im Körper und im Raume, und bilden zwei tangierende Regelflächen, von denen die eine im Körper mit demselben invariabel verbunden und beweglich, und die andere fix im Raume ist, und beide Regelflächen auf einander rollen ohne zu gleiten.

Dieser Lehrsatz ist von Poncelet.

Vierzehntes Capitel.

Theilweise Begründung der vorigen Sätze.

§ 119. Wir wollen schließlich die aus geometrischen Betrachtungen hergeleiteten Sätze hier theilweise analytisch begründen.

Betrachten wir also einen Körper in Bewegung, welcher einen festen Punkt darbietet. Wir nehmen diesen fixen Punkt O , welcher in Ruhe zu verbleiben hat, zum Ursprunge dreier rechtwinkliger Achsen Ox , Oy , Oz ; x , y , z seien die Coordinaten irgend eines Punktes M des soliden Körpers, bezogen auf diese Achsen. Gleichzeitig ziehen wir durch denselben Ursprung O ein durch denselben gehendes Coordinatensystem Ox_1 , Oy_1 , Oz_1 , welches invariabel mit dem Körper verbunden ist, so dass es sich gleichzeitig mit dem Körper mitbewegt, und bezeichnen die Coordinaten des Punktes M bezüglich dieser beweglichen Achsen mit x_1 , y_1 , z_1 .

§ 120. Für die Transformierung der Coordinaten eines Systems ins andere, bestehen gewisse Formeln, die aus der analytischen Geometrie bekannt sind, nämlich

$$1. \quad \begin{cases} x = a x_1 + b y_1 + c z_1 \\ y = a' x_1 + b' y_1 + c' z_1 \\ z = a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1 \end{cases}$$

Dabei versteht man unter a , b , c , a' , . . . die Cosinus der Winkel, welche die Achsen des festen Coordinatensystems mit den des beweglichen Systems einschließen. Es sind nämlich

$$\begin{aligned} \cos x \circ x_1 &= a, & \cos x \circ y_1 &= b, & \cos x \circ z_1 &= c \\ \cos y \circ x_1 &= a', & \cos y \circ y_1 &= b', & \cos y \circ z_1 &= c' \\ \cos z \circ x_1 &= a'', & \cos z \circ y_1 &= b'', & \cos z \circ z_1 &= c'' \end{aligned}$$

Zwischen diesen neun Cosinus bestehen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 2. \quad & \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \end{cases} \\
 3. \quad & \begin{cases} bc + b'c' + b''c'' = 0 \\ ac + a'c' + a''c'' = 0 \\ ab + a'b' + a''b'' = 0 \end{cases} \\
 4. \quad & \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ferner bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 5. \quad & \begin{cases} x_1 = ax + a'y + a''z \\ y_1 = bx + b'y + b''z \\ z_1 = cx + c'y + c''z \end{cases} \\
 6. \quad & \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Bei einer Bewegung des Körpers ändern sich die Coördinaten x_1, y_1, z_1 eines Punktes nicht. Diese Coördinaten x_1, y_1, z_1 ändern sich von einem Punkte des Körpers zum andern, bleiben aber für denselben Punkt während der Bewegung beständig dieselben.

Bei der Bewegung des Körpers ändern sich ferner für einen Punkt die Coördinaten x, y, z des festen Systems. Die Größen $a, b, c, a' \dots$ sind für alle Punkte dieselben, sie ändern sich aber bei der Bewegung in jedem Augenblicke, sind also in jedem Augenblicke für alle Punkte des Körpers gleichmäßig geändert. Die Coördinaten des festen Systems x, y, z , wie die Größen $a, b, c, a' \dots$ sind also Functionen der Zeit.

§ 121. Differenziert man die Gleichungen 1 bezüglich der Zeit so hat man

$$7. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x_1 \frac{da}{dt} + y_1 \frac{db}{dt} + z_1 \frac{dc}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = x_1 \frac{da'}{dt} + y_1 \frac{db'}{dt} + z_1 \frac{dc'}{dt} \\ \frac{dz}{dt} = x_1 \frac{da''}{dt} + y_1 \frac{db''}{dt} + z_1 \frac{dc''}{dt} \end{cases}$$

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sind, wie man aus früherem weiß, die Projectionen der Geschwindigkeit des Punktes M nach den Achsen Ox, Oy, Oz ,

und diese Formeln bestimmen diese Projectionen der Geschwindigkeit des Punktes M nach den festen Achsen in einem beliebigen Zeitpunkte, wenn man die Größen $a, b, c, a' \dots$ in Function der Zeit kennt.

§ 122. Um die Projectionen der Geschwindigkeit des Punktes M auf die beweglichen Achsen Ox_1, Oy_1, Oz_1 zu erlangen, kann man nicht $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt} \dots$ nehmen, da die Größen x_1, y_1, z_1 constant und ihre Differenziale gleich Null sind.

Man gelangt aber zu ihrer Kenntniss, wenn man die Projectionen der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ auf jede der beweglichen Achsen projiciert, da die Projection einer Geschwindigkeit v auf eine Gerade gleich ist der Summe der Projectionen der Componenten von v auf dieselbe Gerade.

Bezeichnet man daher die Projectionen der Geschwindigkeit des Punktes M auf die beweglichen Achsen Ox_1, Oy_1, Oz_1 mit u, v, w und die Geschwindigkeit des Punktes M mit V , so hat man für die Projectionen auf Ox_1 , wenn man die Werte von $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ aus 7 einsetzt,

$$u = a \frac{dx}{dt} + a' \frac{dy}{dt} + a'' \frac{dz}{dt}$$

und daher

$$8. \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \left[a \frac{da}{dt} + a' \frac{da'}{dt} + a'' \frac{da''}{dt} \right] x_1 \\ \quad + \left[a \frac{db}{dt} + a' \frac{db'}{dt} + a'' \frac{db''}{dt} \right] y_1 \\ \quad + \left[a \frac{dc}{dt} + a' \frac{dc'}{dt} + a'' \frac{dc''}{dt} \right] z_1 \end{array} \right.$$

Differenziert man aber die Gleichungen 2, so hat man

$$9. \quad \left\{ \begin{array}{l} a \frac{da}{dt} + a' \frac{da'}{dt} + a'' \frac{da''}{dt} = 0 \\ b \frac{db}{dt} + b' \frac{db'}{dt} + b'' \frac{db''}{dt} = 0 \\ c \frac{dc}{dt} + c' \frac{dc'}{dt} + c'' \frac{dc''}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

Differenziert man auch die Gleichungen 3, so hat man

$$10. \begin{cases} c \frac{db}{dt} + c' \frac{db'}{dt} + c'' \frac{db''}{dt} = - \left[b \frac{dc}{dt} + b' \frac{dc'}{dt} + b'' \frac{dc''}{dt} \right] = p \\ a \frac{dc}{dt} + a' \frac{dc'}{dt} + a'' \frac{dc''}{dt} = - \left[c \frac{da}{dt} + c' \frac{da'}{dt} + c'' \frac{da''}{dt} \right] = q \\ b \frac{da}{dt} + b' \frac{da'}{dt} + b'' \frac{da''}{dt} = - \left[a \frac{db}{dt} + a' \frac{db'}{dt} + a'' \frac{db''}{dt} \right] = r \end{cases}$$

wenn man nämlich die Werte eines Gliedes in diesen Gleichungen mit p, q, r bezeichnet.

Setzt man die Werte von 10 in 8 ein und berücksichtigt die Gleichungen 9, so findet man $u = qz_1 - ry_1$; ähnliche Werte findet man für die Projectionen von V auf die Achsen Oy_1, Oz_1 und man hat

$$11. \begin{cases} u = qz_1 - ry_1 \\ v = rx_1 - pz_1 \\ w = py_1 - qx_1 \end{cases}$$

§ 123. Aus diesen Gleichungen können wir diejenigen Punkte des Körpers finden, für welche zur Zeit t die Geschwindigkeit gleich Null ist, welche allein also bei der Bewegung aller Punkte des Körpers zur Zeit t in Ruhe verbleiben.

Setzen wir in den Gleichungen 11 $u = 0, v = 0, w = 0$, so haben wir

$$12. \begin{cases} u = qz_1 - ry_1 = 0 \\ v = rx_1 - pz_1 = 0 \\ w = py_1 - qx_1 = 0 \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen reducieren sich auf zwei:

$$13. \frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r}.$$

Diese Gleichungen stellen eine gerade Linie vor, auf welcher sich alle Punkte des Körpers befinden, die während der Bewegung zur Zeit t in Ruhe verbleiben.

Diese durch den Ursprung, also den fixen Punkt O gehende gerade Linie, die wir mit Oi bezeichnen, ist also zur Zeit t , während eines Augenblickes, Umdrehungsachse des Körpers und ist eben die, die wir als Momentanachse der Drehung bezeichnet.

Diese Momentanachse Oi , deren Gleichungen in 13 gegeben sind, bilden mit den beweglichen Achsen Winkel, deren Cosinus nachstehende Ausdrücke haben:

$$14. \quad \begin{cases} \cos Oi x_1 = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \\ \cos Oi y_1 = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \\ \cos Oi z_1 = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \end{cases}$$

wie dieses aus der analytischen Geometrie bekannt ist. So lange p, q, r nicht geändert werden, bleibt auch dieselbe Momentanachse, trifft den Körper in denselben Punkten und bleibt also unbeweglich. Mit der Änderung jener Größen tritt auch eine andere Momentanachse an die Stelle der früheren.

§ 124. Für die Geschwindigkeit des Punktes M , die wir mit V bezeichnen, hat man

$$\begin{aligned} 15. \quad V^2 &= u^2 + v^2 + w^2 = \\ &= (qz_1 - ry_1)^2 + (rx_1 - pz_1)^2 + py_1 - qx_1)^2 = \\ &= (p^2 + q^2 + r^2) (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (px_1 + qy_1 + rz_1)^2. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Distanz des Punktes M vom fixen Punktes O mit ρ und die Größe $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ mit ω , so hat man, da $\rho^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ ist,

$$16. \quad V^2 = \omega^2 \rho^2 - (px_1 + qy_1 + rz_1)^2.$$

Bezüglich der Bestimmung der Größe $(px_1 + qy_1 + rz_1)^2$ bemerken wir Folgendes:

Wir sehen aus den Gleichungen 14, dass

$$\frac{p}{\omega}, \quad \frac{q}{\omega}, \quad \frac{r}{\omega}.$$

die Cosinus der Winkel sind, welche die Momentenachse Oi mit den Achsen Ox_1, Oy_1, Oz_1 einschließen.

Die Distanz $MO = \rho$ bildet ferner mit den Achsen Ox_1, Oy_1, Oz_1 Winkel, deren Cosinus zum Ausdrucke haben

$$17. \quad \begin{cases} \cos MO x_1 = \frac{x_1}{\rho} \\ \cos MO y_1 = \frac{y_1}{\rho} \\ \cos MO z_1 = \frac{z_1}{\rho} \end{cases}$$

Daher hat man für den Cosinus des Winkels, den die Momentenachse Oi mit MO einschließt

$$18. \quad \cos . MOi = \frac{px_1}{\omega \rho} + \frac{qy_1}{\omega \rho} + \frac{rz_1}{\omega \rho}.$$

Die obige Gleichung für V^2 wird demnach

$$\begin{aligned} 19. \quad V^2 &= \omega^2 \rho^2 - \omega^2 \rho^2 \cos^2 M O i \\ &= \omega^2 \rho^2 (1 - \cos^2 M O i) \\ &= \omega^2 \rho^2 \sin^2 M O i \end{aligned}$$

$$20. \quad V = \omega \rho \sin M O i.$$

Fällt man von M auf die Momentanachse $O i$ eine Senkrechte, die wir mit s bezeichnen, so ist

$$21. \quad s = \rho \sin M O i.$$

Daher ist

$$22. \quad V = \omega s, \quad \omega = \frac{V}{s}.$$

Um die Bedeutung dieser Gleichung einzusehen, müssen wir Folgendes überlegen.

Zur Zeit t ist $O i$ Momentanachse. Während eines Zeittheiles dt dreht sich der Körper um diese Momentanachse, wie um eine feste Achse. Die Geschwindigkeit des Punktes M ist dazumal V , und die Winkelgeschwindigkeit, auch Rotationsgeschwindigkeit genannt, ist gleich der Geschwindigkeit des Punktes M , also gleich V , getheilt durch die Distanz dieses Punktes M , also gleich $\frac{V}{s}$.

Da wir nun in 22 haben $\omega = \frac{V}{s}$, so sieht man, dass ω die momentane Winkelgeschwindigkeit des Punktes M zur Zeit t ist.

Wir heben dabei hervor, dass V die Geschwindigkeit des Punktes M zur Zeit t vorstellt. $\frac{V}{s} = \omega$ ist dann die Winkelgeschwindigkeit oder, was dasselbe ist, die Rotationsgeschwindigkeit zur Zeit t . Die Geschwindigkeit wird, wie wir wissen, durch eine Gerade vorgestellt. Die Projectionen der Geschwindigkeit sind demnach Projectionen dieser Geraden.

§ 125. Aus den Gleichungen 14 sieht man aber, dass

$$23. \quad \begin{cases} p = \omega \cos i O x_1 \\ q = \omega \cos i O y_1 \\ r = \omega \cos i O z_1 \end{cases}$$

Daher sind p, q, r die Projectionen der Winkelgeschwindigkeit auf die Achsen $O x_1, O y_1, O z_1$.

Sind die Größen p, q, r bekannt, so kennt man die Lage der Momentanachse $O i$ bezüglich der beweglichen Achsen $O x_1, O y_1, O z_1$.

und weiß man daher, infolge des Zeichens, das man der Größe $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ gibt, den Theil der Achse Oi zu bestimmen, welcher diesen Größen entspricht. Wir betrachten diese Wurzelgröße als positiv.

Aus der Gleichung 1 ersehen wir, dass die Cosinus der Winkel zwischen den festen Achsen und den beweglichen Achsen durch die Größen $a, b, c, a' \dots$ bestimmt sind.

Man hat daher für die Cosinus der Winkel, welche die Momentanachse Oi mit den festen Achsen Ox, Oy, Oz einschließt,

$$24. \begin{cases} \cos Oix = a \cos Oix_1 + b \cos Oiy_1 + c \cos Oiz_1 \\ \cos Oiy = a' \cos Oix_1 + b' \cos Oiy_1 + c' \cos Oiz_1 \\ \cos Oiz = a'' \cos Oix_1 + b'' \cos Oiy_1 + c'' \cos Oiz_1 \end{cases}$$

daher, wenn man die Werte von $\cos Oix_1, \cos Oiy_1, \cos Oiz_1$ einsetzt,

$$25. \begin{cases} \cos Oix = \frac{ap + bq + cr}{\omega} \\ \cos Oiy = \frac{a'p + b'q + c'r}{\omega} \\ \cos Oiz = \frac{a''p + b''q + c''r}{\omega} \end{cases}$$

§ 126. Wir haben bei der geometrischen Herleitung der Bewegungen eines Körpers, der einen fixen Punkt präsentiert, den Satz aufgestellt, dass die Bewegung eines Körpers um einen fixen Punkt zurückzuführen ist, auf das Rollen ohne Gleiten eines invariabel mit dem Körper verbundenen, also mitbeweglichen Kegels, den wir K_1 nennen, als Ortes der Geraden, welche successiv Momentanachsen im Körper werden, auf einem fixen Kegel, den wir mit K bezeichnen, als Orte der Momentanachsen im Raume.

In der That erhält man die Gleichung des Kegel K_1 aus den Gleichungen 13, wenn man aus diesen die Zeit eliminiert. Die Gleichung des Kegels K erhält man, wenn man in diesen Gleichungen für x_1, y_1, z_1 , deren Werte aus 5 einsetzt, wodurch man bekommt

$$26. \frac{ax + a'y + a''z}{p} = \frac{bx + b'y + b''z}{q} = \frac{cx + c'y + c''z}{r}$$

und dann aus diesen Gleichungen die Zeit eliminiert.

Wir werden auf diesen Gegenstand bei der Theorie der relativen Bewegungen zurückkommen und daselbst alle weiteren Sätze analytisch begründen, und wird auch dort der Zusammenhang zwischen der Theorie der Zusammensetzung von Bewegungen und der Theorie der relativen Bewegungen ersichtlich sein.

Dritter Theil.

STATIK II.

Fünfzehntes Capitel.

Maß der Kräfte.

§ 127. Wirken mehrere Kräfte gleichzeitig auf einen Punkt, so ist die Wirkung einer jeden Kraft unabhängig von der Wirkung der anderen Kräfte und so zu betrachten, als wenn alle anderen Kräfte gar nicht vorhanden wären und die Kraft den Punkt im Zustande der Ruhe sollicitiert hätte.

Dieses Princip lässt keinen mathematischen Beweis zu. Es ist bewiesen in den Consequenzen, die daraus hergeleitet werden und die mit der Erfahrung vollkommen übereinstimmen, so dass es als evident betrachtet wird.

§ 128. Wir bezeichnen zwei constante Kräfte als gleich in ihrer Intensität, wenn dieselben, successive einen im Zustande der Ruhe sich befindenden Punkt angreifend, demselben zwei Bewegungen ertheilen, deren Trojectorien superposabel und so beschaffen sind, dass die in gleichen Zeiten zurückgelegten, vom Ursprunge der Bewegung gerechneten Wege einander gleich sind.

Nehmen wir nun an, es wirken gleichzeitig n -constante Kräfte, von welchen jede Kraft von gleicher Richtung, gleichem Sinne und gleicher Intensität wie eine Kraft P ist, auf einen Punkt m , im Zustande der Ruhe genommen, so wird dieser Punkt, unter dem Einflusse der Wirkung von n -gleichen Kräften, in derselben Zeit n -mal so viel Weg beschreiben, als wenn er nur von einer Kraft P sollicitiert worden wäre. Denn nach dem Principe der Unabhängigkeit der gleichzeitigen Wirkungen der Kräfte werden von n -gleichen Kräften n -gleiche Wirkungen erzeugt. Die Resultante der Kräfte, welche R heißen möge, wird demnach, als n -mal so groß als P , n -mal so viel Wirkung erzeugen als P .

Ist eine Kraft n -mal so groß als P , die andere m -mal so groß als P , so stehen die beiden Kräfte im Verhältnisse von n zu m , und wenn sie einen Punkt sollicitieren, so werden die von diesen in

gleichen Zeiten beschriebenen Wege auch im Verhältnisse von n zu m stehen.

Sind die Kräfte in einem incommensurablen Verhältnisse, so bleibt dasselbe Princip.

Wählen wir also eine constante Kraft zur Einheit, so können die anderen mit Hilfe von P gemessen werden.

Constante Kräfte verhalten sich demnach wie die vom materiellen Punkte, auf den sie wirken, in derselben Zeit beschriebenen Wege.

§ 129. Greift eine constante Kraft einen Punkt m im Zustande der Ruhe an, so ertheilt die Kraft dem Punkte eine geradlinige, gleichförmig variirte Bewegung. Die Richtung ist geradlinig, weil kein Grund vorhanden ist, weshalb die Richtung geändert werde.

Ferner ertheilt die constante Kraft dem Punkte in jedem Augenblicke einen neuen gleichen Zuwachs an Geschwindigkeit in derselben Richtung, welche im Verhältnisse der Zeit sich vermehrende gleiche Accelerationen in derselben Richtung und von gleichem Sinne addiert werden und daher nothwendig eine gleichförmig variirte Bewegung erzeugt wird.

Wie wir ferner auch früher gesehen, hat diese geradlinige und gleichförmig variirte Bewegung, wenn der Punkt vom Zustande der Ruhe ausgegangen, zum Ausdrücke

$$v = \varphi t$$

$$S = \frac{\varphi t^2}{2}.$$

Wirken also auf denselben Punkt successive zwei constante Kräfte, so ertheilen sie ihm Beschleunigungen, welche den Kräften proportional sind.

Denn Kräfte, welche auf denselben materiellen Punkt wirken, verhalten sich wie die Wirkungen, das ist wie die beschriebenen Wege. Die Wege werden dargestellt, wo eine constante Kraft wirkt, durch die Gleichung

$$S = \frac{\varphi t^2}{2},$$

wo S den beschriebenen Weg, φ die Acceleration, t die Zeit bedeutet.

Sei nun φ' die von einer anderen Kraft P' herstammende Acceleration, wird der in derselben Zeit t beschriebene Weg S' den Ausdruck haben:

$$S' = \frac{\varphi' t^2}{2},$$

folglich:

$$P : P' = S : S' = \frac{\varphi t^2}{2} : \frac{\varphi' t^2}{2} = \varphi : \varphi'.$$

Da ferner der Ausdruck für die Geschwindigkeit $v = \varphi t$ ist, wobei bei constanten Kräften die Acceleration φ constant ist und nichts anderes bedeutet, als den in der Zeiteinheit ertheilten constanten Zuwachs der Geschwindigkeit, so verhalten sich auch zwei constante Kräfte, die successive auf denselben materiellen Punkt, in Ruhe genommen, wirken, wie die von denselben am Ende derselben Zeit erlangten Geschwindigkeiten.

Masse der Körper.

§ 130. Jeder materielle Punkt enthält in sich eine gewisse Quantität Materie. Diese Quantität Materie ist die Masse des Punktes. Ein Körper ist zusammengesetzt aus materiellen Punkten und die Quantität Materie, die er enthält, macht seine Masse aus.

Seien nun $A, A', A'' \dots$ materielle Punkte und mögen gleiche, parallele und constante Kräfte auf diese Punkte während derselben Zeit wirken, so werden diese Punkte gleiche und parallele Wege mit gemeinsamer, mit der Zeit für alle Punkte gleichmäßig veränderlicher Geschwindigkeit beschreiben. Dasselbe Verhältniß wird obwalten, wenn alle Punkte durch starre Linien miteinander invariabel verbunden sind.

Diese parallelen Kräfte haben, wie wir gesehen, eine Resultante, welche gleich der Summe aller Kräfte ist, immer durch einen bestimmten Punkt geht und den Kräften parallel ist, welche Richtung der Kräfte immer sei.

Dieser Punkt wird Centrum der Masse des Körpers genannt.

§ 131. Wird nun ein solider Körper durch eine Kraft sollicitiert, welche durch das Centrum der Masse geht, so beschreiben alle seine Punkte in derselben Zeit gleiche und parallele Gerade.

Denn diese Kraft könnte in viele gleiche und parallele Kräfte decomponiert und bei den einzelnen, an Masse gleichen Punkten angebracht werden, aus welchen sich der Körper zusammengesetzt.

Würde die Richtung der Kraft nicht durch das Centrum der Masse gehen, alsdann würde die eben besprochene Wirkung nicht hervorgebracht werden und vielmehr würde alsdann eine Bewegung

der Translation im Raume und eine Rotation um das Centrum der Masse erzeugt sein.

Zwei Massen von zwei Körpern sind gleich, wenn, indem man am Centrum einer jeden Masse eine gleiche Kraft angreifen lässt, alle Punkte dieser beiden Körper gerade parallele Linien mit derselben Geschwindigkeit zurücklegen.

§ 132. Sind zwei Massen von zwei Körpern ungleich, so stehen sie in einem gewissen Verhältnisse. Nimmt man einen Massepunkt zur Einheit, so wird die Masse des einen Körpers n solche Masse-einheiten, die des anderen Körpers n' Einheiten enthalten, alsdann hat man, wenn man beide Massen mit M, M' bezeichnet,

$$M : M' = nm : n'm = n : n'.$$

Ertheilen also zwei verschiedene constante Kräfte P, P' zwei ungleichen Massen M, M' zweier Körper, beide in Ruhe befindlich, in einer und derselben Zeit dieselbe Geschwindigkeit v , so verhalten sich die Kräfte wie die Massen.

In der That sei m die Einheit der Masse, $M = n \cdot m$, $M' = n' m$, also $M : M' = n : n'$. Nennen wir p die Kraft, welche der Masseinheit in der Zeit t die Geschwindigkeit v ertheilt, so wird die Kraft P , welche der Masse $M = n \cdot m$ in derselben Zeit dieselbe Geschwindigkeit v ertheilt n -mal so groß sein als p . Ebenso wird P' , welche der Masse $M' = n' m$ dieselbe Geschwindigkeit v in derselben Zeit ertheilt, gleich sein $n' p$, folglich

$$P : P' = n \cdot m : n' m = n : n'.$$

Daher

$$P : P' = M : M'.$$

Verhältnisse von Kräften, Massen, Accelerationen, Geschwindigkeiten.

§ 133. Wir haben aber gesehen, dass constante Kräfte, die auf denselben Massepunkt, in Ruhe genommen, wirken, sich wie die ertheilten Accelerationen oder Geschwindigkeiten verhalten, die von diesem Punkte am Ende derselben Zeit erlangt wurden. Nimmt man die Kräfte P, P' , die Accelerationen φ, φ' , die in derselben Zeit ertheilten Geschwindigkeiten v, v' , so hat man, wenn die Kräfte den Punkt im Zustande der Ruhe sollicitieren, das Verhältniss

$$P : P' = v : v' = \varphi : \varphi'.$$

Wir haben also zwei Verhältnisse

$$P : P' = M : M'$$

$$P : P' = \varphi : \varphi' = v : v'.$$

Ersteres, wo in Folge der Wirkungen der constanten Kräfte auf verschiedene Massen, von diesen am Ende derselben Zeit dieselbe Acceleration oder dieselbe Geschwindigkeit erlangt wird.

Das zweite findet statt, wo Kräfte P, P' successive auf dieselbe Masse während derselben Zeit wirken, und verschiedene Accelerationen oder ungleiche Geschwindigkeiten ertheilen.

Constante Kräfte verhalten sich einerseits wie die Massen, auf welche sie wirken, andererseits wie die in derselben Zeit denselben ertheilten Accelerationen, oder denselben ertheilten Geschwindigkeiten.

Constante Kräfte also, welche, durch eine gewisse Zeit auf zwei Massen M, M' zweier Körper, beide in Ruhe genommen, wirkend, denselben Accelerationen φ, φ' oder Geschwindigkeiten v, v' ertheilen, verhalten sich wie die Producte aus den respectiven Massen multipliciert mit den denselben in derselben Zeit beigebrachten respectiven Accelerationen oder Geschwindigkeiten.

Man hat also

$$P : P' = M \varphi : M' \varphi' = M v : M' v'.$$

Dieses Verhältniß hat auch statt, wenn Kräfte, Massen, Accelerationen, Geschwindigkeiten untereinander in incommensurablen Verhältnissen stehen.

§ 134. Nimmt man die Masse M' als Einheit der Massen, φ' als Einheit der Accelerationen, v' als Einheit der Geschwindigkeiten, so dass P' Einheit der Kräfte wird, so hat man

$$P = M \varphi$$

$$P = M v.$$

Sowohl $M \varphi$ als $M v$ drücken die Intensität einer constanten Kraft aus, ersteres wenn man die Wirkung der Kraft in der Zeiteinheit nimmt, letzteres wenn die Wirkung der Kraft in einer beliebigen Zeit betrachtet wird.

Das Product $M \varphi$, also das Product der von der constanten Kraft der Masse in der Zeiteinheit ertheilten Acceleration, multipliciert mit der Masse des Körpers, ist das Maß einer constanten Kraft.

Das Product $M v$, also das Product der Masse eines Körpers, multipliciert mit der allen seinen Punkten ertheilten gemeinsamen Geschwindigkeit nennt man die Quantität der Bewegung. Eine constante Kraft wird auch gemessen durch die Quantität der Bewegung, die sie in der Zeiteinheit hervorbringt.

Man kann also obiges Verhältniß

$$P : P' = M v : M' v'$$

auch ausdrücken: Die Größen zweier constanter Kräfte, welche zwei Körper in den Centren ihrer Massen angreifen, verhalten sich wie die denselben in derselben Zeit ertheilten Quantitäten der Bewegung.

Variable Kräfte.

§ 135. Bei einer variablen Kraft, wenn die Kraft auf das Mobile in geradliniger Richtung wirkt, kann man auch als Maß der Kraft das Product $M\varphi$ nehmen.

Wir hatten nämlich für eine variable Acceleration in obigem Falle die Gleichung

$$\varphi = \frac{dv}{dt},$$

wo φ die Acceleration des Mobile am Ende der Zeit t ist.

Hier ertheilt die variable Kraft dem Mobile eine variable Acceleration, welche durch $\frac{dv}{dt}$ ausgedrückt ist. Diese variable Acceleration multipliciert mit der Masse M ist das Maß der veränderlichen Kraft.

Bezeichnen wir ferner, wenn der materielle Punkt irgend welche Bahn beschreibt und sich zur Zeit t in irgend einer Position befindet, die Kraft mit P , deren Componenten parallel nach den Achsen mit X, Y, Z , die Coordinaten des materiellen Punktes m , auf welchen die Kraft P wirkt, mit x, y, z , so wissen wir aus der Kinematik, dass die Componenten der totalen Acceleration nach den Achsen bei einem rechtwinkligen Coordinatensystem die Ausdrücke haben

$$\frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Daher werden die Componenten der Kraft nach den Achsen sein

$$1. \quad \left\{ \begin{array}{l} X = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \\ Y = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \\ Z = m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} \end{array} \right.$$

folglich

$$2. \quad \begin{cases} \frac{X}{m} = \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{Y}{m} = \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{Z}{m} = \frac{d^2 z}{dt^2} \end{cases}$$

Ferner halten wir für die Componenten des unter dem Einflusse der Kraft vom Mobile, während des Zeittheiles Δt , durchlaufenen Weges die Ausdrücke

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2}.$$

Bezeichnet man diese Componenten mit s' , s'' , s''' , und setzt die Werte aus 2. ein, so hat man

$$\begin{aligned} s' &= \frac{X}{m} \frac{\Delta t^2}{2} \\ s'' &= \frac{Y}{m} \frac{\Delta t^2}{2} \\ s''' &= \frac{Z}{m} \frac{\Delta t^2}{2}. \end{aligned}$$

Die totale Acceleration hat den Ausdruck

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2}$$

daher

$$P = m \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2}$$

Dieser Ausdruck ist das Maß einer variablen Kraft bei welchen Bewegungen immer, das Mobile möge eine geradlinige oder krummlinige Trajectorie beschreiben.

Das Maß der variablen Kraft ist das Product der totalen Acceleration multipliciert mit der Masse des Mobile.

§ 136. Kehren wir zur Gleichung einer constanten Kraft

$$P = M \varphi$$

zurück, setzen in dieser $M = 1$, so hat man

$$P = \varphi.$$

Die constante Kraft für die Masseneinheit ist also gleich der Acceleration. Diese Kraft, welche auf die Masseneinheit wirkt, wird

Accelerationskraft genannt. Acceleration und Accelerationskraft sind identisch.

Verhältnis zwischen Gewicht und Masse.

§ 137. Die Erfahrung lehrt, dass zwei schwere Körper, von welcher Form und Substanz immer, wenn sie im luftleeren Raume fallen, am Ende derselben Zeit eine und dieselbe Geschwindigkeit erlangen.

Dieser Satz war erst von Galilei entdeckt. Das Fallen der Körper, also deren Bewegung, wird nothwendig durch eine Kraft bewirkt, die wir bald näher kennen lernen werden und die, auf Massen der Körper wirkend, diese Bewegung erzeugt. Diese Kraft nennt man Gewicht. Das Gewicht eines Körpers ist seine bewegende Kraft.

Daraus ersieht man, dass die Gewichte zweier Körper proportional ihren Massen sind.

Denn für das Verhältnis zweier Kräfte, die an verschiedenen Massen wirken, haben wir

$$P : P' = M v : M' v'.$$

Da nun die erzeugte Geschwindigkeit bei den Körpern dieselbe ist, so hat man

$$P : P' = M : M'.$$

Man sieht auch, dass man aus der Gleichheit der Gewichte noch nicht auf die Gleichheit der Massen zweier heterogener Körper hätte schließen können. Dieser Schluss konnte erst in Folge erlangter Kenntniss gemacht werden, dass die Geschwindigkeit aller während derselben Zeit fallenden Körper dieselbe ist.

In der Mechanik gebraucht man folgende Einheiten: Als Einheit der Zeit nimmt man die Secunde, als Einheit der Länge das Meter, als Einheit der Kraft das Gramm oder das Kilogramm.

Sechzehntes Capitel.

Theorie der Schwere und des Schwerpunktes.

§ 138. Unter Schwere oder Gravität wird die constante Kraft verstanden, welche erfahrungsmäßig alle Körper nach dem Innern der Erde sollicitiert. Wir werden später sehen, dass diese Kraft das Weltall beherrscht, und auch Quelle und Intensität dieser Kraft näher kennen lernen. Jetzt so viel, dass diese Kraft nach

einer auf der Oberfläche der Erde, und eigentlich der ruhenden Gewässer senkrechten Richtung, Verticale genannt, wirkt.

Wird die Bewegung durch eine Unterlage oder dadurch gehindert, dass der Körper an einen Faden aufgehängt wird, so bewirkt dieses in verticaler Richtung einen Druck auf die Unterlage, oder eine Spannung auf den Faden aus.

Die Kraft der Schwere wirkt auf jeden materiellen Punkt mit constanter Intensität. Diese Intensität ist jedoch nicht dieselbe, wenn der Körper in krummliniger Bewegung begriffen ist, da, wie wir wissen, infolge dieser Bewegung sich eine besondere Kraft entwickelt, welche mit $\frac{v^2}{\rho}$ ausgedrückt wird und die Schwere vermindert. Wir werden darauf zurückkommen.

Die Erde oder das Meer ist fast kugelförmig, mithin geht die Verticale fasst genau durch den Mittelpunkt der Erde.

Ferner nimmt die Intensität der Kraft ab, wenn sich der Körper von der Oberfläche der Erde entfernt, und zwar vermindert sich die Intensität im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung des materiellen Punktes vom Mittelpunkte der Erde, und verändert sich auch mit der geographischen Breite.

Alle Körper, die wir unserer Betrachtung unterziehen, sind gegenüber dem Halbmesser der Erde von sehr kleinen Dimensionen. Daher kann man: 1. Die von allen einzelnen Punkten ausgehenden Verticalen als einander parallel, 2. die Intensität der Schwere für alle einzelnen Punkte des Körper als constant betrachten.

§ 139. Die Kraft der Schwere erstreckt ihre Wirkung gleichmäßig auf sämtliche im Körper enthaltene, äußere und innere materielle Punkte, sie mögen getrennt oder fest miteinander liiert sein. Jeder einzelne Punkt wird von dieser Kraft gleichmäßig getroffen. Es kostet dieselbe Kraft, einen Körper zu tragen, und der Körper übt denselben Druck aus, er möge ein starres Punktsystem bilden, oder in die möglichst kleinsten Theile aufgelöst sein.

Decomponiert man daher den Körper in einzelne materielle Punkte, so haben alle auf die einzelnen materiellen Punkte des Körpers wirkenden Schwerkkräfte eine und dieselbe, auf der Oberfläche der Erde vertical stehende Richtung, und sind alle Richtungen in gleichem Sinne und einander parallel.

Alle einzelnen parallelen Kräfte setzten sich demnach zu einer einzigen, den Körper angreifenden resultierenden Kraft zusammen, deren Richtung den einzelnen Kräften parallel ist.

Die Intensität dieser Resultante ist gleich der Summe aller einzelnen Kräfte, und ihr Angriffspunkt fällt, wie aus den Sätzen über parallele Kräfte bekannt ist, in das Centrum der parallelen Kräfte.

§ 140. Die Resultante aller einzelnen Kräfte wird Gewicht des Körpers genannt. Das Centrum der parallelen Kräfte nennt man den Schwerpunkt des Körpers. Die Acceleration der Kraft der Schwere wird mit g bezeichnet, und werden wir sie später näher kennen lernen. Der Schwerpunkt ist der Angriffspunkt der von der Schwere herkommenden, die einzelnen Punkte des Körpers sollicitierenden parallelen Kräfte.

Wir wissen auch, dass das Centrum der parallelen Kräfte von der Richtung der componenten unabhängig ist. Der Schwerpunkt ist daher auch im Körper unveränderlich immer einer und derselbe, man möge dem Körper welche Lage immer geben. Die Richtung der Resultante, also des Gewichtes, geht immer durch den Schwerpunkt. Wird daher der Schwerpunkt fixiert, so ist der Körper im Gleichgewichte, und wird der Körper an einem biegsamen Faden einmal an einem Punkte des Körpers, und ein zweitesmal an einem andern Körperpunkte aufgehängt, so wird die Richtung des Fadens jedesmal durch den Schwerpunkt gehen und der Schnittpunkt beider Richtungen bestimmt demnach die Lage des Schwerpunktes. Die Intensität der Resultante, das Gewicht des Körpers, ist weder von dessen Lage noch von dessen Gestalt, noch endlich von dessen Beschaffenheit, sondern einzig und allein von der Menge der in ihm enthaltenen materiellen Punkte, also von der Quantität der in ihm enthaltenen Materie abhängig. Eine je größere Quantität Materie in einem Körper enthalten ist, desto größer ist die Resultante, desto größer das Gewicht des Körpers. Die Quantität der in einem Körper enthaltenen Materie wird dessen Masse genannt.

Homogen ist der Körper, wenn gleiche Raumtheile gleiche Quantitäten Materie enthalten, und mithin gleiche Gewichte haben. Das Gewicht eines Volumens das man zur Einheit wählt, nennt man das specifische Gewicht des Körpers, den man betrachtet. Homogene Körper von verschiedener Substanz und gleichen Volumen enthalten im allgemeinen verschiedene Quantitäten Materie und haben verschiedenes Gewicht und mithin verschiedenes specifisches Gewicht. Das specifische Gewicht ist auch das Verhältniß des Gewichtes eines beliebigen Volumens zu diesem Volumen. — Die Methode zur Bestimmung der absoluten und specifischen Gewichte der Körper ist

Gegenstand der Physik. Unter absoluter Dichte eines Körpers versteht man die Masse in der Volumseinheit.

Ist ein Körper nicht homogen, so nennt man das Verhältniß seiner Masse zum Volumen seine mittlere Dichte.

Betrachten wir nun einen Punkt eines nichthomogenen Körpers, nehmen das Verhältniß der Masse eines sehr kleinen Raumtheiles um diesen Punkt zu seinem Volumen, und lassen wir diesen kleinen Raumtheil der Grenze gleich 0 zuschreiten, so hat man die Dichte des Körpers in diesem Punkte. Die Dichte eines nichthomogenen Körpers ist also eine Function der Coordinaten der verschiedenen Punkte desselben.

Das Gewicht, welches zur vergleichenden Einheit dient, ist das eines Cubikcentimeter destillierten Wassers beim Maximum seiner Dichte, das ist bei ungefähr 4° C. Die in den Tafeln angegebenen specifischen Gewichte bestimmen das Gewicht eines Cubikcentimeter der betreffenden Substanz in einer Anzahl Gramme bei 0° C.

Bestimmung des Schwerpunktes von Körpern.

§ 141. Sind mehrere Körper invariabel miteinander verbunden, und kennt man Gewichte und Schwerpunkte der einzelnen Körper, so kann man auch den Schwerpunkt des Körpersystems finden.

Es seien $p, p', p'' \dots$ die Gewichte, $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' \dots$ die Coordinaten der Schwerpunkte der einzelnen Körper auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogen, und nennt man P das Gesamtgewicht aller einzelnen Körper, und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Schwerpunktes des ganzen Körpersystems, so hat man, vermöge der Theoreme der Momente bei parallelen Kräften

$$1. \quad \begin{cases} P = \Sigma p \\ P x_1 = \Sigma p x \\ P y_1 = \Sigma p y \\ P z_1 = \Sigma p z \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\Sigma p x}{\Sigma p} \\ y_1 = \frac{\Sigma p y}{\Sigma p} \\ z_1 = \frac{\Sigma p z}{\Sigma p} \end{cases}$$

Geht eine Coordinatenebene, wie beispielsweise yz durch den Schwerpunkt, alsdann ist die Coordinate des Schwerpunktes $x_1 = 0$ und wird daher $\Sigma p x = 0$ sein.

Wächst die Zahl der invariabel miteinander verbundenen Körper ins Unendliche, und werden andererseits die einzelnen Körper unendlich klein, so bleiben diese Sätze richtig. Dieses bietet uns ein Mittel die Schwerpunkte von homogenen und nichthomogenen Körpern zu bestimmen, es möge dieser Körper die Gestalt eines von mit Materie angefüllten Volumens, einer mit Materie angefüllten Fläche oder Linie haben.

§ 142. Betrachten wir irgend einen Körper, beziehen denselben auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, theilen denselben in eine unendliche Anzahl unendlich kleiner Körperchen, indem wir zu jeder der drei Coordinatenebenen eine unendliche Zahl paralleler Schnitte führen, so dass jedes einzelne Körperchen ein unendlich kleines Parallelepipet in der Körpergröße $dx dy dz$, angefüllt mit einer Quantität Materie, sein wird. Die Dichte an einem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, bezeichnen wir mit ρ . Die Dichte wird demnach für jedes unendlich kleine Körperchen, das wir als materiellen Punkt auffassen können, in dessen ganzer Ausdehnung von gleichem Werte, und für den betrachteten Körper, wie wir bereits erwähnt, eine continuierliche Function der Coordinaten sein.

Das Volumen des Körpers wird ausgedrückt durch das dreifache Integral

$$3. \quad V = \iiint dx dy dz,$$

wenn wir das Volumen des Körpers mit V bezeichnen.

Das Gewicht des Körpers, welches wir P nennen wollen, wird erlangt durch das dreifache Integral

$$4. \quad P = g \iiint \rho dx dy dz,$$

da, wie aus § 134 und 140 zu ersehen, $P = Mg$ ist, wo P das Gewicht, M die Masse des Körpers und g die Acceleration bedeutet.

Nach der atomistischen Ansicht sollen die Körper aus Atomen bestehen, die voneinander durch Leeren getrennt sind. Diese Leeren sind aber so unendlich klein, dass wir die materiellen Punkte als stetig mit Masse angefüllt betrachten und auf die Körper die Integralrechnung ohne merklichen Fehler anwenden können, indem dadurch die Resultante der Kräfte ganz unmerklich beeinflusst wird.

Die Coordinaten des Schwerpunktes des Körpers x_1, y_1, z_1 findet man, wenn man bedenkt, dass auch die Coordinaten des unendlich kleinen Körperchens für dessen ganze Ausdehnung vom selben Werte sind, indem dieses unendlich kleine Körperchen als materieller Punkt aufgefasst werden kann, der seine ganze Masse in seinem Schwerpunkte vereinigt, durch die aus den Gleichungen 1. hergeleiteten Gleichungen

$$5. \quad \begin{cases} P x_1 = g \iiint x \rho \, dx \, dy \, dz \\ P y_1 = g \iiint y \rho \, dx \, dy \, dz \\ P z_1 = g \iiint z \rho \, dx \, dy \, dz \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\iiint x \rho \, dx \, dy \, dz}{\iiint \rho \, dx \, dy \, dz} = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m} \\ y_1 = \frac{\iiint y \rho \, dx \, dy \, dz}{\iiint \rho \, dx \, dy \, dz} = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m} \\ z_1 = \frac{\iiint z \rho \, dx \, dy \, dz}{\iiint \rho \, dx \, dy \, dz} = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m} \end{cases}$$

§ 143. Ist der Körper homogen, so ist ρ in allen seinen Punkten constant von demselben Werte, und mithin kann man ρ bei den Integralen außerhalb des Integralzeichens stellen, was aber darauf hinauskommt, den Gewichten, bei der Berechnung der Integrale, die geometrischen Größen, Volums, Flächen und Linien zu substituieren, da ρ ohnehin aus den Integralen verschwindet.

Man hat daher

$$7. \quad \begin{cases} V x_1 = \iiint x \, dx \, dy \, dz \\ V y_1 = \iiint y \, dx \, dy \, dz \\ V z_1 = \iiint z \, dx \, dy \, dz \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\iiint x \, dx \, dy \, dz}{\iiint dx \, dy \, dz} \\ y_1 = \frac{\iiint y \, dx \, dy \, dz}{\iiint dx \, dy \, dz} \\ z_1 = \frac{\iiint z \, dx \, dy \, dz}{\iiint dx \, dy \, dz} \end{cases}$$

Eigenschaften des Schwerpunktes.

§ 144. Seien $A, A', A'' \dots$ die Schwerpunkte von Körpern, und seien, wenn wir ein rechtwinkeliges Coordinatensystem wählen, deren Coordinaten $x, y, z, x', y', z', \dots, p, p', p'' \dots$ die Gewichte der einzelnen Körper, O der Schwerpunkt des Systems, $OA = r$, $OA' = r'$, $OA'' = r''$. Bringen wir nun nach den Richtungen OA , OA' , $OA'' \dots$ Kräfte pr , $p'r'$, $p''r'' \dots$ an, so werden diese Kräfte im Gleichgewichte sein.

Wir haben, da der Ursprung der Coordinaten der Schwerpunkt des Systems ist, mithin die Coordinationsebenen durch den Ursprung gehen, da dann, wie wir wissen, die Coordinaten des Schwerpunktes,

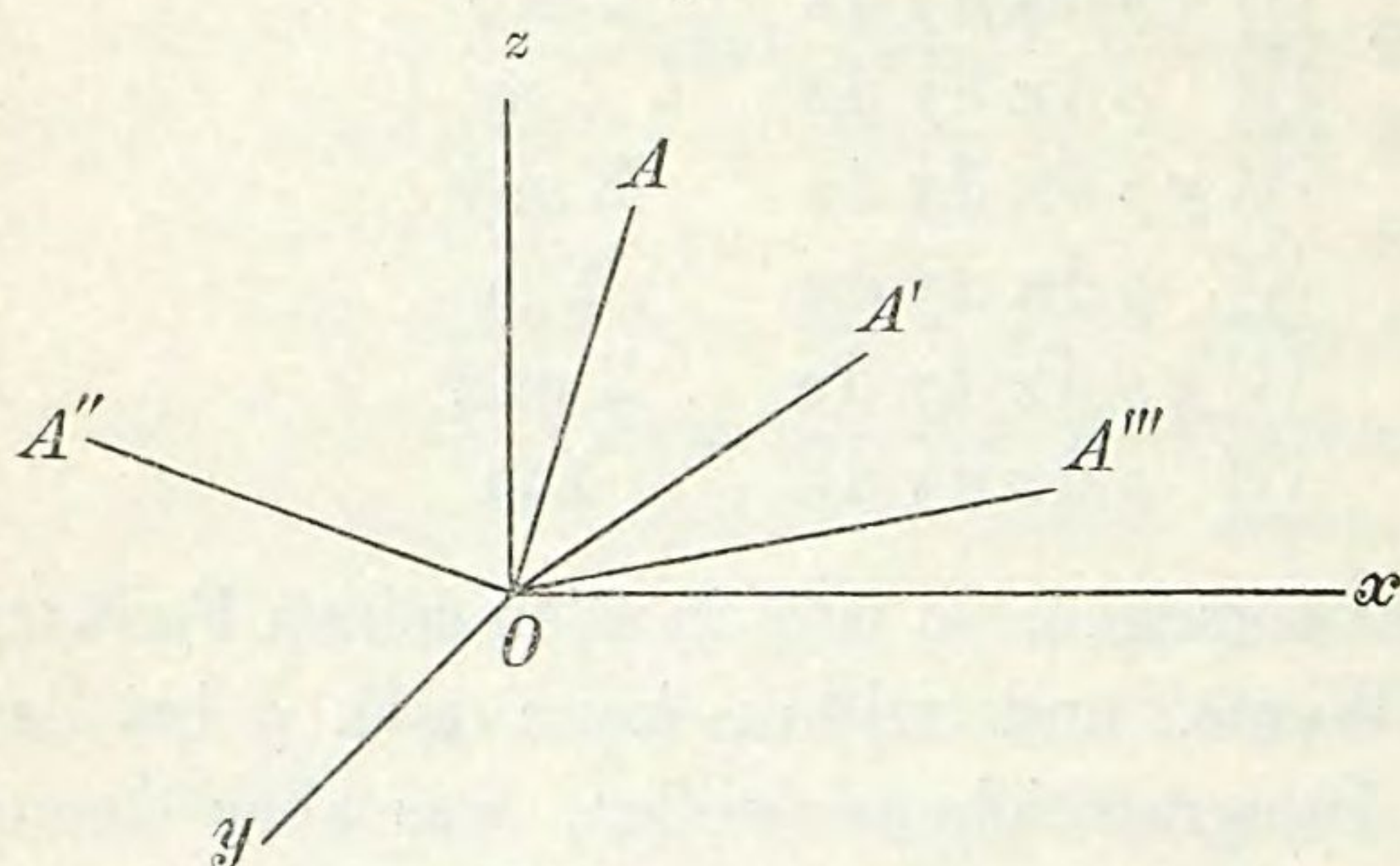
welche wir mit x_1, y_1, z_1 bezeichnen, gleich Null sind, indem jede der drei Coordinatenebenen den Schwerpunkt enthält,

$$\Sigma px = 0$$

$$\Sigma py = 0$$

$$\Sigma pz = 0$$

Fig. 32.



Man hat ferner, wenn man die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte $OA, OA', OA'' \dots$ mit den Coordinatenachsen bilden, mit $\alpha, \beta, \gamma, \alpha' \dots$ bezeichnet,

$$x = r \cos \alpha, x' = r' \cos \alpha', x'' = r'' \cos \alpha' \dots,$$

ebenso

$$y = r \cos \beta, y' = r' \cos \beta', y'' = r'' \cos \beta'' \dots,$$

$$z = r \cos \gamma, z' = r' \cos \gamma', z'' = r'' \cos \gamma'' \dots$$

Mithin, wenn man diese Werte in die vorhergehenden Gleichungen einsetzt, kommt

$$\Sigma pr \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma pr \cos \beta = 0$$

$$\Sigma pr \cos \gamma = 0.$$

Die Größen $pr \cos \alpha, p'r' \cos \alpha' \dots$ sind aber die Componenten der Kräfte $pr, p'r' \dots$ nach der x -Achse, $pr \cos \beta, p'r' \cos \beta' \dots$, die nach der y -Achse, $pr \cos \gamma, p'r' \cos \gamma' \dots$ die nach der z -Achse. Die Summe der Componenten der Kräfte nach den Achsen sind demnach gleich Null, mithin machen sich die Kräfte $pr, p'r', p'r' \dots$ Gleichgewicht.

Sind alle an $A A' A''$ befindlichen Gewichte gleich, O der Schwerpunkt des Systems, und bringen wir in O Kräfte an, welche in Richtung und Intensität durch die Strecken $OA, OA', OA'' \dots$ vorgestellt sind, so machen sich demnach diese Kräfte Gleichgewicht.

§ 145. Sind andererseits Kräfte an einem Punkte O angebracht, vorgestellt in Richtung und Größe durch die Strecken $OA = r, OA' = r', OA'' = r'' \dots$, und machen sich diese Kräfte Gleichgewicht, alsdann werden Körper von gleichem Gewichte p , deren Schwerpunkte an den Punkten $A, A', A'' \dots$ angebracht sind, ein System bilden, dessen Schwerpunkt sich in O befindet.

Denn das Gleichgewicht hat zur Folge, dass die Summe der Componenten nach den Achsen gleich Null ist. Daher

$$\Sigma r \cos \alpha = 0$$

$$\Sigma r \cos \beta = 0$$

$$\Sigma r \cos \gamma = 0$$

ist. Daher auch, wenn man jede Größe mit p multipliciert,

$$p \Sigma r \cos \alpha = 0$$

$$p \Sigma r \cos \beta = 0$$

$$p \Sigma r \cos \gamma = 0,$$

also

$$px + px' + px'' \dots = 0$$

$$py + py' + py'' \dots = 0$$

$$pz + pz' + pz'' \dots = 0$$

und daraus ergibt sich für die Coordinaten des Schwerpunktes, den wir mit x_1, y_1, z_1 bezeichnen,

$$x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 0,$$

da die Glieder linker Hand in den letzten Gleichungen gleich sind Px_1, Py_1, Pz_1 , wenn man die Summe aller Gewichte p mit P bezeichnet, und mithin ist O der Schwerpunkt des Systems.

Polares Moment der Trägheit.

§ 146. Man nennt polares Moment der Trägheit eines Körpers in Bezug auf einen Punkt, die Summe der Producte der Massen der materiellen Punkte eines Körpers, multipliciert mit den Quadraten ihrer respectiven Distanzen von diesem Punkte.

Ist also ein materieller Punkt m , dessen Distanz vom Punkte $O = r$, so wird

$$\Sigma m r^2$$

das polare Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf O sein.

Der Schwerpunkt eines Körpers ist der Punkt, für welchen das polare Moment der Trägheit ein Minimum ist.

Bezeichnen wir einen Massenpunkt des Körpers mit m , dessen Coordinaten mit x, y, z , die unbekannten Coordinaten des Punktes, auf welchen das Trägheitsmoment bezogen wird, mit x_1, y_1, z_1 , so hat das Product

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]$$

ein Minimum zu werden.

Nennt man dieses Product f , so müssen, damit f ein Minimum wird, die Derivierten von f in Beziehung auf x_1, y_1, z_1 gleich Null gesetzt und daraus die Werte von x_1, y_1, z_1 bestimmt werden. Man wird daher

$$\frac{df}{dx_1} = 0, \frac{df}{dy_1} = 0, \frac{df}{dz_1} = 0$$

setzen. Daraus ergibt sich aber

$$\begin{aligned} \Sigma m (x_1 - x) &= 0, \quad \Sigma m (y_1 - y) = 0, \quad \Sigma m (z_1 - z) = 0 \\ x_1 &= \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \quad y_1 = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad z_1 = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind aber die des Schwerpunktes und kommen nur diesem zu.

Siebzehntes Capitel.

Bestimmung der Schwerpunkte von schweren Körpern und geometrischen Körpern.

Allgemeines.

§ 147. Früher hatten wir für die Coordinaten des Schwerpunktes bei homogenen Körpern drei Gleichungen

$$1. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\iiint x \, dx \, dy \, dz}{\iiint dx \, dy \, dz} \\ y_1 = \frac{\iiint y \, dx \, dy \, dz}{\iiint dx \, dy \, dz} \\ z_1 = \frac{\iiint z \, dx \, dy \, dz}{\iiint dx \, dy \, dz} \end{cases}$$

Man kann diese Gleichungen in kürzerer Form schreiben, wenn man dem Volumenelement, also dem unendlich kleinen Volumen des Körpers die Bezeichnung du gibt, wo u das Volumen des Körpers vorstellt, und statt der Integralzeichen $\int, \iint, \iiint$ das allgemeine Zeichen Σ einführt.

Die Gleichungen 1 bekommen nachstehende Form:

$$2. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\Sigma x \, du}{\Sigma du} = \frac{\Sigma x \, du}{u} \\ y_1 = \frac{\Sigma y \, du}{\Sigma du} = \frac{\Sigma y \, du}{u} \\ z_1 = \frac{\Sigma z \, du}{\Sigma du} = \frac{\Sigma z \, du}{u} \end{cases}$$

§ 148. Wie man sieht, kommen in diesen Ausdrücken nicht Gewichte, sondern geometrische Größen, Volums vor, und dennoch spricht man vom Schwerpunkte. Diese Gleichungen bestimmen die Coordinaten eines Punktes des Volumens u , und nennt man diesen Punkt nur im Wege der Analogie Schwerpunkt des Volumens, gleichsam als wäre dieses Volumen homogen mit Masse gefüllt, oder was auf dasselbe kommt, als wären alle einzelnen Punkte dieses Volumens von parallelen Kräften getrieben. Das Centrum der parallelen Kräfte wird der Schwerpunkt des Volumens sein.

In dieser Analogie kann man weiter gehen.

Gesetzt, wir haben eine Oberfläche, bezeichnen sie mit w , schneiden sie durch zwei Reihen Ebenen, die eine parallel der Coordinatenebene yz , die andere parallel der Ebene xz , so wird die Fläche in eine unendliche Anzahl unendlich kleiner Theile zerlegt, von denen jeder durch dw vorgestellt wird.

Projicieren wir das Flächenelement dw auf die Ebene der xy , so wird das unendlich kleine Element in dieser Ebene ausgedrückt sein durch $dx dy$, und wenn man die Winkel, welche die Normale in einem Punkte M dieser Oberfläche mit den Achsen der x, y, z einschließt mit λ, μ, ν , ferner $\frac{dz}{dx}$ mit p , $\frac{dz}{dy}$ mit q bezeichnet, so ist bekanntlich

$$\cos \lambda = \mp \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

$$\cos \mu = \mp \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

$$\cos \nu = \mp \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

wo die oberen Zeichen sich auf den Theil der Normalen beziehen, welche mit der z -Achse einen spitzen Winkel bildet.

Man hat demnach für das Flächenelement dw

$$dw = \frac{dx dy}{\cos \nu} = dx dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$$

§ 149. Denkt man sich also die Punkte der Fläche mit Masse angefüllt, und ist sie nicht homogen, ist also die Dichte ρ nicht constant, sondern eine Function der Coordinaten der einzelnen Punkte, so hat man, wenn w das Gewicht der Oberfläche bedeutet,

$$3. \quad \begin{cases} w = g \iint \rho \, dx \, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1} = \Sigma \, dw \\ wx_1 = g \iint \rho \, x \, dx \, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1} = \Sigma \, x \, dw \\ wy_1 = g \iint \rho \, y \, dx \, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1} = \Sigma \, y \, dw \\ wz_1 = g \iint \rho \, z \, dx \, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1} = \Sigma \, z \, dw \end{cases}$$

§ 150. Ist die Fläche homogen, können wir das constante ρ weglassen, und den Schwerpunkt der Fläche zu bestimmen suchen. w bedeutet also hier die Fläche und man hat folgende Gleichungen

$$4. \quad \begin{cases} \text{Fläche } w = \iint dx \, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1} \\ x_1 = \frac{\iint x \, dx \, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1}}{\iint dx \, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = \frac{\Sigma \, x \, dw}{w} \\ y_1 = \frac{\iint y \, dx \, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1}}{\iint dx \, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = \frac{\Sigma \, y \, dw}{w} \\ z_1 = \frac{\iint z \, dx \, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1}}{\iint dx \, dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = \frac{\Sigma \, z \, dw}{w} \end{cases}$$

§ 151. Ist die Fläche eben und homogen. Betrachten wir solche als in der Ebene der xy liegend, das heißt, wir machen die Ebene der Fläche zur Ebene der xy , lassen das constante ρ weg. Die z -Achse entfällt, da für alle Punkt der Fläche $z = 0$ ist, auch p und q sind gleich Null, und alsdann haben für die Fläche und die Coordinaten ihres Schwerpunktes nachstehende Ausdrücke

$$5. \quad \begin{cases} w = \iint dx \, dy \\ x_1 = \frac{\iint x \, dx \, dy}{\iint dx \, dy} = \frac{\Sigma \, x \, dw}{w} \\ y_1 = \frac{\iint y \, dx \, dy}{\iint dx \, dy} = \frac{\Sigma \, y \, dw}{w} \end{cases}$$

§ 152. Denselben Vorgang haben wir auch bei Curven im Raume und in der Ebene, und auch bei Geraden. In allen diesen Fällen spricht man im Wege der Analogie vom Schwerpunkte der Curve oder der Linie, unter der Voraussetzung, dass sie homogen sind, und bestimmt in ähnlicher Weise die Coordinaten des Schwerpunktes der Curve oder der Linie, wie auch die Länge derselben.

Bezeichnen wir die Länge der Curve mit s , so ist das Bogenelement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Man hat also, wenn die Curve homogen ist und ρ weggelassen wird, für die Länge der Curve und den Coordinaten ihres Schwerpunktes

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}$$

$$6. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\Sigma x ds}{s} = \frac{\int x ds}{s} \\ y_1 = \frac{\Sigma y ds}{s} = \frac{\int y ds}{s} \\ z_1 = \frac{\Sigma z ds}{s} = \frac{\int z ds}{s} \end{cases}$$

§ 153. Ist die Curve oder Linie eben und denken wir sie in der Ebene der xy liegend, alsdann haben wir

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und man hat

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$7. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\Sigma x ds}{s} = \frac{\int x ds}{s} \\ y_1 = \frac{\Sigma y ds}{s} = \frac{\int y ds}{s} \end{cases}$$

§ 154. Bezeichnet man mit u bald ein Volumen, bald eine Fläche, bald eine Curve, so hat man für die Coordinaten eines Volumens, einer Fläche oder einer Curve die gemeinsamen Ausdrücke

$$8. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\Sigma x du}{u} \\ y_1 = \frac{\Sigma y du}{u} \\ z_1 = \frac{\Sigma z du}{u} \end{cases}$$

Wo beim Volumen unter u das Volumen, und unter du das Volumenelement, bei einer Fläche unter u die Fläche, und unter du das Flächenelement, und bei einer Curve unter u die Bogenlänge und unter du das Bogenelement verstanden werden.

Aus dem früher bewiesenen Theoreme endlich, dass das polare Trägheitsmoment in Beziehung auf den Schwerpunkt ein Minimum ist, folgt weiter, dass der Schwerpunkt eines Volumens, einer Fläche, einer Curve von der Wahl der Achsen unabhängig ist, da nur ein einziger Punkt dem Minimum entspricht und dieser Punkt eben mit dem Schwerpunkte coincidirt. Übrigens war dieses schon aus dieser Eigenschaft bei schweren Körpern zu ersehen, aus welchen die Schwerpunkte geometrischer Körper hergeleitet sind.

Das polare Trägheitsmoment eines geometrischen Körpers, Volumens, Fläche, Linie, in Bezug auf einen Punkt O wird durch $\Sigma r^2 du$ ausgedrückt, wo unter r die Distanz des Elementes du vom Punkte O verstanden wird.

Achtzehntes Capitel.

Bestimmung des Schwerpunktes von Curven und Linien.

§ 155. Für Schwerpunkte von Curven und deren Länge haben wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} s &= \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ x_1 &= \frac{\Sigma x ds}{s} = \frac{\int x ds}{s} \\ y_1 &= \frac{\Sigma y ds}{s} = \frac{\int y ds}{s} \\ z_1 &= \frac{\Sigma z ds}{s} = \frac{\int z ds}{s} \end{aligned}$$

Für nichthomogene Curven und Linien wird die veränderliche Dichte ρ hinter das Integralzeichen eingefügt, und bezeichnet man das Gewicht mit P , so hat man

$$P = g \Sigma \rho ds, x_1 = \frac{\Sigma \rho x ds}{P}, y_1 = \frac{\Sigma \rho y ds}{P}, z_1 = \frac{\Sigma \rho z ds}{P}$$

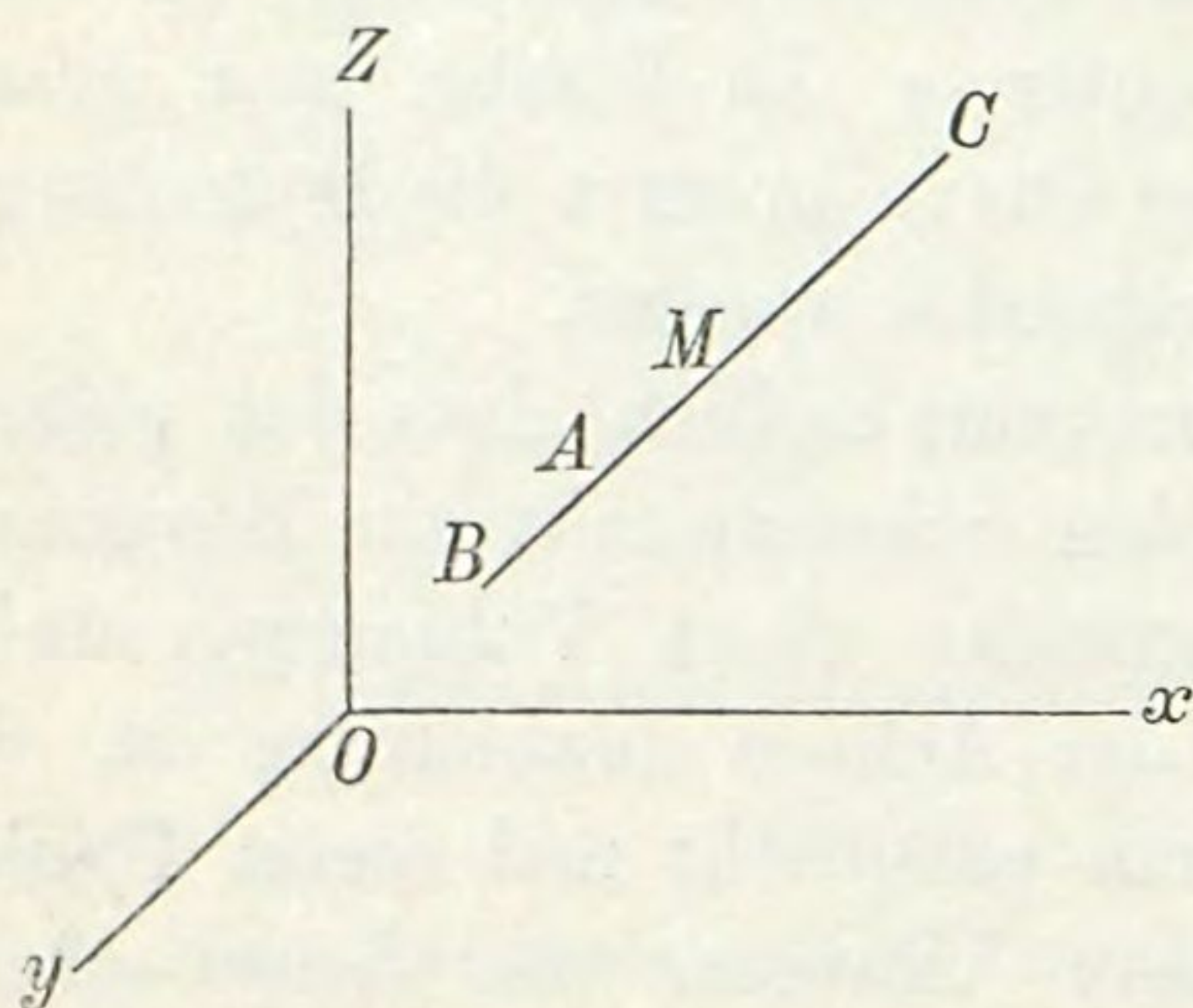
wo ρ , y , z und ds Functionen von x sind.

Wir wollen diese Formen auf einige Fälle anwenden.

Schwerpunkt einer Geraden.

§ 156. Es sei eine gerade homogene Linie im Raume BC von der Länge L , die Coordinaten des

Fig. 33.



Ursprungs der Linie seine x_0 , y_0 , z_0 , die Winkel der Linie L mit den Achsen α , β , γ , die Coordinaten eines beliebigen Punktes M auf der Linie x , y , z , die Länge der ganzen Linie $BC = L$, die Länge von $MB = s$, so hat man für die Coordinaten des Punktes M

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s \cos \alpha \\ y &= y_0 + s \cos \beta \\ z &= z_0 + s \cos \gamma \end{aligned}$$

Daher hat man für die Coordinaten des Schwerpunktes

$$x_1 = \frac{\int x \, ds}{L} = \frac{\int x_0 \, ds}{L} + \frac{\int s \, ds \cos \alpha}{L} = \frac{x_0}{L} \int ds + \frac{\cos \alpha}{L} \int s \, ds$$

und wenn integriert wird von $s = 0$ bis $s = L$, so hat man

$$x_1 = x_0 + \frac{\cos \alpha}{L} \frac{L^2}{2} = x_0 + \frac{L \cos \alpha}{2}.$$

Ähnliche Ausdrücke hat man für die übrigen Coordinaten, und man hat

$$x_1 = x_0 + \frac{L}{2} \cos \alpha$$

$$y_1 = y_0 + \frac{L}{2} \cos \beta$$

$$z_1 = z_0 + \frac{L}{2} \cos \gamma$$

Der Schwerpunkt der Linie g liegt in deren Mitte, was vorauszusehen war.

Schwerpunkt eines Kreisbogens.

§ 157. Es sei ferner BAC ein Kreisbogen. Wir nehmen ihn als in der Ebene der xy liegenden, lassen die x -Achse durch den Coordinatenursprung und die Mitte des Bogens passieren, und errichten die y -Achse im Mittelpunkte des Kreises, bezeichnen mit r den Radius, den Bogen BAC mit L , so liegt der Schwerpunkt jedenfalls auf der x -Achse und braucht man nur x_1 zu bestimmen, für welches wir die Gleichung haben

$$x_1 = \frac{\int x \, ds}{L}.$$

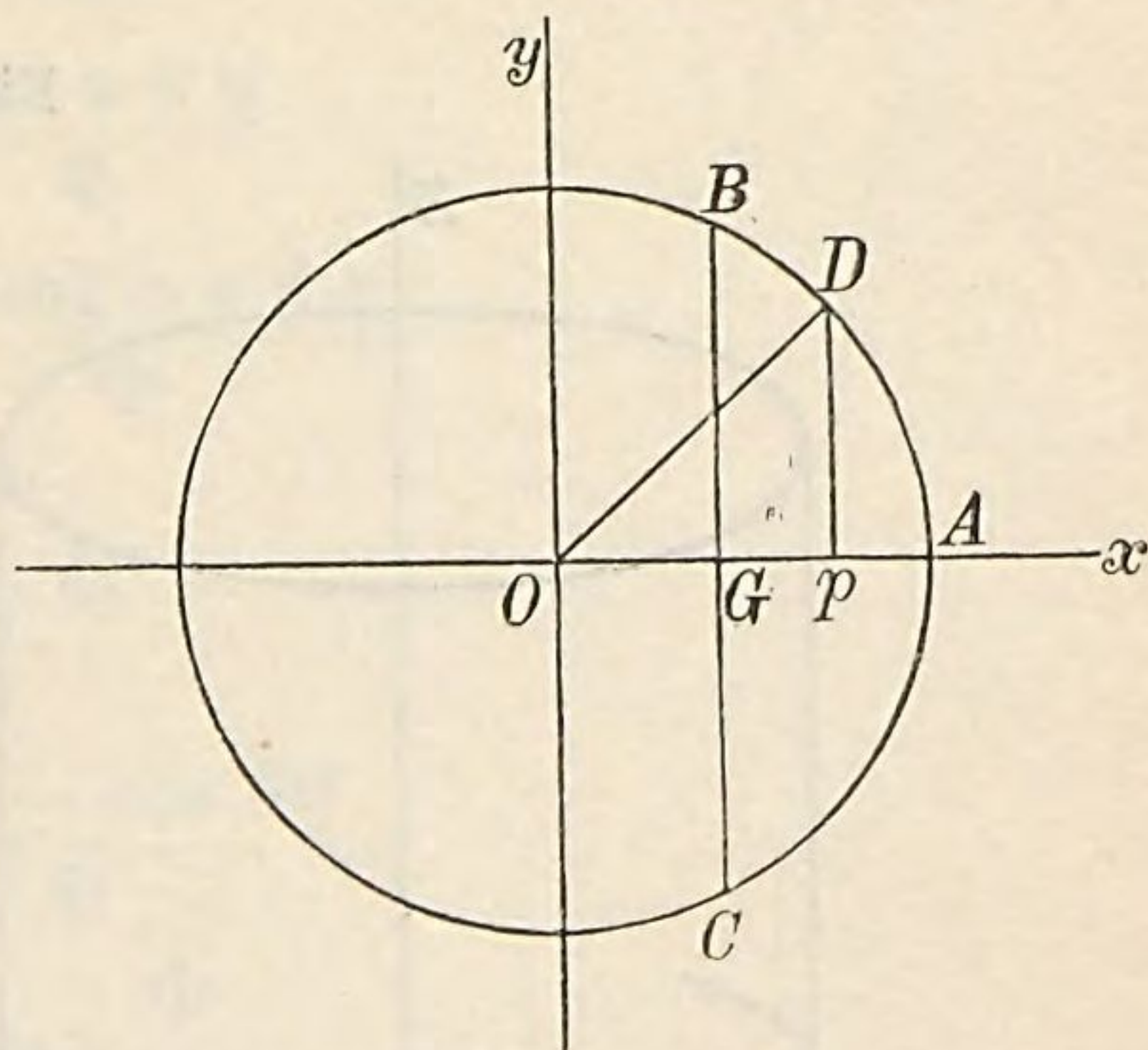
Ist nun D ein beliebiger Punkt dieses Bogens, x, y dessen Coordinaten, so hat man, wenn der Bogen DA mit s bezeichnet wird,

$$x = Op = r \cos \frac{s}{r},$$

daher

$$x_1 = \frac{\int x \, ds}{L} = \frac{r \int \cos \frac{s}{r} \, ds}{L}.$$

Fig. 34.



Integriert man von $s = -\frac{1}{2}L$ bis $s = +\frac{1}{2}L$, so hat man

$$x_1 = r \int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} \cos \frac{s}{r} ds = \frac{2r^2 \sin \frac{L}{2r}}{s}.$$

Die Sehne BC , die wir mit a bezeichnen, ist gleich $2r \sin \frac{L}{2r}$.

Daher

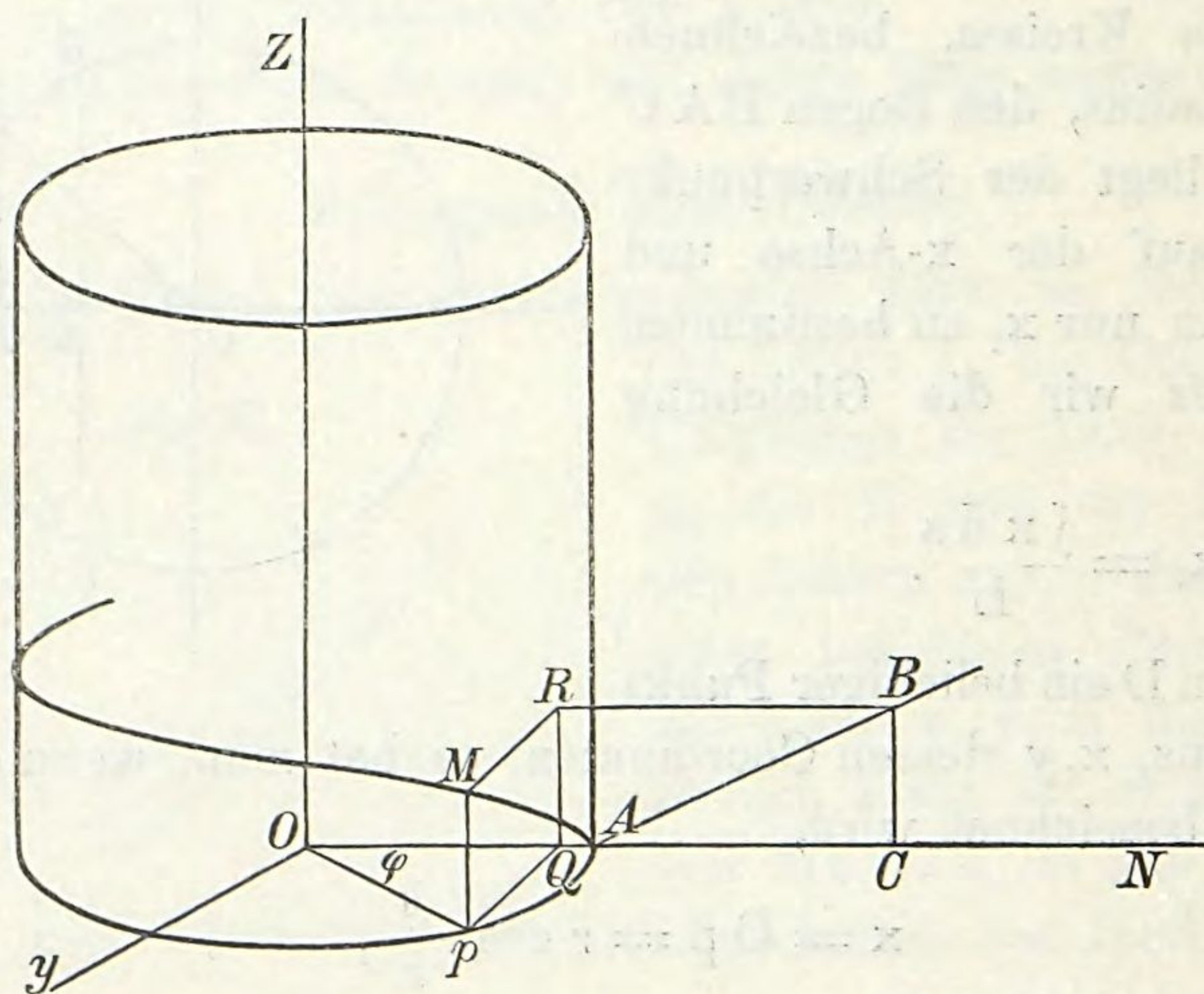
$$x_1 = \frac{ra}{L}.$$

Die Distanz Og des Schwerpunktes g vom Koordinatenursprunge ist daher die vierte Proportionale zu dem Bogen, der Sehne und dem Radius.

Schwerpunkt der Schraubenlinie.

§ 158. Man weiss, dass wenn ein gegebener Winkel $BAC = a$, der Steigungswinkel genannt, um einen geraden Cylinder von kreisförmiger Basis so herumgewickelt wird, dass der eine Schenkel AC

Fig. 35.



die Erzeugungslinie des Cylinders unter einem rechten Winkel schneidet, der andere Schenkel AB auf der Cylinderfläche die Schraubenlinie erzeugt.

Die Gleichungen der Schraubenlinie sind, wenn die z -Achse die Achse des Cylinders ist, die x -Achse durch A geht, wo die Schraubenlinie die xy -Ebene schneidet, r der Halbmesser des Cylinders, $A\varphi = \varphi$ ein veränderlicher Winkel, und $A\rho$ die Projection eines Bogens AM der Schraubenlinie auf der Basis des Cylinders ist,

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi \\z &= r \varphi \tan a.\end{aligned}$$

Das Bogenelement ds ist gleich $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, daher
 $ds = d\varphi \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \tan^2 a} = d\varphi \sqrt{r^2 + r^2 \tan^2 a}.$

Nehmen wir einen beliebigen Bogen AM und bezeichnen den Wert des Winkels φ , für AM mit Φ , während der Wert von φ am Ursprunge A gleich Null ist, so hat man

$$\int ds = \Phi \sqrt{r^2 + r^2 \tan^2 a} = \frac{\Phi r}{\cos a}.$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes sind dann

$$\begin{aligned}x_1 &= \int_0^\Phi \frac{r \cos \varphi d\varphi}{\Phi} \\y_1 &= \int_0^\Phi \frac{r \sin \varphi d\varphi}{\Phi} \\z_1 &= \int_0^\Phi \frac{r \tan a \varphi d\varphi}{\Phi},\end{aligned}$$

daher

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{r \sin \Phi}{\Phi} \\y_1 &= \frac{r (1 - \cos \Phi)}{\Phi} \\z_1 &= r \tan a \frac{\Phi}{2}.\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung ist zu ersehen, dass der Schwerpunkt eines Bogens der Schraubenlinie auf der Hälfte der Höhe des Endpunktes des Bogens über den Ursprung liegt.

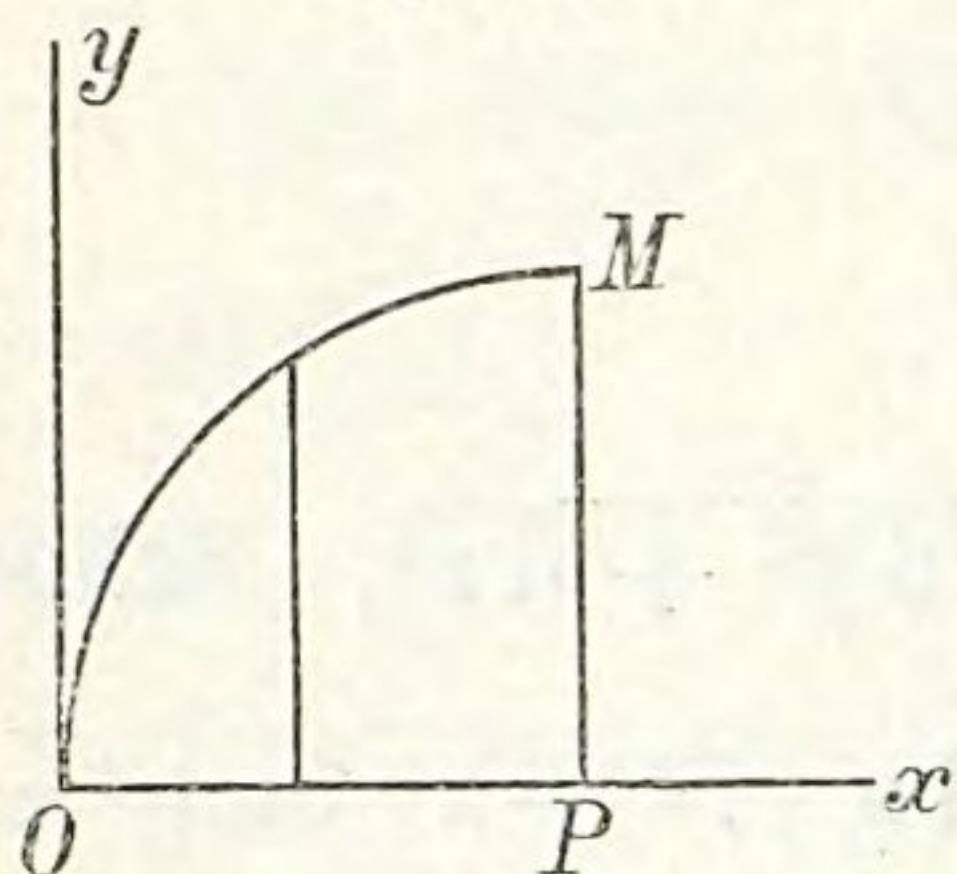
Aus den anderen beiden Gleichungen ist ferner zu ersehen, dass der Schwerpunkt sich in dem Maße der Achse des Cylinders nähert, je größer Φ , also je größer der Bogen wird.

Schwerpunkt einer Parabellinie.

§ 159. Die Gleichung einer Parabel, bezogen auf seine Achse und die Tangente am Scheitel in der Ebene xy liegend, ist

$$y^2 = 2px.$$

Fig. 36.



Bezeichnen wir die Länge eines Bogens OM mit s , so hat man

$$ds = \sqrt{\frac{2x+p}{2x}} dx$$

$$ds = \frac{1}{p} \sqrt{y^2 + p^2} dy$$

$$s = \int_0^y \frac{\sqrt{y^2 + p^2} dy}{p} = \frac{1}{2p} \left[y \sqrt{y^2 + p^2} + p^2 l \left(\frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p} \right) \right],$$

wo unter l der natürliche Logarithmus verstanden wird.

Für die Coordinaten des Schwerpunktes haben wir

$$x_1 = \frac{\int_0^s x ds}{s}$$

$$y_1 = \frac{\int_0^s y ds}{s}$$

daher

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{ps} \int_0^y y dy \sqrt{y^2 + p^2} = \frac{1}{2sp} \int \sqrt{y^2 + p^2} d(y^2 + p^2) = \\ &= \frac{1}{3sp} (y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^2}{3s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\int_0^x dx \sqrt{x^2 + \frac{px}{2}}}{s} = \frac{\int \sqrt{\left(x + \frac{p}{4}\right)^2 - \frac{p^2}{16}} dx}{s} = \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{p}{4}\right) \sqrt{x^2 + \frac{px}{2}} - \frac{p^2}{32} l \left(\frac{4x + p + 4\sqrt{x^2 + \frac{px}{2}}}{p} \right) \end{aligned}$$

s

Schwerpunkt eines Bogens der Cykloide.

§ 160. Nimmt man den Coordinatenanfang am Scheitel c , die Achse der Cykloide zur Achse der x und die Tangente am Scheitel zur y -Achse und sei der Bogen CM vom Scheitel gerechnet $= s$, so hat man

$$dy = \frac{(a - x) dx}{\sqrt{ax - x^2}}, \quad ds = \sqrt{\frac{a}{x}} dx,$$

wo unter a der Durchmesser des erzeugenden Kreises CD verstanden wird. Man hat alsdann

$$s = \int ds = \int \sqrt{\frac{a}{x}} dx = 2 \sqrt{ax}.$$

Wir fügen keine Constante bei, da das Integral für $x = 0$ verschwindet.

Wir haben dann

$$x_1 = \frac{\int_0^x x ds}{s} = \frac{\int_0^x \sqrt{ax} dx}{s} = \frac{2}{3s} \sqrt{a} x^{\frac{3}{2}} = \frac{x}{3},$$

$$y_1 = \frac{\int y ds}{s} = \frac{\sqrt{a}}{s} \int y \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Integriert man durch Theile, so hat man

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\sqrt{a}}{s} \int y \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{a}}{s} (2 y x^{\frac{1}{2}} - \int 2 x^{\frac{1}{2}} dy) = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{s} (2 y x^{\frac{1}{2}} - 2 \int \sqrt{a - x} dx) = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{s} (2 y x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3} (a - x)^{\frac{3}{2}} + C). \end{aligned}$$

Da ferner für $x = 0$ auch $y_1 = 0$ ist, so hat man

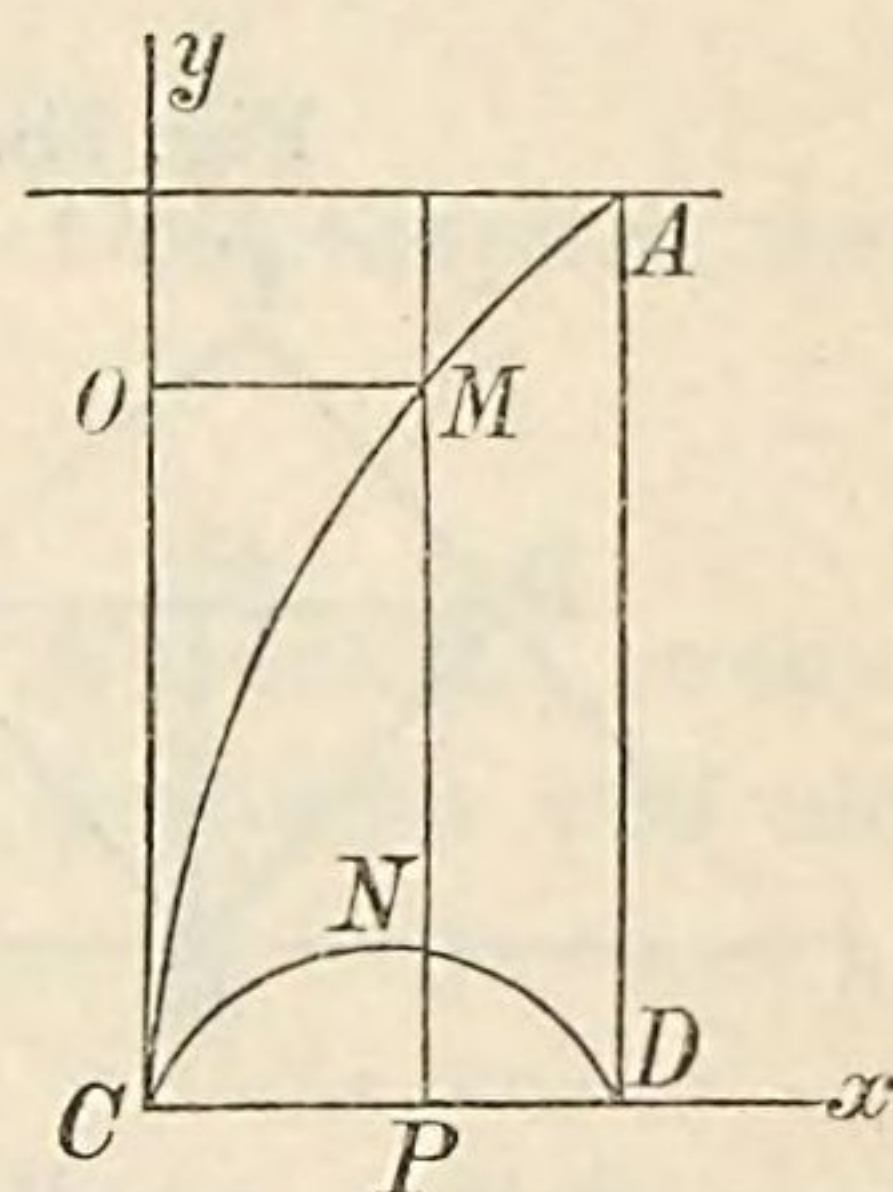
$$y_1 = \frac{\sqrt{a}}{s} \left[2 y x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3} (a - x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} a^{\frac{3}{2}} \right],$$

daher für s einen Wert setzend,

$$y_1 = y + \frac{2}{3\sqrt{x}} [(a - x)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}].$$

Für $x = a$, $y = \frac{\pi a}{2}$ hat man für den Schwerpunkt des Bogens der halben Cykloide CA

Fig. 37.

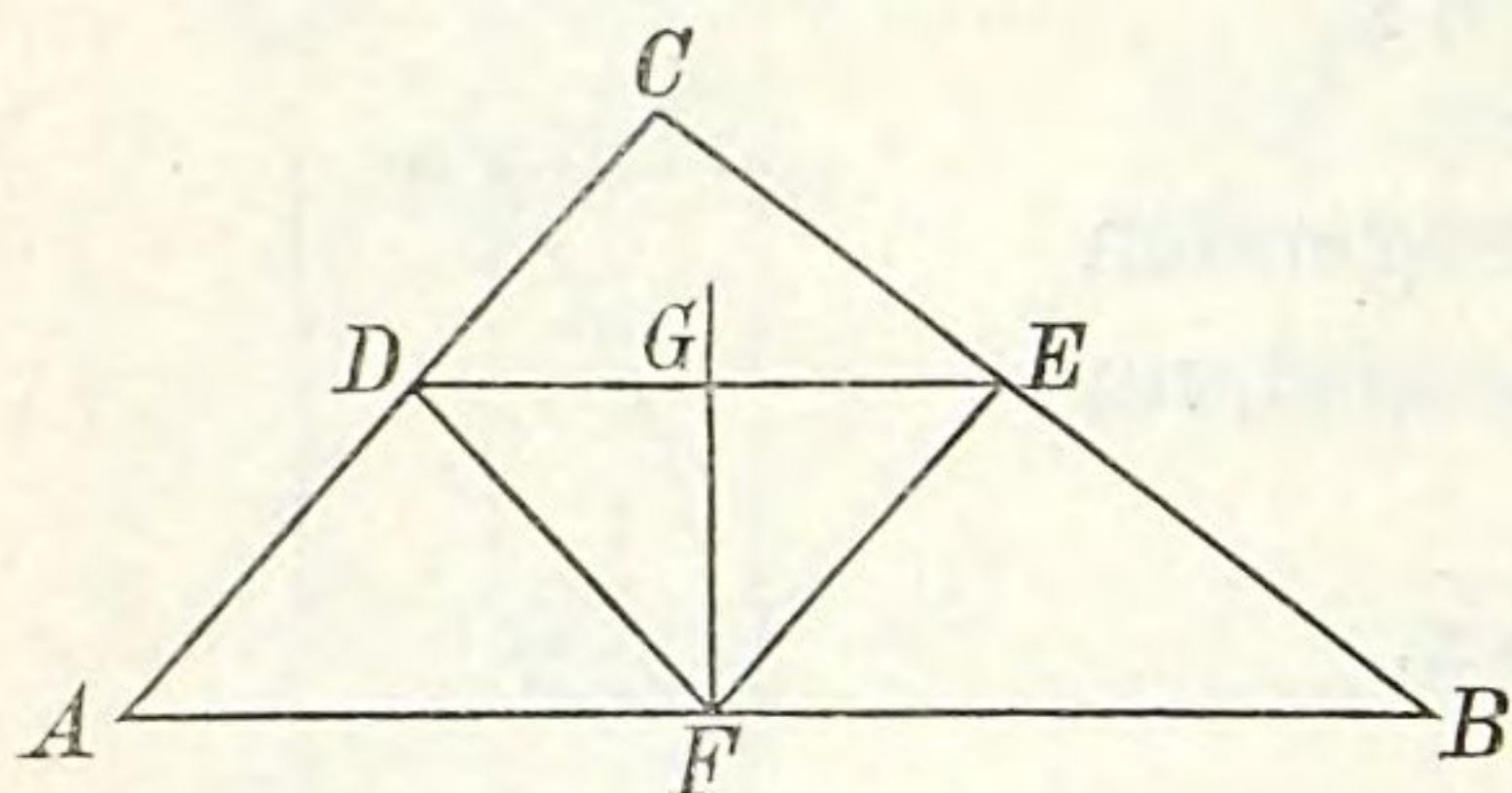


$$x_1 = \frac{a}{3}, \quad y_1 = \frac{\pi a}{2} - \frac{2}{3} a = a \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

§ 161. Manche Schwerpunkte lassen sich ohne Rechnung finden.

Es sei ABC der Umfang eines Dreieckes, wo auf jeder Seite der Schwerpunkt in der Mitte der Seite liegt. Wir können uns also in jeder Mitte statt der Seiten Gewichte D, E, F proportional den respectiven Seiten angebracht denken.

Fig. 38.



Setzen wir nun D und E zusammen, so fällt der Schwerpunkt auf der Linie DE , und zwar, indem die Dreiecke ABC und DEF , deren Seiten parallel sind, ähnlich sind, in einem Punkte G , dass man das Verhältniss hat

$$EG : DG = AC : BC = EF : FD.$$

Verbindet man F und G durch eine Linie FG , so theilt diese demnach den Winkel DFE in zwei gleiche Hälften und der Schwerpunkt, als Angriffspunkt der Kräfte F und G , befindet sich auf der Theilungslinie FG .

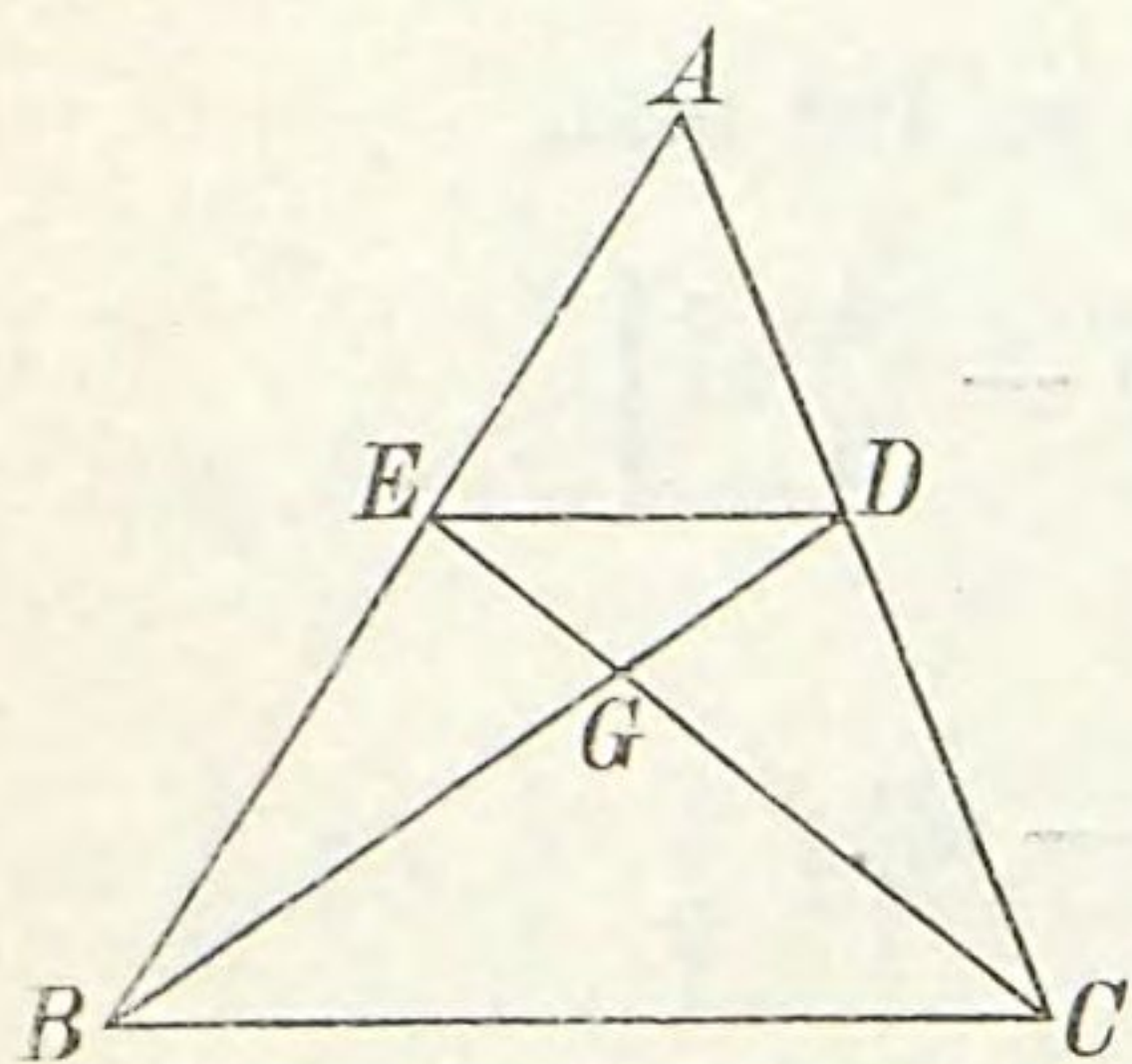
Es ist demnach der Schwerpunkt des Perimeters des Dreieckes ABC der Durchschnitt der Bisectricen des Dreieckes DEF .

Neunzehntes Capitel.

Schwerpunkte von ebenen Flächen.

§ 162. Wir brauchen kaum hervorzuheben, dass wir in allen Fällen, die wir hier und später besprechen, die Volumens, Flächen, Curven, als homogen voraussetzten, so dass man eigentlich die Schwerpunkte geometrischer Körper zu bestimmen sucht.

Fig. 39.



Bei mancher ebenen Fläche kann man ohne Rechnung den Schwerpunkt finden. So liegt der Schwerpunkt eines Kreises und regelmäßiger Polygone in deren Mittelpunkte.

§ 163. Der Schwerpunkt eines Dreieckes liegt offenbar auf einer Geraden, welche eine Spitze des Dreieckes mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite verbindet. Er liegt daher im Durchschnitte solcher zwei Medianes.

Führt man die Construction aus, verbindet die zwei Mitten E und D durch die Linie ED, welche der Linie BC parallel ist, zieht die Linien BD, CE, so ist der auf dem Durchschnitte dieser zwei Medianen befindliche Punkt G der Schwerpunkt. Dabei hat man wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke DEG, CGB

$$DG : GC = DE : CB = 1 : 2.$$

Der Schwerpunkt G ist demnach von jeder Dreieckspitze um $\frac{2}{3}$ der Mediane entfernt.

§ 164. Wir hatten für ebene Flächen die Ausdrücke, wenn man die Fläche als in der Ebene der xy liegend annimmt und sie mit u bezeichnet

$$\begin{aligned} u &= \iint dx dy \\ x_1 &= \frac{\sum x du}{u} = \frac{\iint x dx dy}{u} \\ y_1 &= \frac{\sum y du}{u} = \frac{\iint y dx dy}{u} \end{aligned}$$

Als Anwendung nehmen wir die Parabel (Fig. 36).

Will man die Fläche und den Schwerpunkt des Segmentes OMP finden, so integriert man bezüglich der Fläche zuerst nach y , von $y = 0$ bis $y = y$ und man hat

$$u = \int_0^y \int_0^x dy dx = \int y dx = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2p} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} xy.$$

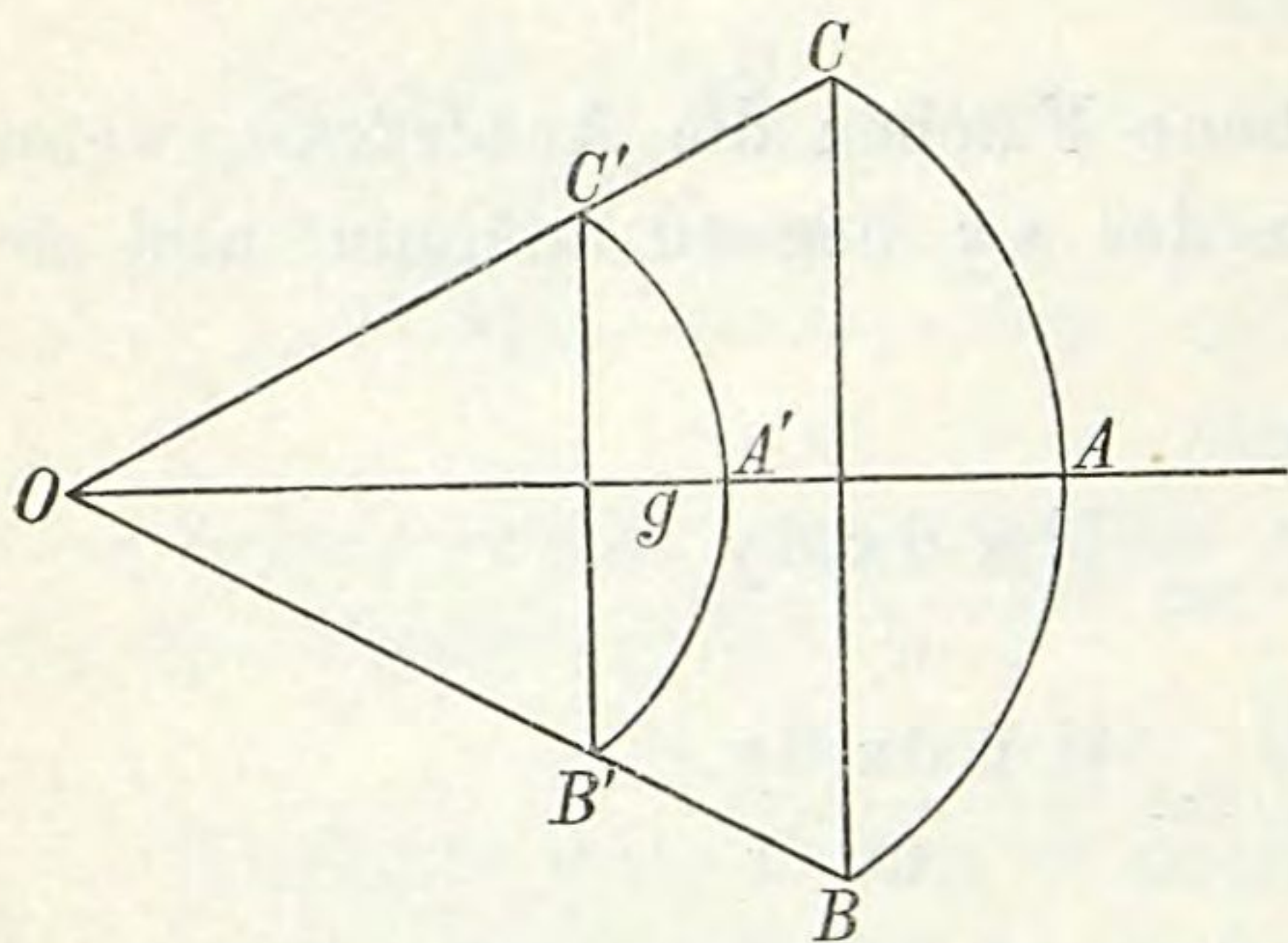
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\iint x dx dy}{u} = \frac{\int y x dx}{u} = \frac{\int \sqrt{2px} x dx}{u} = \frac{\sqrt{2p} \int x^{\frac{3}{2}} dx}{u} = \\ &= \frac{\frac{2}{5} \sqrt{2p} x^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3} \sqrt{2p} x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5} x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\iint y dy dx}{u} = \frac{\int \frac{y^2}{2} dx}{u} = \frac{\int_0^x px dx}{u} = \frac{p \frac{x^2}{2}}{u} = \\ &= \frac{p \frac{x^2}{2}}{\frac{2}{3} \sqrt{2p} x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{px}{2}} = \frac{3}{8} y. \end{aligned}$$

Schwerpunkt eines Kreissectors.

§ 165. Um den Schwerpunkt eines Kreissectors zu finden, lässt man die x-Achse durch die Mitte des Sectors passieren, so dass der Schwerpunkt auf dieser Linie liegt. Betrachtet man den Bogen des Sectors als Polygon mit unendlich vielen Seiten, so wird der

Fig. 40.



Sector in unendlich viele gleiche Dreiecke zerlegt, und liegt in jedem Elementardreiecke der Schwerpunkt um $\frac{2}{3}$ des Radius von der gemeinsamen Spitze, also vom Kreismittelpunkte, entfernt.

Wir haben demnach ein System von Schwerpunkten des Sectors, welche alle auf dem mit $\frac{2}{3}$ des

Radius OA, also mit dem Radius OA' beschriebenen Bogen C'A'B' liegen, und mithin der Schwerpunkt dieses Bogens auch der Schwerpunkt des Sectors sein wird.

§ 166. Bezeichnen wir nun den Radius OA mit r, den Bogen BAC mit s, die Sehne BC mit a, so werden diese Größen für den Bogen B'A'C' $= \frac{2}{3} r, \frac{2}{2} s, \frac{2}{2} a$ sein.

Die Coordinate des Schwerpunktes dieses Bogens hat, wie wir bereits wissen, demnach zum Ausdrücke

$$x_1 = \frac{2}{3} \frac{ra}{s}.$$

x_1 ist daher auch die Coordinate des Schwerpunktes des Sectors, und wird daraus die Distanz des Schwerpunktes g vom Ursprunge O, also die Distanz gO, gefunden.

Der Sector besteht aus dem Dreiecke OBC und dem Segment BAC. Die Schwerpunkte vom Dreiecke und Sector sind bekannt, und aus diesen kann man leicht auch den Schwerpunkt des Segmentes berechnen. Alle drei Schwerpunkte liegen auf der x-Achse, nämlich auf dem die Mitte des Sectors passierenden Radius OA.

Cykloide.

§ 167. Bei der Cykloide (Fig. 37) hatten wir

$$dy = dx \sqrt{\frac{a-x}{x}}.$$

Die Ausdrücke für die Fläche und die Coordinaten sind

$$u = \Sigma du = \iint dx dy = \int_0^x y dx,$$

$$x_1 = \frac{\Sigma x du}{u} = \frac{\iint x dx dy}{u},$$

$$y_1 = \frac{\Sigma y du}{u} = \frac{\iint y dx dy}{u}.$$

Integrieren wir den Ausdruck für u durch Theile, so haben wir

$$\begin{aligned} u &= xy - \int x dy = xy - \int_0^x x dx \sqrt{\frac{a-x}{x}} = \\ &= xy - \int_0^x dx \sqrt{ax - x^2}, \end{aligned}$$

und ist das Integral von $x=0$ bis x zu nehmen.

Das Integral $\int dx \sqrt{ax - x^2}$ ist bekanntlich das Segment des erzeugenden Kreises CNP , wo $NP = \sqrt{ax - x^2}$ ist. Wir bezeichnen diese Fläche mit u' , und ist daher

$$u = xy - u'.$$

Nehmen wir den Bogen CM , so ist das Viereck $COMP = xy$, und sieht man daraus, da

$$u = xy - \text{Fläche } COM$$

ist, dass

$$\text{Fläche } COM = u' = \text{Segment } CNp$$

ist.

Nimmt man den Bogen CA , also die Hälfte des ganzen Cykloidenbogens, wo also $x=a$, $y=\frac{\pi a}{2}$ sind, so wird u' zur Hälfte des erzeugenden Kreises, und man hat alsdann

$$u = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{8} = \frac{3}{8} \pi a^2,$$

daher der Flächeninhalt der ganzen Cykloide

$$u = \frac{3}{4} \pi a^2$$

ist.

Der Flächeninhalt der Cykloide ist dreimal so groß als der des erzeugenden Kreises.

§ 168. Wir haben ferner:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{\iint x \, dx \, dy}{u} = \frac{\int y x \, dx}{u} = \\
 &= \frac{\frac{y x^2}{2} - \frac{\int x^2 \, dy}{2}}{u} = \frac{\frac{y x^2}{2} - \frac{\int x \, dx \sqrt{ax - x^2}}{2}}{u} = \\
 &= \frac{\frac{y x^2}{2} - \int \frac{1}{2} \left[\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2} - x \right) \right] dx \sqrt{ax - x^2}}{u} = \\
 &= \frac{\frac{y x^2}{2} - \frac{a}{4} u' + \int \frac{1}{2} \frac{(a - 2x)}{2} dx \sqrt{ax - x^2}}{u} = \\
 &= \frac{\frac{y x^2}{2} - \frac{a}{4} u' + \frac{1}{6} (ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}{xy - u'}.
 \end{aligned}$$

Eine Constante ist nicht beizusetzen, da für $x=0$, $y=0$, auch $x_1=0$ wird.

Ferner ist

$$y_1 = \frac{\iint y \, dy \, dx}{u} = \frac{\frac{y^2}{2} dx}{u} = \frac{\frac{y^2 x}{2}}{u} - \int \frac{x \, dy \cdot y}{u}$$

Für das Integral

$$\int x y \, dy$$

hat man aber

$$\begin{aligned}
 \int x y \, dy &= \int x y \, dx \sqrt{\frac{a-x}{x}} = \int y x^{\frac{1}{2}} \sqrt{a-x} \, dx = \\
 &= -\frac{2}{3} y x^{\frac{1}{2}} (a-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \int (a-x)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} \, dy + \frac{2}{3} \int (a-x)^{\frac{3}{2}} y \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Das Integral } \int (a-x)^{\frac{3}{2}} dy x^{\frac{1}{2}} &\text{ ist gleich } \int (a-x)^2 dx = \\
 &= -\frac{1}{3} (a-x)^3.
 \end{aligned}$$

$$\text{Integral } \int (a-x)^{\frac{3}{2}} y \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}} = \int (a-x) \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4} a y^2 - \int \frac{x y}{2} dy.$$

$$\text{Das Integral } -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \int x y \, dy = -\frac{1}{3} \int x y \, dy \text{ führen wir hin-}$$

über zum Integral $\int x y \, dy$ auf die linke Seite, und man hat

$$\frac{4}{3} \int x y \, dy = -\frac{2}{3} y x^{\frac{1}{2}} (a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} (a-x)^3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} a y^2 + c.$$

$$1. \quad \int x y \, dy = -\frac{1}{2} y (a-x) \sqrt{a x - x^2} - \frac{1}{6} (a-x)^3 + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} a y^2 + c,$$

für $x=0, y=0$ wird das Integral $= -\frac{1}{6} a^3$,

daher $c = \frac{1}{6} a^3$, und

$$2. \quad y_1 = \frac{1}{2} x y^2 + \frac{1}{2} y (a-x) \sqrt{a x - x^2} + \\ \frac{x y - u'}{x y - u'} + \frac{1}{6} (a-x)^3 - \frac{1}{8} a y^2 - \frac{1}{6} a^3.$$

Schwerpunkte von ebenen Flächen im allgemeinen.

§ 169. Wählt man für eine ebene Fläche die xy -Ebene, und ist die Fläche von einer geschlossenen Curve oder von zwei Curven und zwei Ordinaten umgrenzt und nicht von der x -Achse durchschnitten, so hat man für jede Abscisse zwei Ordinaten y, y' . Man

Fig. 41.

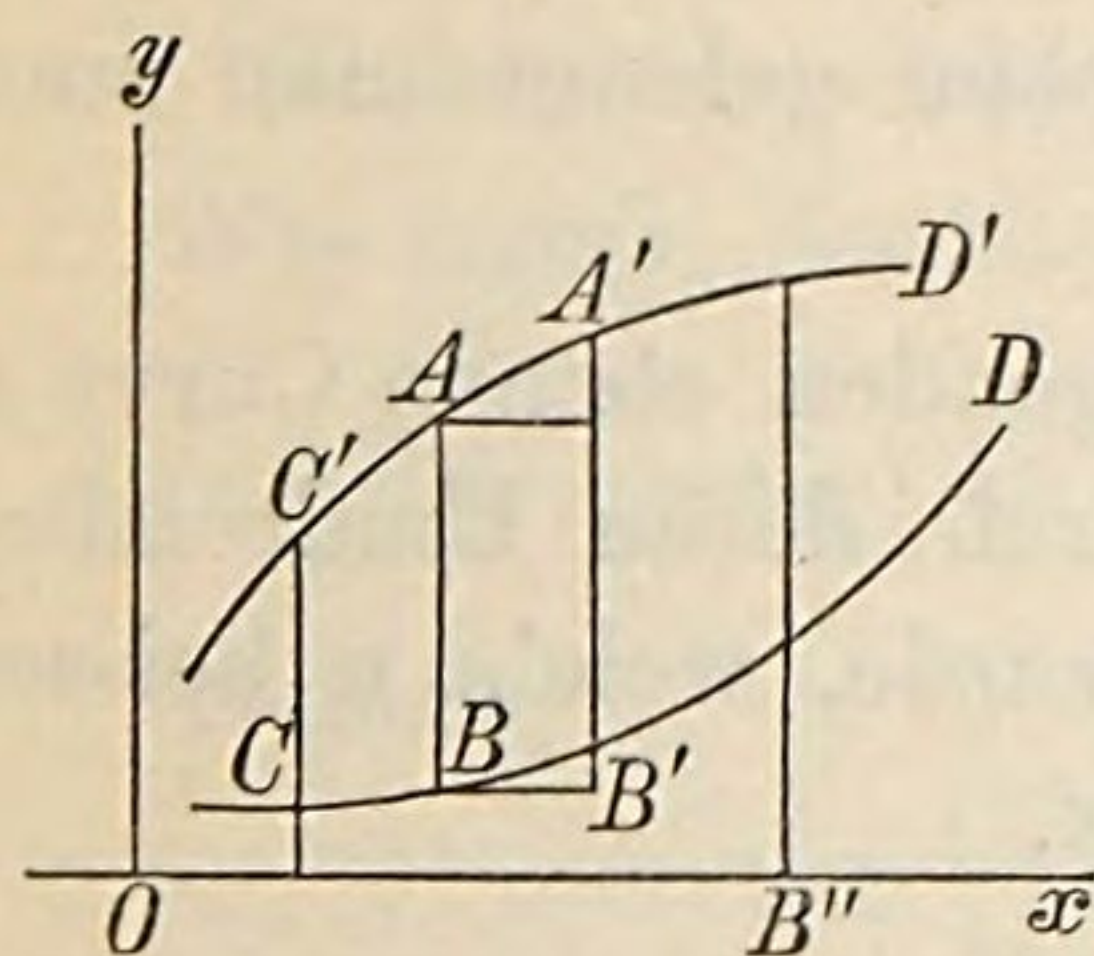
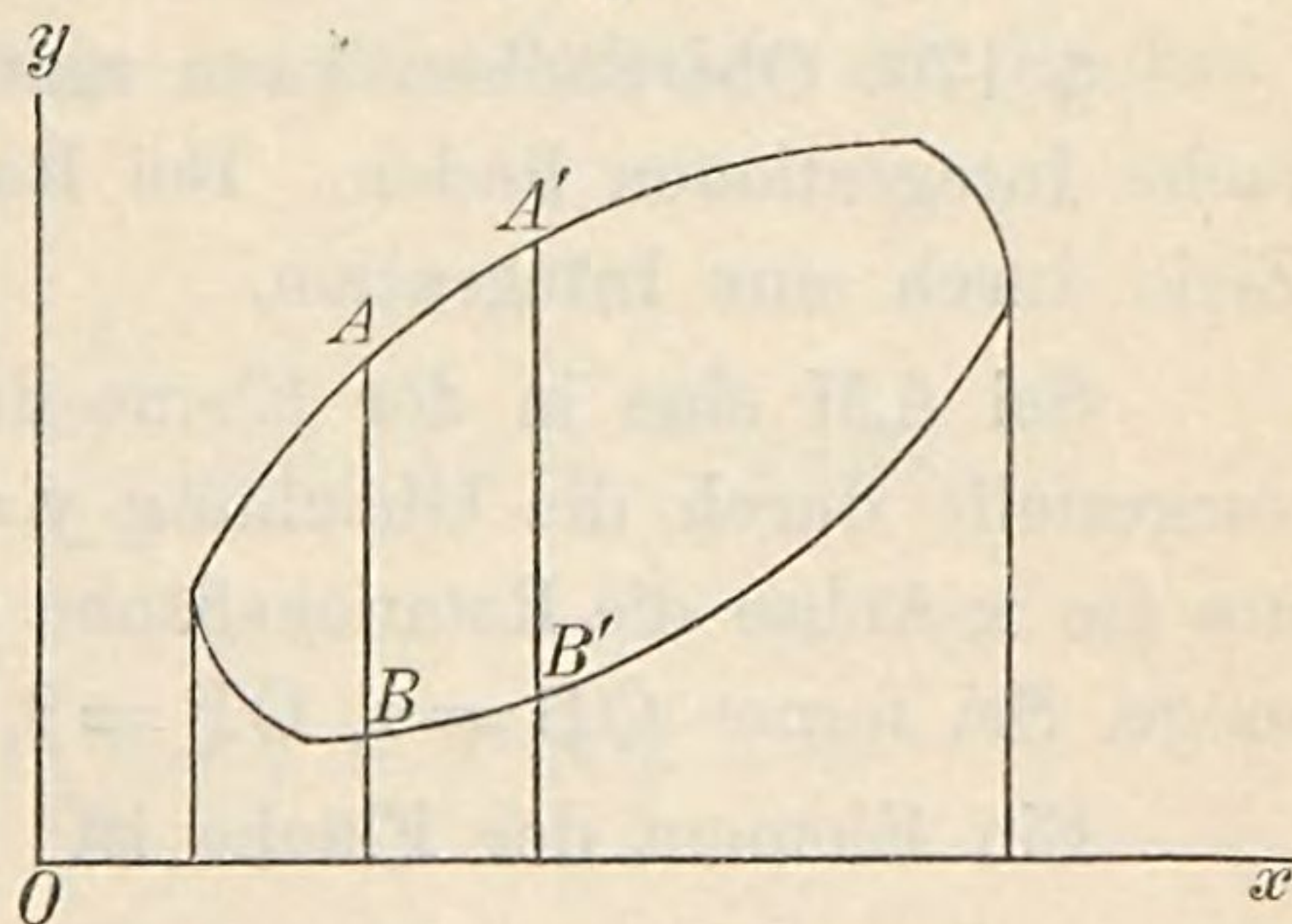


Fig. 42.



theile nun die Fläche in unendlich schmale, der y -Achse parallele Elemente. Jedes Element kann als ein Viereck angesehen werden, dessen Flächeninhalt gleich ist $AB \cdot BB'$. BB' ist gleich dx , AB ist gleich $y' - y$, daher der Flächeninhalt des Elementes gleich ist $(y' - y) dx$.

Als Coordinaten des Schwerpunktes des Elementes kann man, wegen dessen unendlicher Kleinheit, annehmen $x_1, \frac{y' + y}{2}$. Dieselben Betrachtungen beziehen sich auch auf die von einer geschlossenen Curve umgrenzten Fläche (Fig. 42).

Man hat daher, wenn man von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ und von $y = y$ bis $y = y'$ integriert, die Ausdrücke

$$u = \iint dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} (y' - y) dx$$

$$1. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\iint x dx dy}{u} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(y' - y) x dx}{u} \\ y_1 = \frac{\iint y dx dy}{u} = \int \frac{y^2 dx}{2u} \\ = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(y'^2 - y^2) dx}{u} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\frac{y' + y}{2} (y' - y) dx}{u} \end{cases}$$

Das dritte Integral folgt auch aus obigen Betrachtungen, indem das Moment des Elementes bezüglich der x-Achse, das ist dessen Größe $= (y' - y) dx$ multipliciert mit der y-Coordinate des Schwerpunktes $\frac{y' + y}{2}$ eben diesen Ausdruck gibt.

Zwanzigstes Capitel.

Flächeninhalt und Schwerpunkt von Rotationsflächen.

§ 170. Oberflächen kann man, wie wir gesehen, durch zweifache Integrationen finden. Bei Rotationsflächen gelangt man zum Ziele durch eine Integration.

Sei AM eine in der Ebene der xy liegenden ebenen Curve s, vorgestellt durch die Gleichung $y = fx$, durch deren Umdrehung um die x-Achse die Rotationsfläche erzeugt wurde, welche u heissen möge. Sei ferner $OB = \alpha$, $OP = \beta$, $Pp = dx$.

Ein Element der Fläche ist

$$du = 2\pi y ds = 2\pi y dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$u = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y ds.$$

Die Schwerpunkte jedes einzelnen Elementes und der ganzen Fläche liegen auf der Umdrehungsachse, also hier auf der Achse der

x , und das Moment eines jeden Elementes bezüglich der y -Achse wird ausgedrückt durch

$$x du.$$

Man hat demnach für Fläche und Coordinate des Schwerpunktes die Ausdrücke

$$u = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y ds$$

$$x_1 = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \frac{xy ds}{u},$$

wo x von α bis β zu nehmen ist.

Würde man die Curve um die y -Achse drehen, so werde man haben

$$u = 2\pi \int_{\alpha'}^{\beta'} x ds,$$

wo y von α' bis β' zu nehmen ist. Dann

$$y_1 = 2\pi \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{xy ds}{u}.$$

§ 171. Betrachten wir eine Kugelzone, welche dadurch erzeugt wurde, dass ein Kreisbogen in der Länge s sich um die x -Achse gedreht hat, und liegt der Bogen in der xy -Ebene. Nennen wir den Radius a , und nehmen wir die Zone zwischen zwei auf der Rotationsachse senkrechten Ebenen. Der Schwerpunkt liegt auf der x -Achse und die Fläche der Zone $= u$ nehmen wir von $x = \alpha$ bis $y = \beta$. Der Koordinatenanfang liege im Mittelpunkte des Kreises, dessen Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ ist.

Wir haben demnach

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = dx \frac{a}{y}.$$

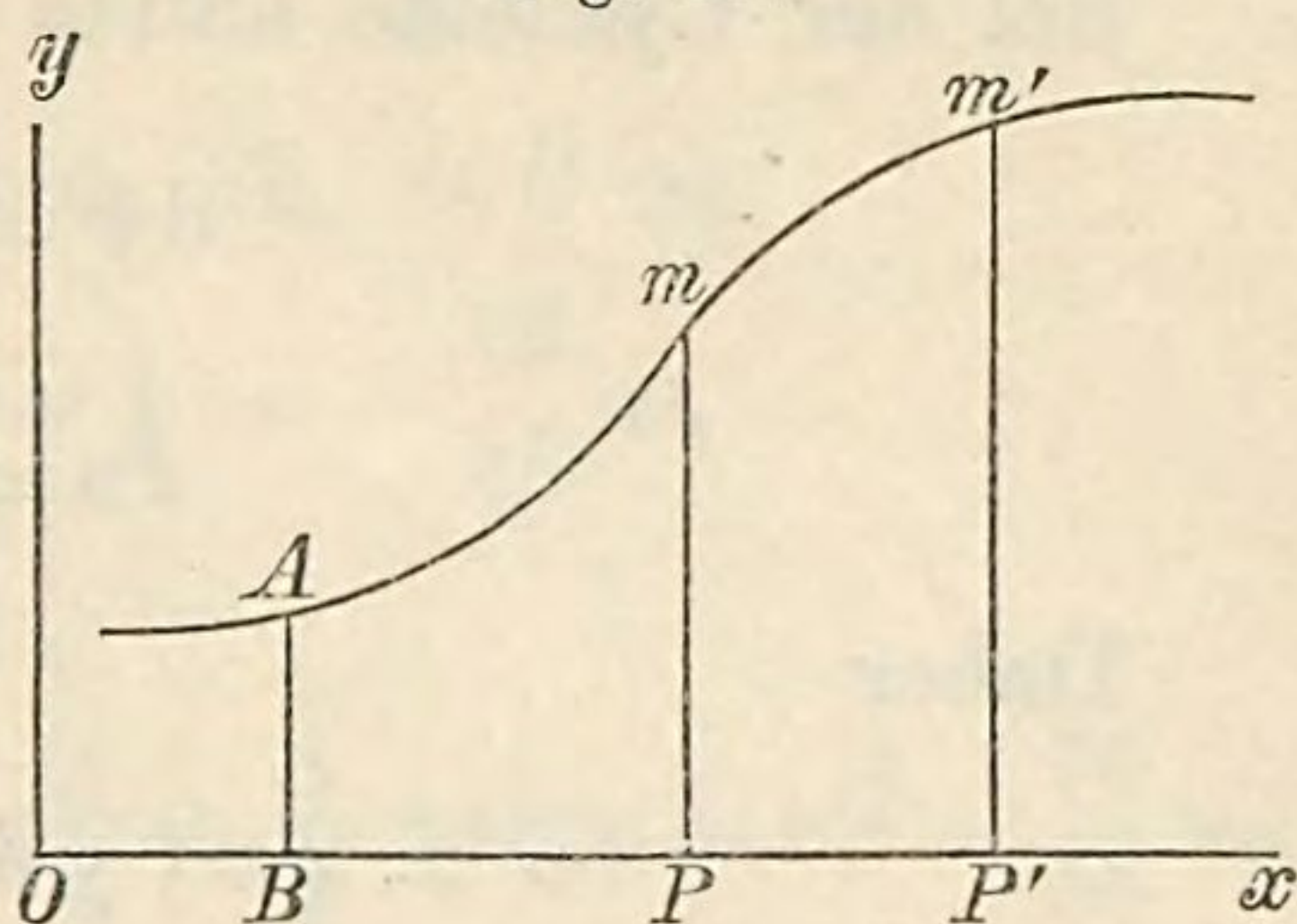
Daher

$$u = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y ds = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} a dx = 2\pi a (\beta - \alpha)$$

$$x_1 = \frac{2\pi \int_{\alpha}^{\beta} xy ds}{u} = \frac{2\pi a \int_{\alpha}^{\beta} x dx}{u} = \frac{\pi a (\beta^2 - \alpha^2)}{u} = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

Der Schwerpunkt der Zone liegt demnach auf dem zu den Begrenzungsebenen senkrechten Durchmesser in der Mitte und in gleicher Distanz von diesen Begrenzungsebenen.

Fig. 43.



§ 172. Betrachten wir nach Schwerpunkt und Fläche einer Cykloidenzone (Fig. 37).

Bei der Cykloide hatten wir

$$dy = dx \sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

$$ds = \sqrt{\frac{a}{x}} dx.$$

Daher

$$u = 2\pi \int y ds = 2\pi \sqrt{a} \int y \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}},$$

wenn man nämlich den Cykloidenbogen um die x-Achse sich umdrehen lässt. Es ist aber

$$\int y \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = 2y \sqrt{x} - \int 2\sqrt{x} dy = 2y \sqrt{x} - \int 2\sqrt{a-x} dx,$$

daher

$$u = 2\pi \sqrt{a} \cdot 2y \sqrt{x} + \frac{4 \cdot 2}{3} \pi \sqrt{a} (a-x)^{\frac{3}{2}} = 4\pi \sqrt{a} y x^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{8}{3} \pi \sqrt{a} (a-x)^{\frac{3}{2}} + c.$$

Nehmen wir die durch die Umdrehung des Bogens $CM = s$ um die x-Achse erzeugte Zone, wo mithin für $x = 0$, $s = 0$, $u = 0$ sind, so ist

$$c = -\frac{8}{3} \pi a^2,$$

daher

$$u = 4\pi \sqrt{ax} y + \frac{8}{3} \pi \sqrt{a} (a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3} \pi a^2.$$

§ 173. Ferner haben wir

$$x_1 = \frac{2\pi \int xy ds}{u} = \frac{2\pi \sqrt{a} \int y dx \sqrt{x}}{u}.$$

Das letzte Integral ist aber

$$\int y \sqrt{x} dx = y \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int x^{\frac{3}{2}} dy$$

$$= \frac{2}{3} y x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int x \sqrt{a-x} dx$$

$$= \frac{2}{3} y x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \int (a-x)^{\frac{3}{2}} dx - \frac{2a}{3} \int (a-x)^{\frac{1}{2}} dx,$$

daher

$$x_1 = \frac{2\pi\sqrt{a}}{u} \frac{2}{3} y x^{\frac{3}{2}} - \frac{2\pi\sqrt{a}}{u} \frac{4}{15} (a-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2\pi\sqrt{a}}{u} \frac{4}{9} a (a-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{c}{u}.$$

Die Constante ist, da $x = 0$ auch $u x_1 = 0$ ist,

$$c = - \left(\frac{8}{9} \pi a^3 - \frac{8}{15} \pi a^3 \right) = - \frac{16}{45} \pi a^3$$

daher

$$x_1 = \frac{1}{u} \left[\frac{4}{3} \pi y x \sqrt{a x} - \frac{8}{15} \pi \sqrt{a} (a-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{9} \pi a^{\frac{3}{2}} (a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{45} \pi a^3 \right]$$

Fläche und Schwerpunkt der durch die Umdrehung der halben Cykloide erzeugten Fläche erhält man, wenn man in obigen Ausdrücken $x = a$, $y = \frac{\pi a}{2}$ setzt. Man bekommt alsdann

$$u = 2 \pi a^2 \left(\pi - \frac{4}{3} \right)$$

$$x_1 = \frac{\frac{2\pi}{3} a^3 \left(\pi - \frac{8}{15} \right)}{u} = \frac{\frac{a}{3} \left(\pi - \frac{8}{15} \right)}{\left(\pi - \frac{4}{3} \right)}$$

Einundzwanzigstes Capitel.

Volumen und Schwerpunkt von Körpern.

§ 174. Die Berechnung des Schwerpunktes eines Volumens hängt im allgemeinen von dreifachen Integralen ab, und sind die Ausdrücke dafür

$$u = \iiint dx dy dz$$

$$x_1 = \frac{\iiint x dx dy dz}{u}$$

$$y_1 = \frac{\iiint y dx dy dz}{u}$$

$$z_1 = \frac{\iiint z dx dy dz}{u}.$$

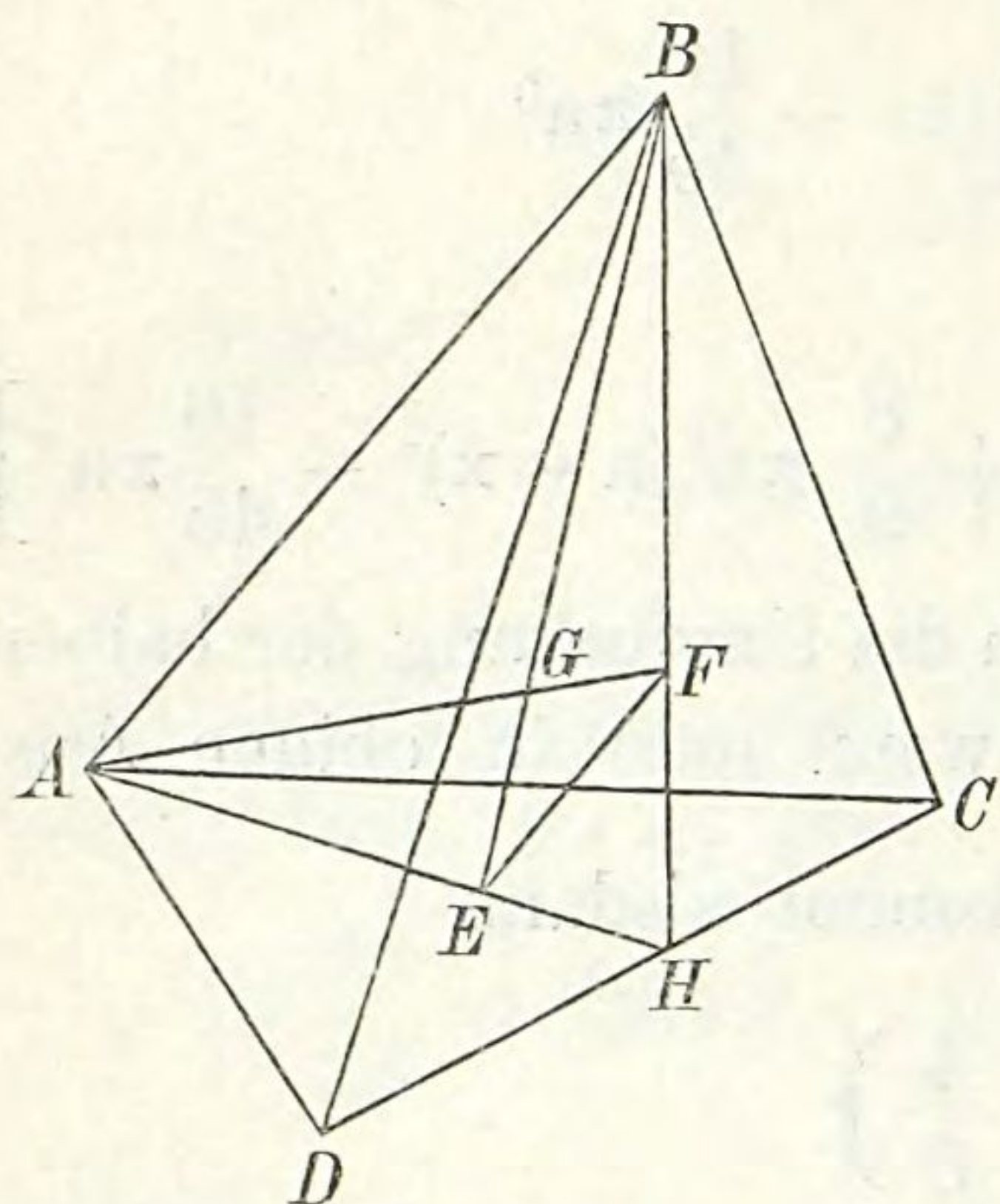
Bei manchen Körpern kann die Berechnung ohne Zuhilfenahme der Integralrechnung bewirkt werden.

Dieses ist der Fall bei einer dreiseitigen Pyramide.

Sei ABCD die Pyramide. Zieht man eine Linie von einer Spitze zum Schwerpunkte der gegenüberliegenden Basis, so liegt der Schwerpunkt der Pyramide auf dieser Linie. Denn denken wir

uns die Pyramide durch eine unendliche Anzahl von Ebenen geschnitten, welche sämmtlich parallel zu dieser Basis sind, so liegen sämmtliche Schwerpunkte der elementaren Schnitte auf dieser Linie, und mithin der Schwerpunkt des

Fig. 44.



ganzen Körpers auf dieser Linie. Ziehen wir von einer anderen Spitze der Pyramide zur gegenüberliegenden Basis, so liegen beide Linien offenbar in einer Ebene und wird der Schwerpunkt auch auf dieser zweiten Linie sich befinden. Der Durchschnitt beider Linien ist daher der Schwerpunkt der Pyramiden. Eben daraus, dass es nur einen Schwerpunkt gibt, folgt mit Nothwendigkeit, dass beide Linien sich schneiden und also in einer Ebene liegen.

In der Figur sind diese Linien AF, BE, deren Durchschnitt G ist der Schwerpunkt.

Verbindet man die Punkte E und F, so ist EF parallel zur AB, indem $AE = \frac{2}{3}AH$ und $BF = \frac{2}{3}BH$ sind.

Man hat demnach

$$EF : AB = FG : AG = GE : BG = EH : AH = 1 : 3,$$

daher

$$EG = \frac{1}{3}BG = \frac{1}{4}BE, \quad GF = \frac{1}{3}AG = \frac{1}{4}AF.$$

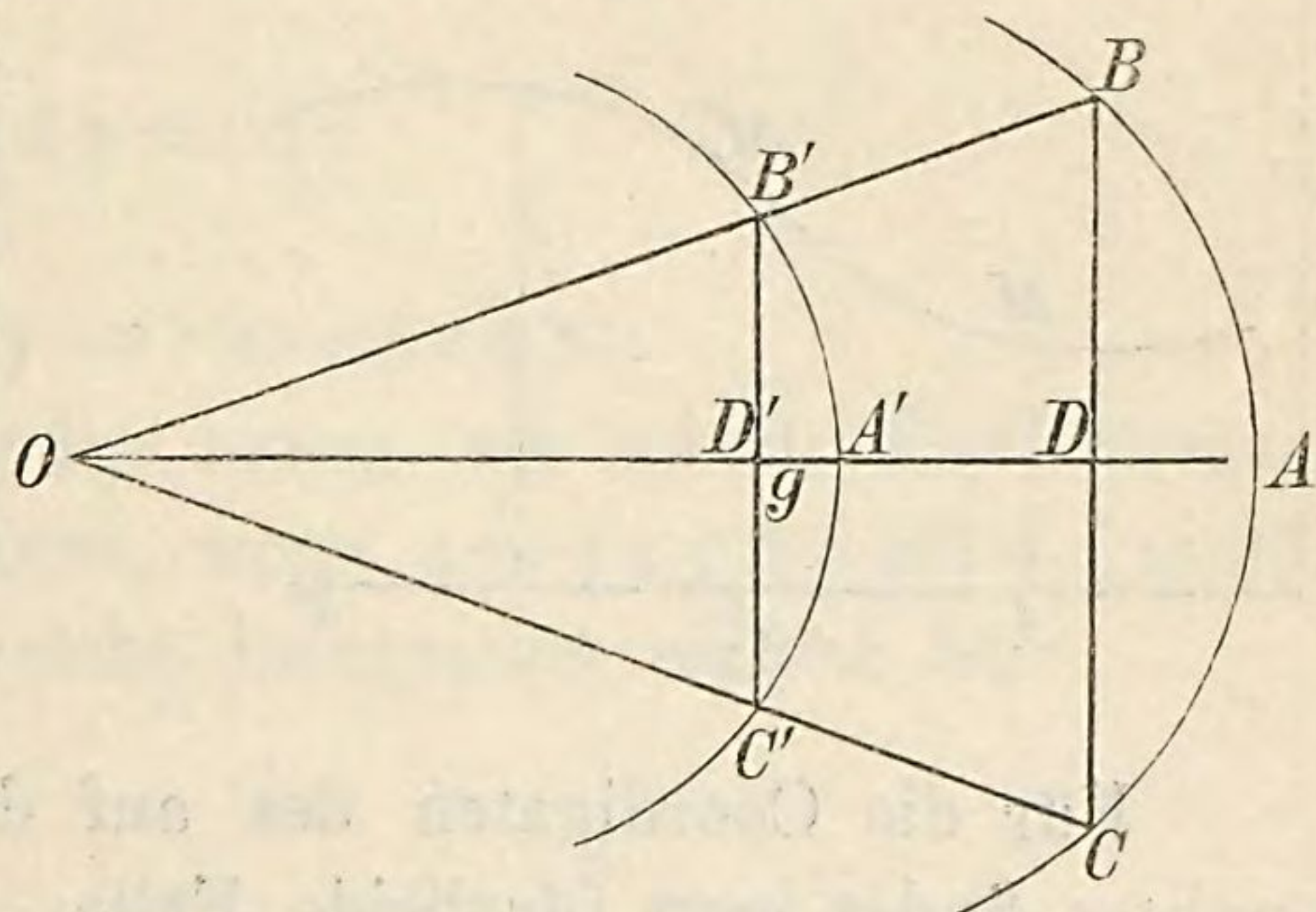
Der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide liegt demnach auf der Geraden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkte der Basis verbindet, und ist um $\frac{3}{4}$ dieser Linie von der Spitze entfernt.

Da jede mehrseitige Pyramide in dreiseitige Pyramiden mit gemeinsamer Spitze zerlegt werden kann, und auch ein Kegel in eine unendliche Zahl solcher Pyramiden zerlegt gedacht werden kann, so ist obiger Satz auf jede Pyramide und jeden Kegel mit beliebiger Basis auszudehnen. Zieht man ferner durch den Schwerpunkt der Pyramide oder des Kegels eine zur Basis parallele Ebene, und fällt von der Spitze eine Senkrechte auf die gegenüberliegende

Basis, die wir mit h bezeichnen, so werden die die Spitze mit dem Schwerpunkte der gegenüberliegenden Basis verbindende Linie und die Höhe h durch die parallele Ebene proportional getheilt, und der Schwerpunkt liegt demnach auf dem zur Basis geführten parallelen Schnitte, welcher um drei Viertel Theile der Höhe h von der Spitze entfernt ist.

§ 175. Auch den Schwerpunkt eines Kugelsectors kann man in dieser Weise finden. Man zerlegt denselben in eine unendliche Anzahl Pyramiden mit gemeinsamer Spitze im Mittelpunkte der Kugel, und deren sämtliche Basis auf der Grundfläche des Sectors liegen, so dass alle Schwerpunkte dieser Elementarpyramiden auf der Basis dieses concentrischen Sectors liegen, dessen Radius $\frac{3}{4}$ von dem des gegebenen ist. Der Schwerpunkt des Kugelsectors ist derselbe, wie der der Grundfläche des concentrischen Sectors.

Fig. 45.



Ist dieser Sector durch Rotation des Kreissectors BOA vom Winkel a um den Halbmesser $OA = r$ entstanden, so wird derselben in eine Anzahl dreiseitiger Pyramiden mit gemeinsamer Spitze in O zerlegt. Alle Schwerpunkte liegen auf der mit dem Halbmesser $OA' = \frac{3}{4} OA$ beschriebenen Zone $B'A'C'$. Der Schwerpunkt dieser Zone befindet sich auf der Umdrehungsachse OA , in der Mitte des Pfeiles AD' in G .

$$OA' \text{ ist aber } = \frac{3}{4} r, OD' = \frac{3}{4} OD = \frac{3}{4} r \cos a.$$

$$Og = \frac{\frac{3}{4} r + \frac{3}{4} r \cos a}{2} = \frac{3}{4} r \frac{(1 + \cos a)}{2} = \frac{3}{4} r \cos^2 \frac{a}{2}.$$

§ 176. In derselben Weise, wie man den Ausdruck für das Element einer Rotationsfläche gefunden, findet man auch für das Element von Rotationskörpern, wenn wir annehmen, dass der Körper dadurch erzeugt wurde, dass eine in der Ebene der xy liegenden

Fläche $A M A' M'$ begrenzt durch die $x = A x$ oder zwischen zwei Curven liegend, sich um die x -Achse dreht, die Ausdrücke

$$1. u = \pi \int_{\beta}^{\alpha} y^2 dx,$$

$$2. u = \pi \int_{\beta}^{\alpha} (y'^2 - y^2) dx,$$

wo nämlich u das Volumenelement bezeichnet, und x von α bis β genommen wird, und 1. auf Fig. 46, 2. auf Fig. 47 sich beziehen.

Fig. 46.

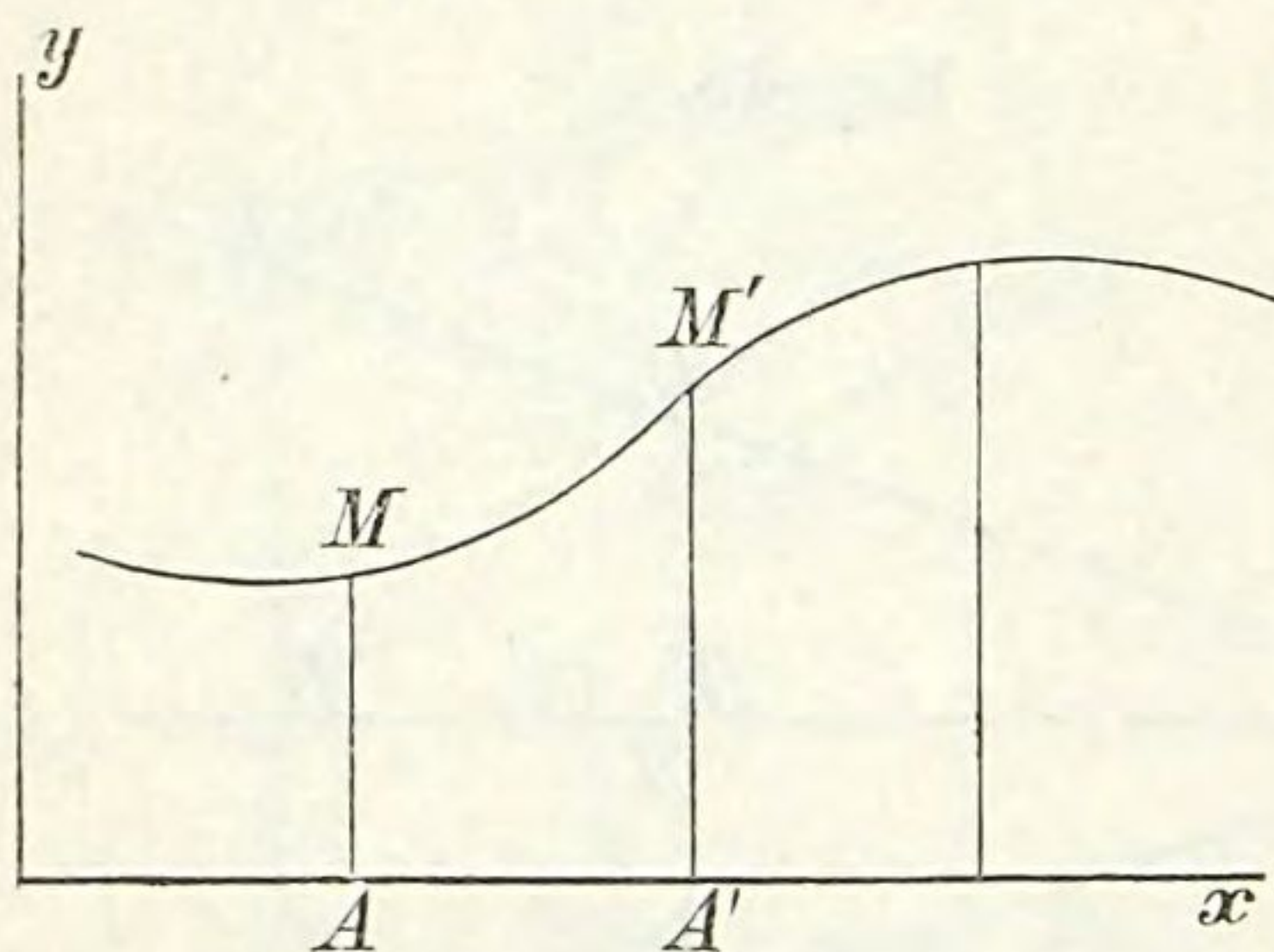
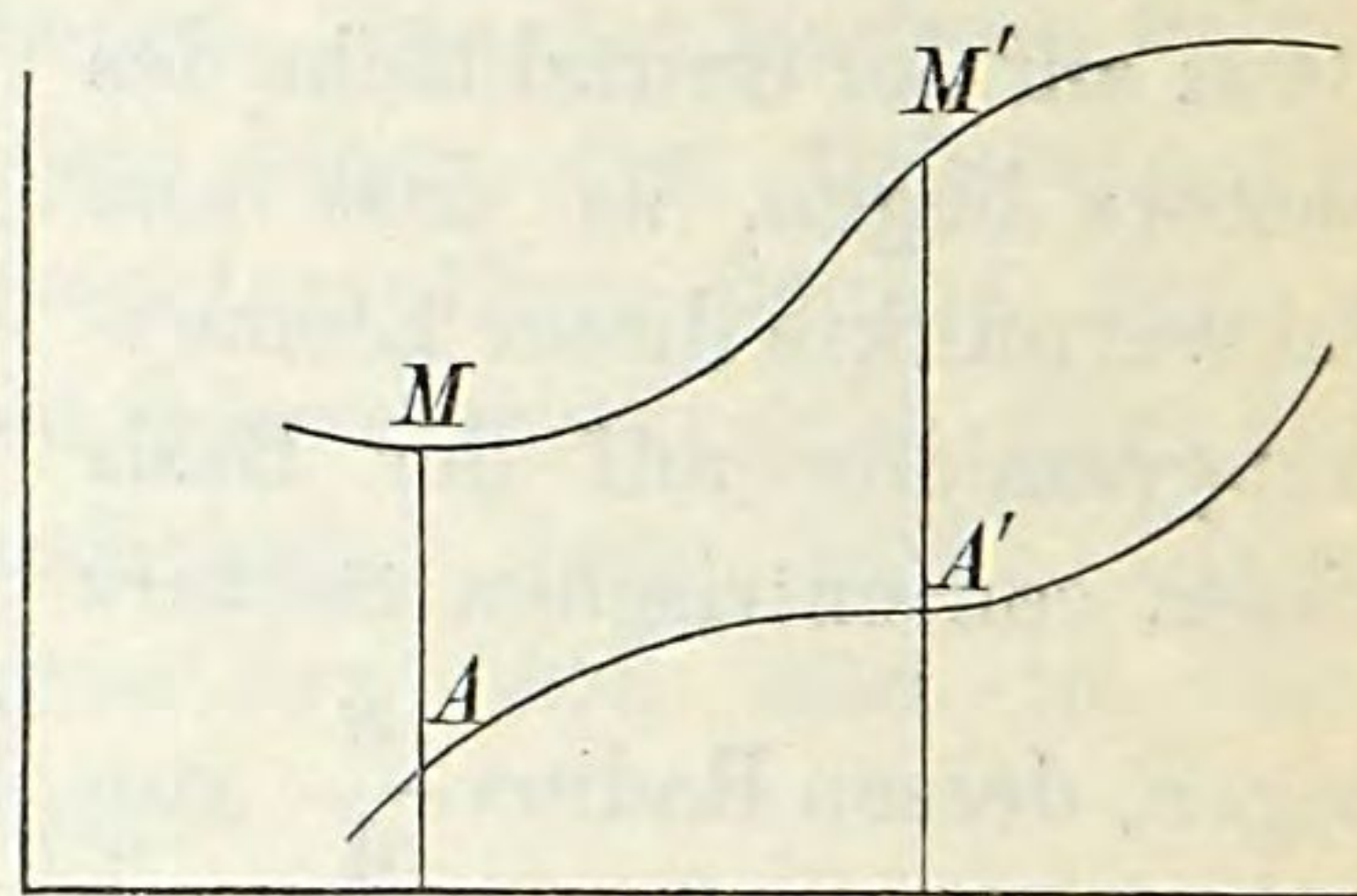


Fig. 47.



Für die Coordinaten des auf der x -Achse liegenden Schwerpunktes findet man für beide Fälle

$$x_1 = \frac{\pi \int_{\beta}^{\alpha} y^2 x dx}{u}$$

$$x_1 = \frac{\pi \int (y'^2 - y^2) x dx}{u}.$$

Cykloidenkörper erzeugt durch Rotation um die x -Achse.

§ 177. Sei der Körper durch Umdrehung der Cykloidenfläche $C M P$ um die Achse der x erzeugt (Fig. 37).

Integrieren wir durch Theile, so haben wir für

$$u = \int_0^{\beta} y^2 dx = \pi y^2 x - 2 \pi \int x y dy.$$

Das Integral $\int x y dy = \int y \sqrt{x} \sqrt{(a-x)} dx$ haben wir bereits § 168 gefunden.

Wir hatten nämlich

$$\int x y dy = \frac{a^3}{6} - \frac{y}{2} (a-x) \sqrt{ax-x^2} - \frac{1}{6} (a-x)^3 + \frac{1}{8} a y^2,$$

ferner haben wir

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{\pi \int_0^\beta \frac{y^2 x \, dx}{u}}{\pi y^2 \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2} \int x^2 \cdot 2y \, dy} = \\
 &= \frac{\pi y^2 \frac{x^2}{2} - \pi \int x \cdot x y \, dy}{u}
 \end{aligned}$$

Das Integral $\int x \cdot y x \, dy$ können wir, im Wege einer ähnlichen Transformation wie im § 168, ebenfalls durch Theile integrieren.

Setzen wir nämlich

$$\int y x \, dy = z$$

so ist

$$y x \, dy = dz.$$

Mithin haben wir

$$\int x \cdot x y \, dy = x z - \int z \, dx.$$

Den Ausdruck $z = \int x y \, dy$ haben wir schon. Das Integral $\int z \, dx$ können wir leicht erlangen, wenn $z = \int x y \, dy$ mit dx multipliciert und integriert wird, welche Integration einfach ist.

Die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 u &= \pi \int_0^\beta y^2 \, dx = \pi y^2 x - 2\pi \int_0^\beta x y \, dy \\
 x_1 &= \frac{\frac{\pi}{2} x^2 y^2 - \pi \int_0^\beta x \cdot y x \, dy}{u}
 \end{aligned}$$

lassen sich also leicht berechnen.

Nimmt man den von dem halben Cykloide CAD durch Umdrehung um die Achse der x erzeugten Körper, so muss man setzen

$$x = a, \quad y = \frac{\pi a}{2},$$

und dann erhält man nach Effectuierung der Integrationen

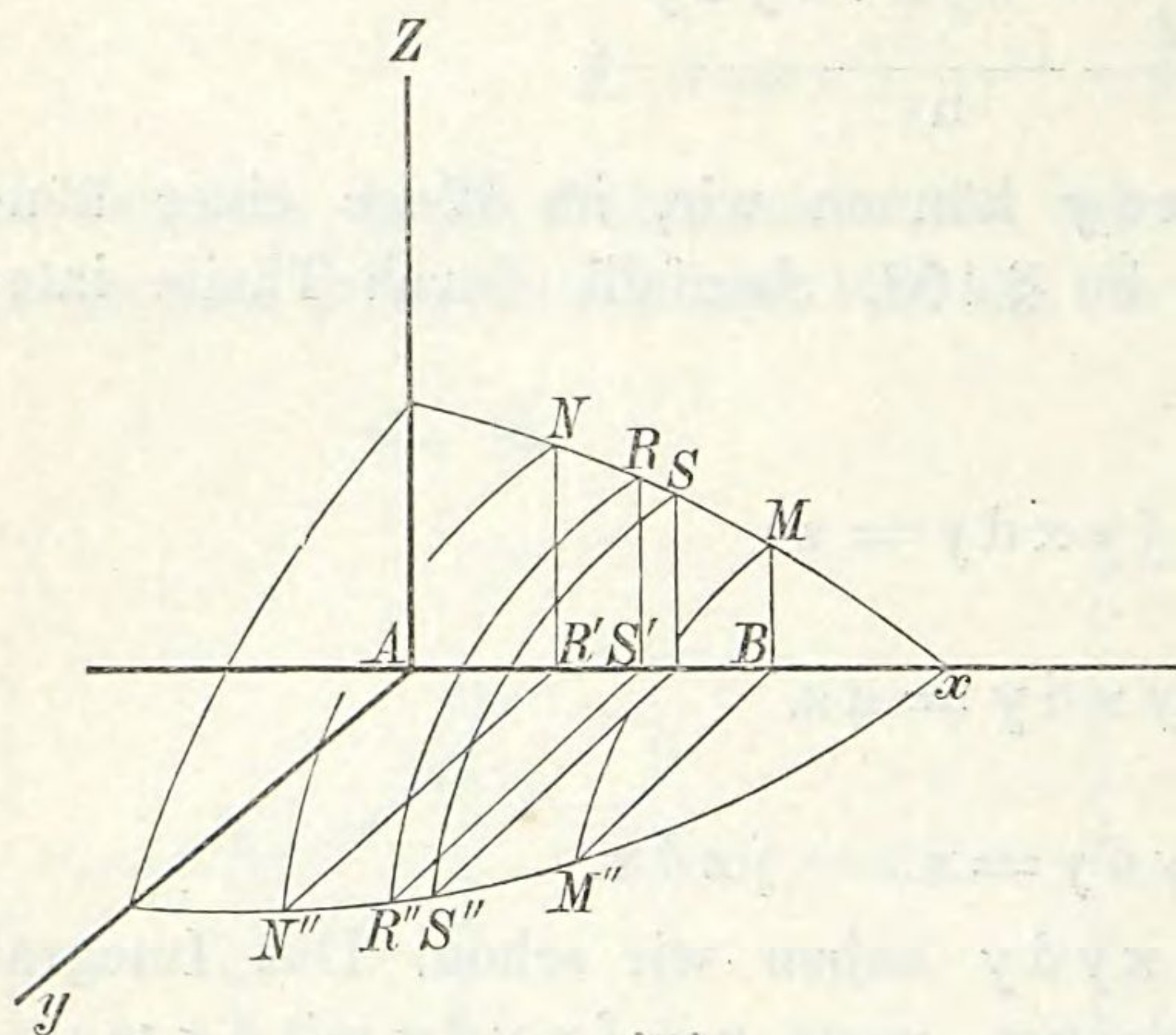
$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\pi a^3}{3} \left(\frac{9\pi^2}{16} - 1 \right) \\
 x_1 &= \frac{(63\pi^2 - 64)a}{12(9\pi^2 - 16)}.
 \end{aligned}$$

§ 178. Kann man den Körper in kleine Elemente zerlegen, deren Schwerpunkte in einer geraden Linie liegen, so kann man den Schwerpunkt des Körpers finden.

Der Mittelpunkt des Ellipsoides A sei der Coordinatenanfang. Wir suchen den Schwerpunkt eines zwischen zwei parallelen Ebenen

liegenden Segmentes, und lassen die Ebene der zy diesen Ebenen parallel gehen. Oy , Oz seien zwei conjugierte Durchmesser, die Ox

Fig. 48.



gehe durch alle Schwerpunkte der der Ebene yz parallelen Ebenen, so dass man ein schiefwinkeliges Coordinatensystem hat. $2A$, $2B$, $2C$ seien die drei conjugierten Durchmesser, und die Gleichung des Ellipsoides ist

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1.$$

Das Volumen eines unendlich dünnen Schnittes $RR'' SS''$ kann man als Cylinder mit der Basis RR''

und der Höhe dx betrachten und dieses Volumen hat zum Ausdrucke, da der Schnitt zur Gleichung hat

$$\frac{y^2}{B^2 \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)} + \frac{z^2}{C^2 \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)} = 1,$$

und der Flächeninhalt der Basis sein wird

$$\pi B C \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) \sin \varphi,$$

wenn man den Winkel der Achsen Oy Oz mit φ bezeichnet, ferner den Winkel zwischen dieser Ebene und der x -Achse ψ nennt,

$$du = \pi B C \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) \sin \varphi \sin \psi dx.$$

Nehmen wir das Integral von $x = \alpha$ bis $x = \beta$, so hat man

$$u = \pi B C \sin \varphi \sin \psi \int_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) dx$$

führt man die Integration aus, so hat man

$$u = \frac{\pi B C \sin \varphi \sin \psi}{A^2} \left[A^2 (\beta - \alpha) - \frac{(\beta^3 - \alpha^3)}{3} \right].$$

Den Schwerpunkt des Segmentes $RR'' MM''$, der auf der x -Achse liegt, hat man, wenn man erwägt, dass jedes Element $RR'' SS''$ in der ganzen Dicke x zur Abscisse hat, daher

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi B C \sin \varphi \sin \psi}{A^2 u} \int (A^2 - x^2) x dx = \\ &= \frac{1}{u} \frac{\pi B C \sin \varphi \sin \psi}{A^2} \left[A^2 \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{2} - \frac{(\beta^4 - \alpha^4)}{4} \right] \end{aligned}$$

führt man die Division von x_1 durch u durch, so fallen die Größen $B, C, \sin \varphi, \sin \psi$, welche im Zähler und Nenner vorkommen, heraus, so dass der Wert von x , von den Achsen und Winkeln $B, C, \sin \varphi, \sin \psi$ unabhängig ist, und auch die Abscisse des Schwerpunktes eines sphärischen Schnittes gibt, wo die Distanzen der beiden Basis vom Mittelpunkte α und β sind.

Zweiundzwanzigstes Capitel.

Guldinisches Theoreme.

a) Bei Oberflächen.

§ 179. Wir hatten für Coordinaten der Schwerpunkte von Curven den Ausdruck

$$y_1 = \frac{\int y ds}{s}, \quad \int y ds = y_1 s,$$

wo unter s die Länge der Curve verstanden wird, und ds das Element der Curve ist (§ 155).

Wir hatten ferner für eine Rotationsfläche, erzeugt durch Rotierung einer ebenen Curve um eine in dieser Ebene liegende Achse, die wir mit u bezeichnen, den Ausdruck

$$u = 2\pi \int y ds \quad (\S 170).$$

Man schließt daraus

$$1. \quad u = 2\pi y_1 s.$$

Diese Gleichung in Worten ausgedrückt lautet: Die von einer ebenen Curve durch Rotierung um eine in ihrer Ebene liegende Achse ist gleich der Länge des Curvenbogens multipliciert mit dem Umfange eines vom Schwerpunkte dieses Bogens beschriebenen Kreises.

Rotiert die Curve nicht einen ganzen Kreis, sondern bloß einen Winkel ϑ , und nennen wir diese Oberfläche u' , so hat man

$$\frac{u'}{u} = \frac{\vartheta}{2\pi}$$

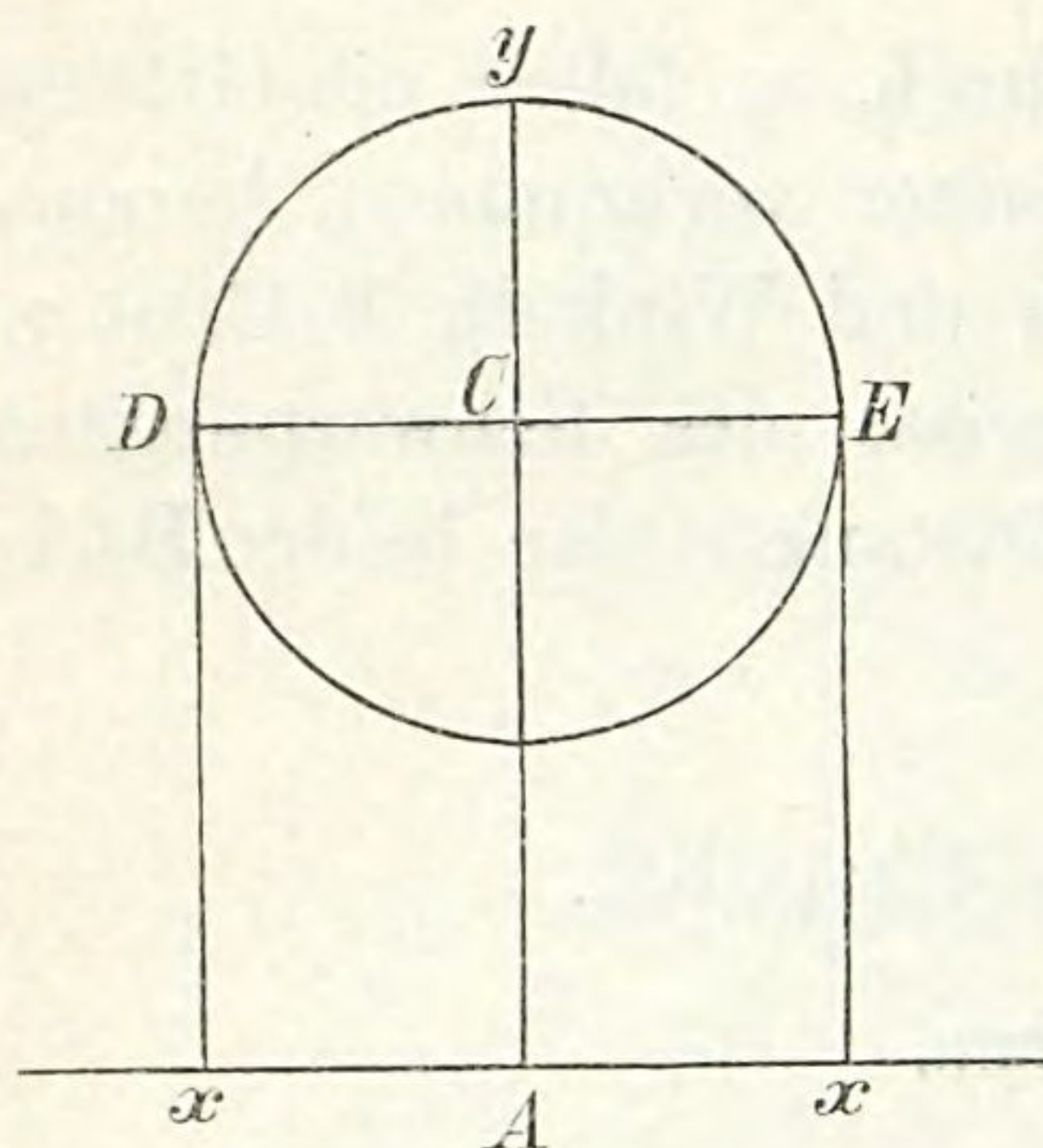
daher

$$2. \quad u' = \vartheta y_1 s$$

ϑy_1 ist der vom Schwerpunkte des Curvenbogens beschriebene Kreisbogen.

Der frühere Lehrsatz hat also auch hier Geltung, nur ist statt des ganzen Kreises der Kreisbogen zu setzen.

Fig. 49.



§ 180. Als Anwendung nehmen wir die Rotierung eines Kreises.

Ein Kreis vom Halbmesser r , in der Ebene der $x y$ liegend, dreht sich um die Axe der x , welche vom Mittelpunkte des Kreises um die Höhe $A C = a$ entfernt ist.

Die y -Achse gehe durch den Mittelpunkt. Hier haben wir als Gleichung des Kreises

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$ds = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

daher für die obere Kreishälfte

$$u' = 2\pi r \int_{-r}^r (a + \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

dann für die untere Kreishälfte

$$u'' = 2\pi r \int_{-r}^r (a - \sqrt{r^2 - x^2}) \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

daher für den ganzen Kreis

$$u = 4\pi a r \int_{-r}^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4\pi^2 a r = 2\pi r \cdot 2\pi a.$$

$2\pi a$ ist der Umfang des vom Schwerpunkt des Kreises beschriebenen Kreises.

b) Bei Rotationskörpern.

§ 181. Wir hatten ferner bei ebenen Flächen

$$wy_1 = \frac{1}{2} \int (y'^2 - y^2) dx \quad (\text{Fig. 41, Fig. 42}),$$

wo y' , y die zwei Ordinaten für eine Abscisse vorstellen, und w die Fläche vorstellt. Ferner halten wir (Fig. 47) bei Rotationskörpern, wo u den Körper vorstellt,

$$u = \pi \int (y'^2 - y^2) dx$$

daraus folgt

$$3. \quad u = 2\pi y_1 \cdot w.$$

In Worten: Das Volumen eines durch Rotation einer ebenen Fläche um eine in ihrer Ebene liegende Achse ist gleich

der erzeugenden Rotierungsfläche multipliciert mit dem Umfang des vom Schwerpunkte der Rotierungsfläche beschriebenen Kreises.

Hat die Fläche nicht einen ganzen Kreis, sondern bloß einen Winkel ϑ rotiert, so ist statt des Kreises der beschriebene Bogen zu nehmen

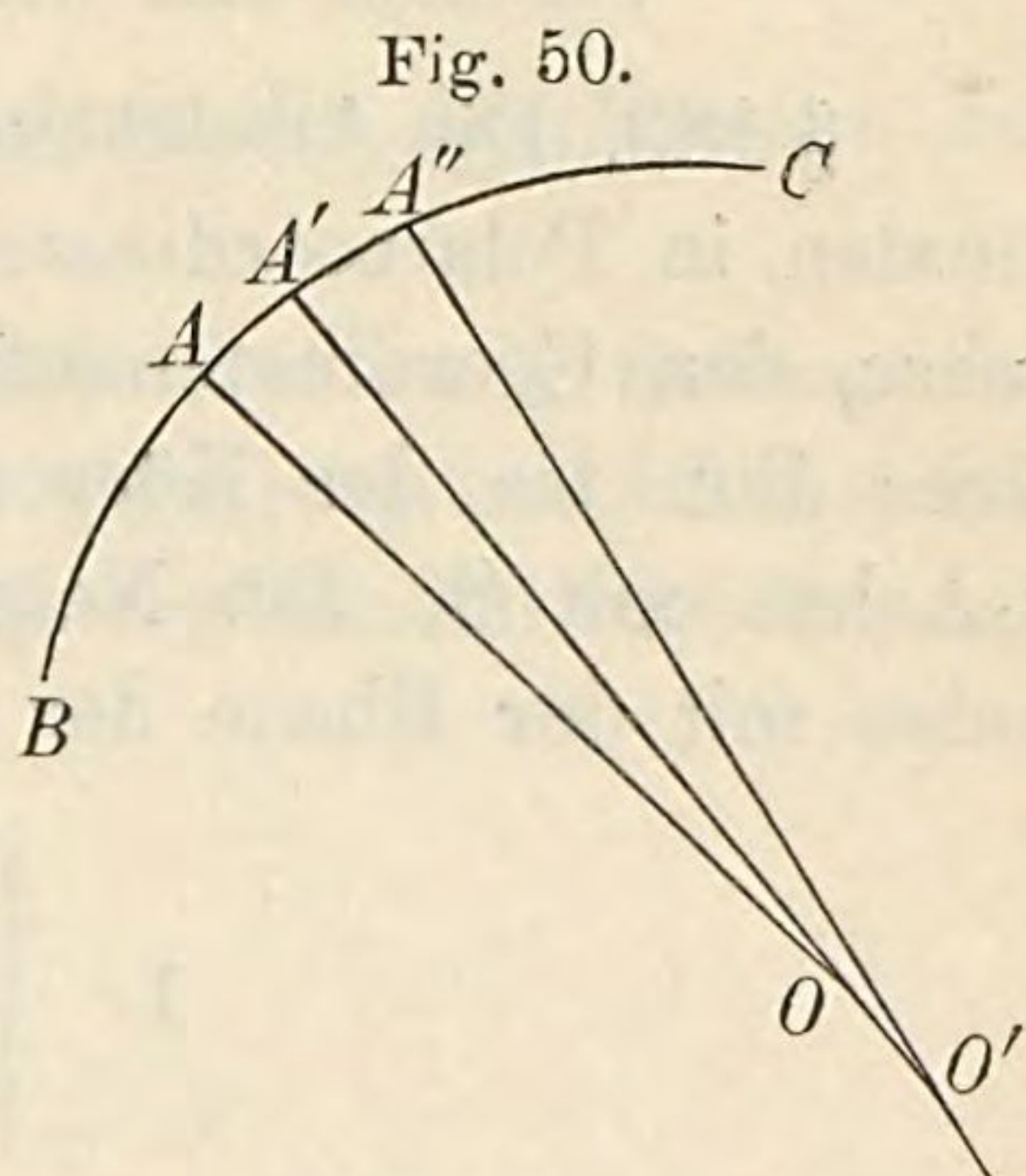
$$4. \quad u = \vartheta y_1 \cdot w.$$

§ 182. Dieses Guldinische Theoreme wird ausgedehnt. Bewegt sich eine Fläche im Raume derart, dass, während ein Punkt A dieser Fläche die Curve BC trifft, die Fläche normal zu dieser Curve steht, alsdann wird das Volumen des in dieser Weise erzeugten Körpers gleich sein dem Producte der sich bewegenden Fläche, multipliciert mit der vom Schwerpunkte dieser Fläche beschriebenen Curve.

Seien OA, OA' unendlich nahe Linien, in welchen die sich bewegende Ebene die Krümmungsebene des Punktes A der Curve BC successiv trifft. Diese beiden successiven Ebenen, die der Voraussetzung nach normal zur Curve BC sind, werden sich in O in einer auf der Krümmungsebene senkrechten Linie schneiden. Diese Senkrechte ist für den mit dem Halbmesser AO beschriebenen unendlich kleinen Bogen AA' die Achse des Krümmungskreises, und O ist der Mittelpunkt desselben. Beim Übergange daher der Erzeugungsfläche von der Lage, der AO entspricht, zu der unendlich nahen Lage, der A'O entspricht, kann man die Fläche so betrachten, als hätte sie um diese Achse rotiert, und findet dann auf diesen unendlich dünnen Rotationskörper das Guldinische Theoreme Anwendung, das heisst dieser dünne Rotationskörper wird gleich sein dem Producte der sich bewegenden Fläche multipliciert mit dem unendlich kleinen Bogen, den der Schwerpunkt der sich bewegenden Fläche beschrieben hat.

Dasselbe ist der Fall mit den anderen in dieser Weise erzeugten Körperelementen.

Daher wird der ganze in dieser Weise erzeugte Körper gleich sein dem Producte der Erzeugungsfläche multipliciert mit der Curve, die der Schwerpunkt dieser erzeugenden Fläche beschrieben hat.



Es wird bemerkt, dass die Curve BC, zu der die erzeugende Fläche normal steht, eine ebene oder doppelt gekrümmte Curve sein kann.

Auch wird hervorgehoben, dass die Erzeugungsfläche bei der Bewegung stets tangierend bleibt zur developpablen Fläche, welche infolge der successiven Durchschnitte der zur Leitlinie normalen Ebenen sich gebildet.

Dreiundzwanzigstes Capitel.

Volumen und Schwerpunkt bei Polarcoordinaten.

§ 183. Die Ausdrücke zur Verwandlung rechtwinkliger Coordinaten in Polarcoordinaten sind, wenn man die x-Achse zur Polarachse, den Coordinatenanfang O zum Pol wählt, den Radius vector eines Punktes des Körpers mit r , den Winkel desselben mit der x-Achse mit Θ , den Neigungswinkel der Ebene dieser beiden Geraden mit der Ebene der xy mit ϕ bezeichnet,

$$1. \quad \begin{cases} x = r \cos \Theta \\ y = r \sin \Theta \cos \phi \\ z = r \sin \Theta \sin \phi. \end{cases}$$

Durch diese Ausdrücke verwandeln sich die Formeln für Volumen und Coordinaten des Schwerpunktes

$$\begin{aligned} u &= \iiint dx dy dz \\ x_1 &= \frac{\iiint x dx dy dz}{u} \\ y_1 &= \frac{\iiint y dx dy dz}{u} \\ z_1 &= \frac{\iiint z dx dy dz}{u} \end{aligned}$$

in folgende

$$2. \quad \begin{cases} u = \iiint r^2 \sin \Theta d\Theta d\phi dr \\ x_1 = \iiint r^3 \frac{\cos \Theta \sin \Theta d\Theta d\phi dr}{u} \\ y_1 = \iiint r^3 \frac{\cos \phi \sin^2 \Theta d\Theta d\phi dr}{u} \\ z_1 = \iiint r^3 \frac{\sin^2 \Theta \sin \phi d\Theta d\phi dr}{u} \end{cases}$$

Ebenso sind die Ausdrücke in Polarcoordinaten für mit Masse gefüllte Körper, wo der Körper mit P bezeichnet wird, folgende:

$$3. \quad \begin{cases} P = g \iiint \rho r^2 \sin \Theta \, d\Theta \, d\phi \, dr \\ x_1 = \frac{g}{P} \iiint \rho r^3 \sin \Theta \cos \Theta \, d\Theta \, d\phi \, dr \\ y_1 = \frac{g}{P} \iiint \rho r^3 \sin^2 \Theta \cos \phi \, d\Theta \, d\phi \, dr \\ z_1 = \frac{g}{P} \iiint \rho r^3 \sin^2 \Theta \sin \phi \, d\Theta \, d\phi \, dr \end{cases}$$

Dabei weiß man aus § 134 und 140, dass das Gewicht des Körpers ausgedrückt wird durch

$$P = M g,$$

wo mit M die Masse des Körpers, und mit g die Acceleration der Schwere bezeichnet werden.

Diese Formeln kann man durch einfache Rechnung finden, und ist oft die Integration in Polarcoordinaten eine leichtere. Dazu hat man weiter die aus den Gleichungen 1. sich ergebenden Gleichungen

$$4. \quad \begin{cases} \text{Tang. } \phi = \frac{z}{y} \\ \cos \Theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ist auch zu ersehen, was übrigens sich von selbst versteht, dass ϕ auch den Winkel vorstellt, den die Projection des Radius vector auf die Ebene der yz mit der y -Achse bildet. Dieser Winkel und der erwähnte Neigungswinkel der Ebenen sind identisch.

§ 184. Der Ausdruck für das Element des Volumens du kann direct gefunden werden.

Sei M der Punkt, die Coordinaten r, Θ, ϕ , also OM der Radius vector, der Winkel, den er mit der x -Achse einschließt, $MOx = \Theta$, der Winkel zwischen dieser Ebene MOg und der xy -Ebene $= \phi$.

Verlängern wir den Radius um eine unendlich kleine Größe dr , so gelangen wir zu einem nachbarlichen Punkte M' , wo der Radius die Größe hat $r + dr = r'$.

In der Ebene MOx beschreiben wir mit r und r' um O zwei unendlich kleine Bogen $MN, M'N'$, so wird der Winkel zwischen ONN' und der x -Achse gleich sein $\Theta + d\Theta = \Theta'$.

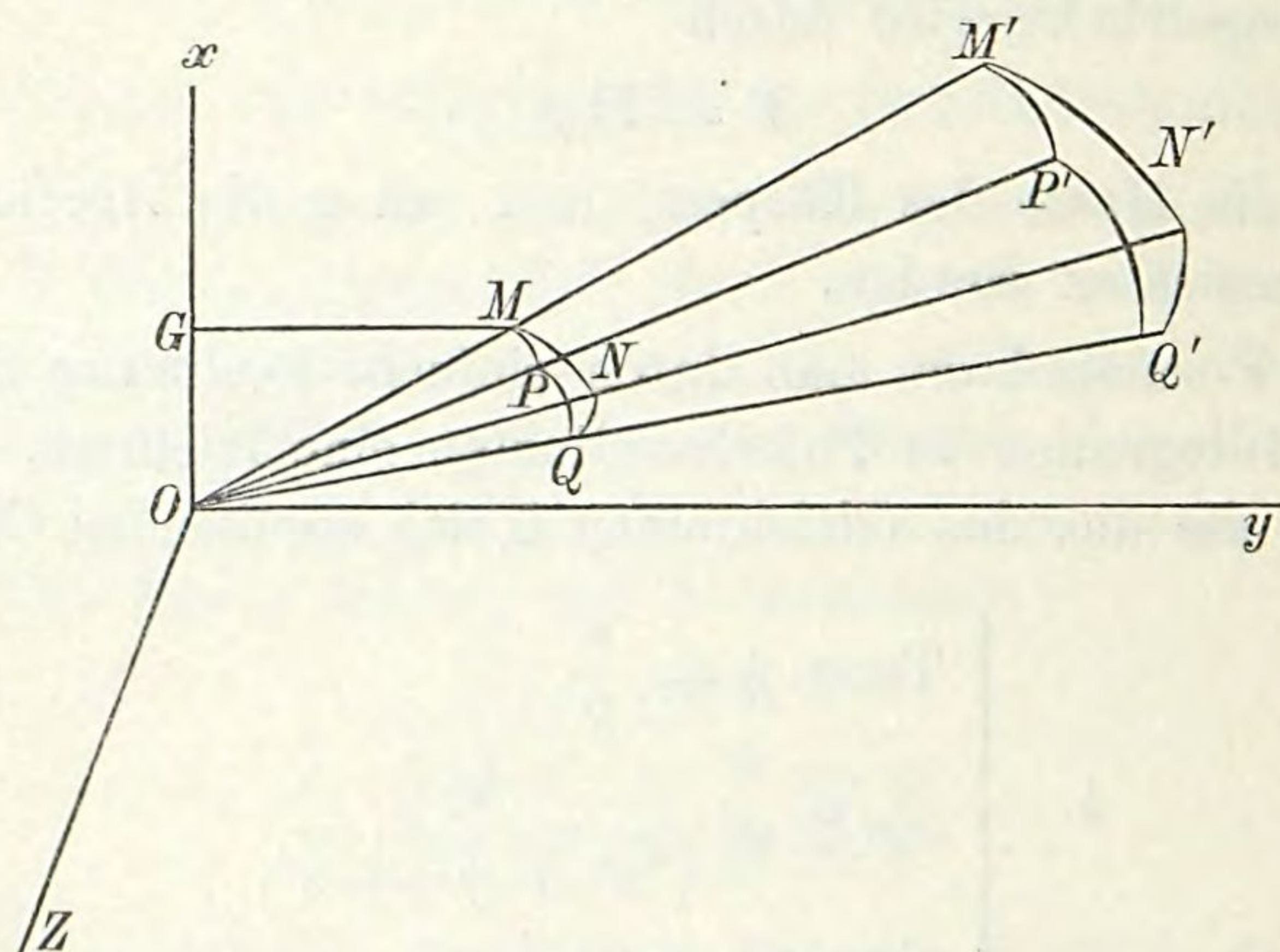
Lassen wir das kleine Viereck $MNM'N'$ um die x -Achse um einen unendlich kleinen Winkel $d\phi$ sich drehen, so dass wir zum

kleinen Viereck $PP'QQ'$ gelangen, welches mit der Ebene der xy den Winkel $\psi + d\psi = \psi'$ einschließt.

In dieser Weise entsteht ein unendlich kleiner Körper $MM'NN'PP'QQ'$, den wir mit du bezeichnen.

Endlich fällen wir von M , den man, wegen der unendlich kleinen Dimensionen der Fläche $MM'NN'$, als deren Schwerpunkt betrachten kann, auf die x -Achse die Senkrechte $MG = r \sin \Theta$.

Fig. 51.



Die kleine Fläche $MM'NN'$, die wir ds bezeichnen, als Differenz zweier Kreissectoren $OM'N'$, OMN hat zum Ausdrucke

$$\begin{aligned} ds &= \frac{1}{2} (r'^2 - r^2) d\Theta = \frac{1}{2} [(r + dr)^2 - r^2] d\Theta \\ &= \frac{1}{2} [r + dr + r] [r + dr - r] d\Theta = r dr d\Theta, \end{aligned}$$

indem wir beim Ausdrucke $[r + dr]$ die unendlich kleine Größe dr gegenüber r weglassen, und wie wir gesehen, $d\Theta$ den Winkel MON oder $M'ON'$ vorstellt.

Bei Drehung der unendlich kleinen Ebene $MM'NN'$ um die x -Achse hat diese Ebene also, wie wir hervorgehoben, deren Schwerpunkt M mit dem Radius $MG = r \sin \Theta$ einen unendlich kleinen Bogen MP beschrieben, der gleich ist $r \sin \Theta d\psi$.

Vermöge des Guldinischen Theoremes ist der in dieser Weise beschriebene Körper

$$du = ds \cdot r \sin \Theta d\psi,$$

mithin

$$\begin{aligned} du &= r dr d\Theta \cdot r \sin \Theta d\psi \\ &= r^2 \sin \Theta d\Theta d\psi dr. \end{aligned}$$

Der kleine Körper kann auch als Parallelepiped angesehen werden, dessen Seiten $MM' = dr$, $MP = r \sin \Theta d\psi$, $MN = r d\Theta$ sind, und daher dessen Körperinhalt

$$\begin{aligned} du &= dr \cdot r \sin \Theta d\psi \cdot r d\Theta \\ &= r^2 \sin \Theta d\Theta d\psi dr. \end{aligned}$$

Ferner ist die Fläche $MNPQ$ das Element der Kugeloberfläche vom Radius r , deren Mittelpunkt sich in O befindet. Nennen wir diese unendlich kleine Fläche $d\mu$, so hat man

$$d\mu = r^2 \sin \Theta d\Theta d\psi,$$

daher

$$du = d\mu dr.$$

Nennt man ferner das Element einer Kugelfläche vom Radius $= 1$ $d\omega$, so hat man

$$5. \quad \begin{cases} d\omega = \sin \Theta d\Theta d\psi \\ du = r^2 d\omega dr \end{cases}$$

§ 185. Belangend die Grenzen der Integration, so sind dieselben anders, wenn der Coordinatenursprung innerhalb oder außerhalb des Körpers liegt.

Liegt der Coordinatenursprung im Innern des Körpers, so integriert man von $r = 0$ bis $r = u$, und ergibt sich diese Größe aus der Gleichung der Fläche. Ferner den Winkel Θ von $\Theta = 0$ bis $\Theta = \pi$, den für ψ von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$, und hat man in dieser Weise das Volumen des ganzen Körpers.

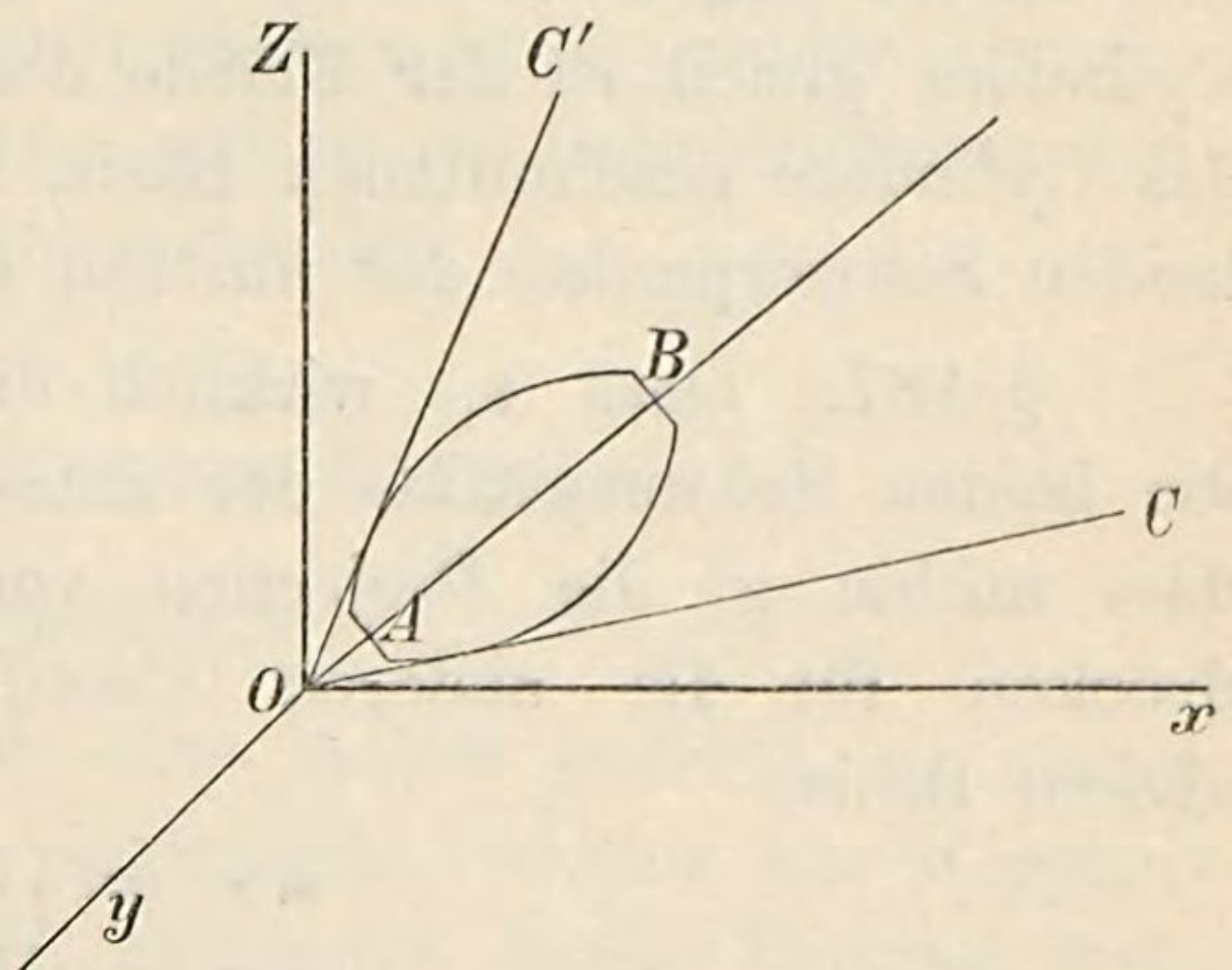
Liegt der Coordinatenursprung außerhalb und nehmen wir an, die Gleichung der Fläche sei

$$r = F(\Theta, \Psi),$$

so wird zuerst für r von $r = OA = u$ bis $r = OB = u'$, ferner für Θ von $\Theta = COx = \Theta'$ bis $\Theta = C'Ox = \Theta''$ integrieren, wo COx , $C'Ox$ die Winkel sind, welche die von O aus an den Körper, respective an dessen äußersten Grenzen geführten Tangenten mit der x -Achse einschließen. Endlich

wird man von ψ' bis ψ'' integrieren, und versteht man darunter die Winkel, welche zwei durch die x -Achse geführten, die Fläche tangierenden Ebenen mit der festen Ebene bilden, von welcher an ψ gezählt wird.

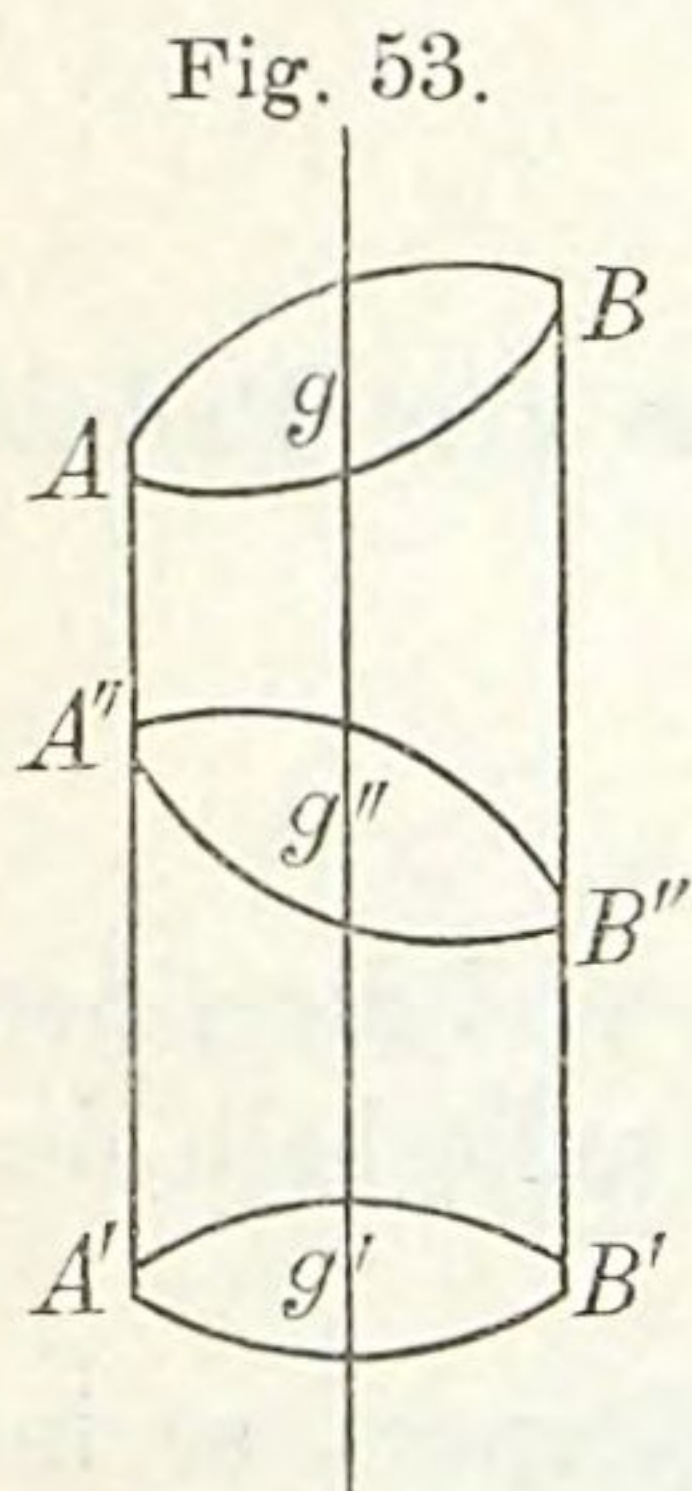
Fig. 52.



In beiden Fällen kann man die Ordnung der Integration ändern, und früher nach Θ oder ϕ integrieren. Wir werden Gelegenheit haben, solche Integrationen auszuführen.

Volumen und Schwerpunkt eines abgestumpften Cylinders.

§ 186. Sei $AA'BB'$ ein abgestumpfter Cylinder, wo die obere zu den Seiten desselben geneigte Basis AB mit der unteren



in der Ebene der xy liegenden, also gerade zu den Seiten des Cylinders geschnittenen Basis einen Winkel ϑ bildet. Den Flächeninhalt der unteren Basis $A'B'$ bezeichnen wir mit ω' , den der oberen Basis AB mit ω , so dass $\omega' = \omega \cos \vartheta$, $d\omega' = d\omega \cos \vartheta$

Wir hatten für die Coordinaten des Schwerpunktes einer Fläche

$$\omega z_1 = \iint z d\omega \quad (\S 154).$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit $\cos \vartheta$, so

hat man

$$\omega \cos \vartheta z_1 = \iint z d\omega \cos \vartheta$$

also

$$\omega' z_1 = \iint z d\omega'.$$

$z d\omega'$ stellt das Volumen eines unendlich schmalen Cylinders vor, dessen untere und obere Basis $d\omega'$, $d\omega$ sind und die Höhe z ist. Mithin ist $\iint z d\omega'$ das Volumen des Cylinders $A'B'AB$ und die letzte Gleichung sagt daher aus, wenn man bedenkt, dass z_1 die Distanzlinie bedeutet, welche die beiden Schwerpunkte der unteren und oberen Bögen verbindet: dass das Volumen eines abgestumpften Cylinders gleich ist der Fläche der unteren, gerade zu den Seiten des Cylinders geschnittenen Basis, multipliciert mit der Distanz der beiden Schwerpunkte der unteren und oberen Basis.

§ 187. Dass z_1 wirklich die Distanzlinie bedeutet, welche die beiden Schwerpunkte der unteren und oberen Basis verbindet, dass mithin g' die Projection von g ist, erhellt aus den Ausdrücken für die anderen Coordinaten des Schwerpunktes der oberen Basis,

$$\omega x_1 = \iint x d\omega$$

$$\omega y_1 = \iint y d\omega.$$

Multipliziert man diese Ausdrücke mit $\cos \vartheta$, so wird

$$\omega \cos \vartheta \cdot x_1 = \omega' x_1 = \iint d\omega \cos \vartheta x = \iint d\omega' x$$

$$\omega \cos \vartheta \cdot y_1 = \omega' y_1 = \iint d\omega \cos \vartheta y = \iint d\omega' y$$

Ausdrücke, welche für die untere Basis gelten, denn, bezeichnet man die Coordinaten von g' mit x'_1, y'_1 , so hat man

$$\omega' x'_1 = \iint x d\omega', \quad \omega' y'_1 = \iint y d\omega',$$

so dass

$$x'_1 = x_1, \quad y'_1 = y_1,$$

und mithin x_1, y_1 für beide Flächen die nämlichen sind, und auch Geltung für jede den Cylinder unter welchem Winkel immer durchschneidende Ebene haben; bei jeder liegt also der Schwerpunkt des Schnittes auf der Linie z_1 .

Ist der Cylinder durch eine andere Ebene $A''B''$ durchschnitten, welche zur Erzeugungsline geneigt ist, so ist, da die Linie $g'g$ die ist, welche die beiden Schwerpunkte der oberen und untersten Basis verbindet, $g''g'$ die Linie, welche den Schwerpunkt der Flächen $A''B''$ und $A'B'$ verbindet.

Das Volumen $A'B'AB = \text{Fläche } A'B' \cdot g'g$.

Das Volumen $A'B'A''B'' = \text{Fläche } A'B' \cdot g'g''$.

Zieht man daher das Volumen $A'B'A''B''$ vom Volumen $A'B'AB$ ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned} A'B'AB - A'B'A''B'' &= A''B''AB \\ &= A'B' \cdot g'g - A'B'g'g'' \\ &= A'B'(g'g - g'g'') \\ &= A'B'g''g \end{aligned}$$

daher ist das Volumen des von zwei zur Erzeugungsline des Cylinders geneigten Ebenen begrenzten Cylinders

$$A''B''AB = A'B'g''g,$$

also gleich dem Producte des Flächeninhaltes eines geraden Durchschnittes, multipliciert mit der Linie, welche die Schwerpunkte der beiden schiefen, begrenzenden Basis verbindet.

Vierundzwanzigstes Capitel.

Trägheitsmomente.

§ 188. Wird ein Körper um eine Achse gedreht, so nennt man das Product der Masse eines materiellen Punktes des Körpers multipliciert mit dem Quadrate des Abstandes dieses Punktes von der Drehungsachse, also das Product mr^2 das Trägheitsmoment des Punktes in Bezug auf die Rotationsachse.

Jeder Körper oder jedes Punktsystem besteht aus vielen materiellen Punkten, so dass jedem materiellen Punkte, je nach der

Entfernung von der Drehungsachse, ein eigenes Trägheitsmoment zukommt, mithin für jeden Körper eine unendliche Reihe von Trägheitsmomenten seiner Punkte vorhanden ist, $mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \dots$

Unser Bestreben geht nun dahin, für diese Trägheitsmomente der einzelnen materiellen Punkte ein Gesammtträgheitsmoment des ganzen Körpers aufzufinden, welches jene Theilträgheitsmomente vollständig ersetzt, mit anderen Worten ein Trägheitsmoment aufzuzeigen, welches in einem gewissen einheitlichen Abstände von der Drehungsachse dieselbe Wirkung erzeugt, wie die Summe der einzelnen Trägheitsmomente. Dieses Trägheitsmoment wird das des Körpers sein.

Wir werden später in der Dynamik sehen, wie man zu diesem Begriffe des Trägheitsmomentes gelangt ist. Hier werden wir bloß die Berechnung der Trägheitsmomente für verschiedene Körper behandeln, für welche uns die bisher aufgestellten Principien vollkommen ausreichen. Da wir ferner die Berechnung ohne Beziehungen auf Kräfte durchführen, so ist sie Gegenstand der Statik und ihr Platz hier gerechtfertigt.

§ 189. Wir beziehen den Körper auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, theilen ihn in eine unendlich grosse Anzahl unendlich kleiner Elemente, bezeichnen jedes unendlich kleine Volumen mit du und jedes Element des materiellen Körpers mit m . Jedes Element betrachten wir als ein unendlich kleines Parallelepipet, also vom Volumen $dx dy dz$, enthaltend einen Massepunkt m , bezeichnen mit ρ die specifische Masse oder die Dichte des Körpers in der Umgebung des Punktes m , und dann geben wir

$$du = dx dy dz$$

$$m = \rho du = \rho dx dy dz.$$

Ferner haben wir, wenn wir die z -Achse zur Drehungsachse nehmen, für die Entfernung eines Punktes von der Rotationsachse

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Das Trägheitsmoment eines Punktes des Körpers hat demnach zum Ausdrücke

$$(x^2 + y^2) \rho dx dy dz,$$

indem die Grösse r^2 oder $(x^2 + y^2)$ für den Umfang des unendlich kleinen Parallelepipides als constant betrachtet wird.

Das totale Trägheitsmoment des ganzen Körpers wird demnach sein

$$\Sigma m (x^2 + y^2) = \Sigma \rho du (x^2 + y^2) = \iiint \rho dx dy dz (x^2 + y^2).$$

§ 190. Wie wir bereits bei Berechnung von Schwerpunkten bemerkt, genügt dieser Ausdruck für die Mechanik, wo es sich nicht um Molecularkräfte handelt, vollkommen. Wir betrachten den Körper als continuierlich mit Masse gefüllt und brauchen die unendlich kleinen Leeren im Körper nicht berücksichtigt werden, derart, dass das Integral $\iiint \rho \, dx \, dy \, dz (x^2 + y^2)$, ausgedehnt auf das ganze Volumen des Körpers, das totale Trägheitsmoment desselben vorstellt, und mit Recht dem Summenzeichen Σ das Integralzeichen $\int$ substituiert werden kann.

Das Integral $\iiint \rho \, dx \, dy \, dz (x^2 + y^2)$ ist also das totale Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf die z-Achse.

§ 191. Nehmen wir die x-Achse oder die y-Achse zur Drehungsachse, so werden wir in Beziehung auf diese Achsen für die totalen Trägheitsmomente des Körpers die respectiven Ausdrücke haben,

$$\begin{aligned} \iiint \rho \, dx \, dy \, dz (y^2 + z^2), \\ \iiint \rho \, dx \, dy \, dz (x^2 + z^2), \end{aligned}$$

und gelingt uns die Integration zu effectuieren, dann ist die Aufgabe gelöst.

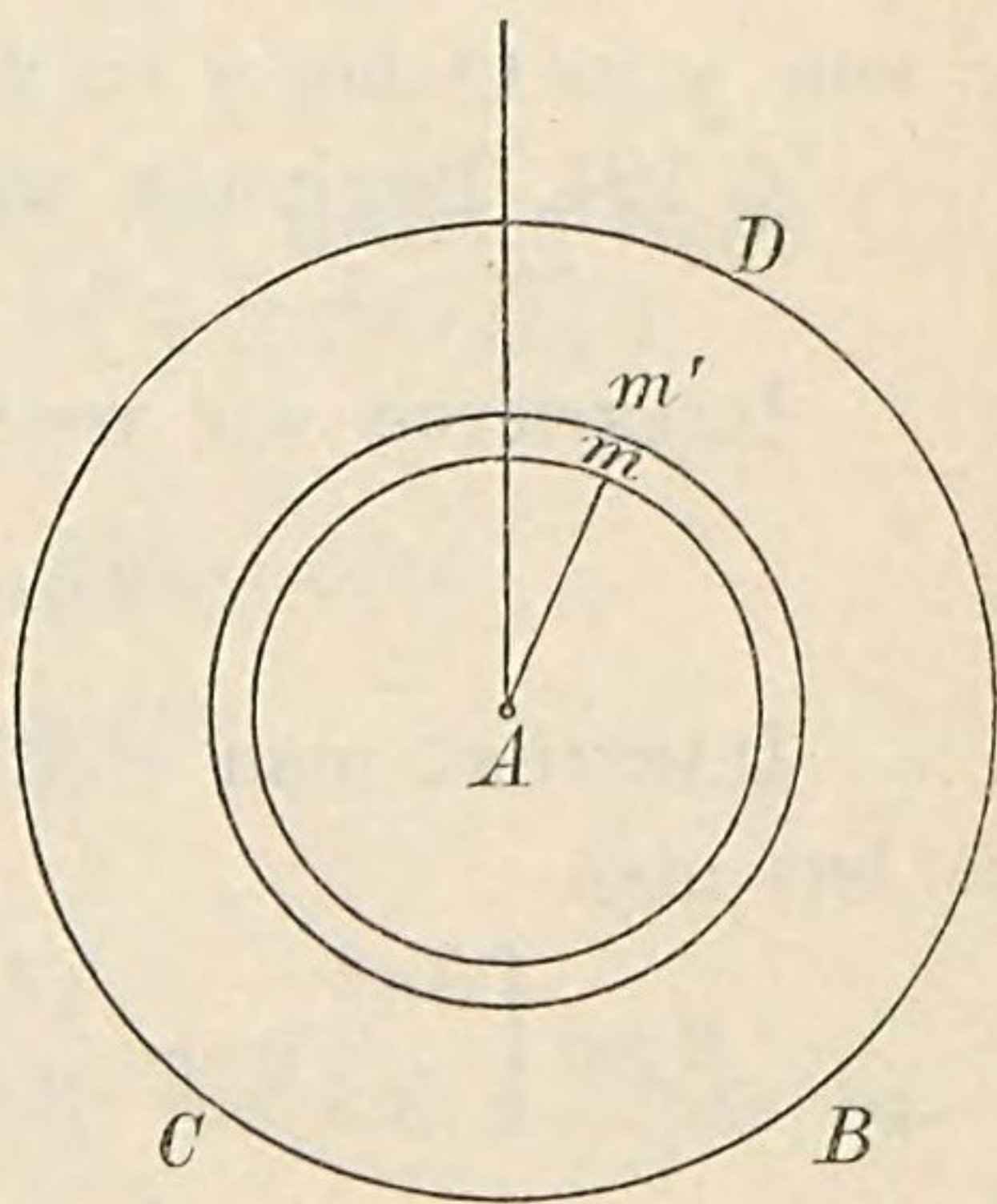
Dabei drückt du das Element, sei es eines Volumens, sei es einer Fläche, sei es einer Linie aus. Die Dichte ρ wird eine Function der Coordinaten x, y, z sein.

Trägheitsmoment einer ebenen Fläche.

§ 192. Wir wollen das Moment der Trägheit eines in der Ebene des xy liegenden Kreises vom Halbmesser a in Bezug auf die z-Achse suchen und nehmen wir an, dass ρ in der ganzen Fläche constant ist. Wir theilen den Kreis in viele unendlich schmale Zonen. Die Entfernung eines beliebigen Punktes m des Kreises von der Rotationsachse sei $= r$, die Distanz eines in einer nachbarlichen Zone befindlichen Punktes m' von der Rotationsachse wird gleich sein $r + dr$. Der Flächeninhalt des einen Kreises ist demnach πr^2 , der des anderen Kreises $\pi(r + dr)^2$, und wird daher die Elementarzone mm' zum Ausdrucke haben

$$\rho [\pi(r + dr)^2 - \pi r^2],$$

Fig. 54.



d. i. mit Hinweglassung kleiner Größen zweiter Ordnung

$$\rho 2\pi r dr.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit dem Quadrate der Entfernung von der Rotationsachse, d. i. mit r^2 , so hat man für das Trägheitsmoment der Elementarzone

$$2\pi\rho r^3 dr,$$

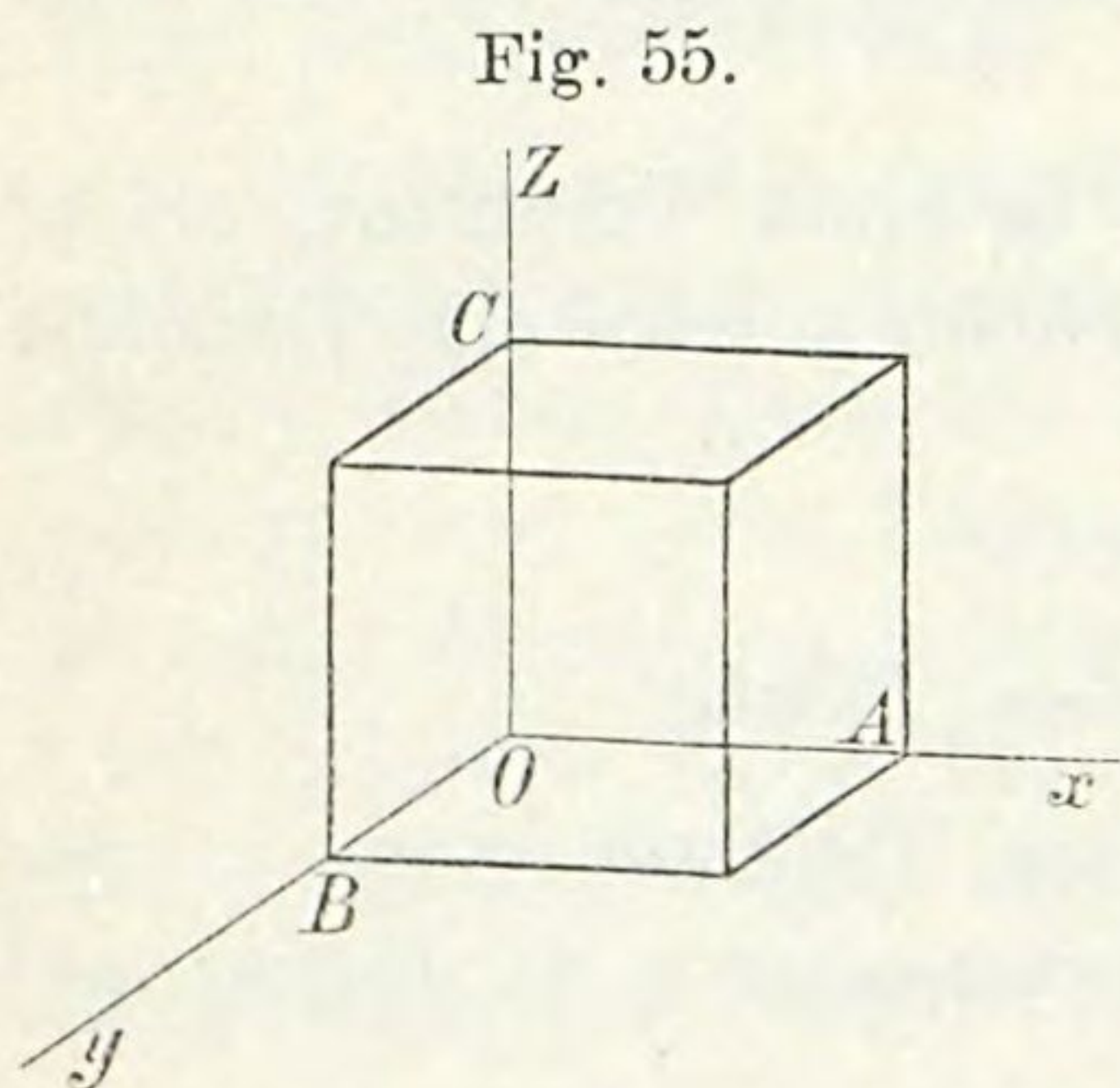
und indem man das Integral von $r = 0$ bis $r = a$ nimmt, hat man für das Trägheitsmoment der ganzen Fläche

$$2\pi\rho \int_0^a r^3 dr = \frac{2\pi\rho a^4}{4}.$$

Eine constante ist hier nicht beizusetzen, da das Integral zwischen Grenzen genommen ist. Hier hat also zur Ermittlung des Momentes der Trägheit eine einzige Integrierung hingereicht.

Trägheitsmoment eines rechtwinkligen homogenen Parallelepipedes.

§ 193. Wir setzen auch hier voraus, dass die Dichte ρ im ganzen Körper constant ist. Seien ferner die Seiten des Parallelepipedes $OA = 2a$, $OB = 2b$, $OC = 2c$, O der Coordinatenursprung.



Nehmen wir das Trägheitsmoment in Beziehung auf die z -Achse, so ist das Trägheitsmoment für einen Punkt ausgedrückt durch

$$\rho dx dy dz (x^2 + y^2).$$

Das Trägheitsmoment des ganzen Körpers ist demnach

$$\rho \iiint dx dy dz (x^2 + y^2),$$

und sind die Grenzen zu nehmen für x von $x = 0$ bis $x = 2a$, für y von $y = 0$ bis $y = 2b$, endlich für z von $z = 0$ bis $z = 2c$.

§ 194. Beginnen wir die Integration mit z , so hat man

$$\rho \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho 2c \iint (x^2 + y^2) dx dy.$$

Integrieren wir weiter nach x , so hat man

$$2\rho c \left[\frac{x^3}{3} dy + xy^2 dy \right].$$

Integriert man endlich nach y , die Werte von x , y einsetzend, so hat man

$$\begin{aligned} 2\rho c \left[\frac{8a^3}{3} y + \frac{y^3}{3} 2a \right] &= 2\rho c \left[\frac{8a^3 2b}{3} + \frac{8b^3 2a}{3} \right] = \\ &= 8abc\rho \cdot \frac{4}{3} [a^2 + b^2] = \frac{8abc\rho}{3} [(2a)^2 + (2b)^2]. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise können die Momente der Trägheit des Körpers in Beziehung auf die x -Achse und der y -Achse bestimmt werden, und bedenkt man, dass das Product $8\rho abc$ die ganze Masse des Körpers vorstellt, welche wir mit M bezeichnen, so hat man für die Trägheitsmomente des Parallelepipides in Beziehung auf die respectiven Achsen der x, y, z

$$1. \quad \begin{cases} \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{4}{3} M (b^2 + c^2) \\ \rho \iiint (x^2 + z^2) dx dy dz = \frac{4}{3} M (a^2 + c^2) \\ \rho \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{4}{3} M (a^2 + b^2) \end{cases}$$

Wir bezeichnen diese drei Integrale der Reihe nach mit A, B, C .

Vermöge dieser Bezeichnung wird man demnach haben

$$2. \quad \begin{cases} A = \Sigma m(y^2 + z^2) \\ B = \Sigma m(x^2 + z^2) \\ C = \Sigma m(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} 2 \Sigma m x^2 = B + C - A \\ 2 \Sigma m y^2 = C + A - B \\ 2 \Sigma m z^2 = A + B - C \end{cases}$$

Nehmen wir nun an, dass

$$a > b > c,$$

so hat man

$$(b^2 + c^2) < (a^2 + c^2) < (a^2 + b^2),$$

so dass die Trägheitsmomente bezüglich der Achsen sein werden

$$A < B < C.$$

Das kleinste Trägheitsmoment entspricht der größten Seite als Rotationsachse.

Trägheitsmoment eines homogenen Ellipsoides.

§ 195. Es sei die Gleichung des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

und wollen wir das Trägheitsmoment in Bezug auf die z -Achse berechnen, so ist solches

$$\rho \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \iiint x^2 dx dy dz + \rho \iiint y^2 dx dy dz.$$

Wir integrieren zuerst bezüglich z , und dies innerhalb der Grenzen

$$z = -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \text{ und } z = +c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

und man hat für das Trägheitsmoment aus dem ersten Theile

$$2c\rho \iint x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

und ebenso aus dem anderen Theile

$$2c\rho \iint y^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy.$$

Um jetzt nach y zu integrieren, wird man, indem $z = 0$ gesetzt wird, die Grenzen von y aus der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

entnehmen, so dass man für diese Grenzen hat

$$y = -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Setzt man $b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = r^2$, so hat man für den ersten Theil des Trägheitsmomentes

$$\frac{2\rho c}{b} \int x^2 dx \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy.$$

Das Integral $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy$, dessen unbestimmtes Integral

$$\int \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{y \sqrt{r^2 - y^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{y}{r} \text{ ist, ist aber } = \pi \frac{r^2}{2}.$$

Also hat man für diesen Theil des Trägheitsmomentes

$$\frac{2\rho c}{b} \int x^2 dx \cdot \frac{\pi r^2}{2} = 2\rho c b \frac{\pi}{2} \int x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx.$$

Integriert man dieses Integral nach x in den Grenzen von $x = -a$ bis $x = a$, so hat man für diesen Theil des Trägheitsmomentes

$$\rho b c \pi \int_{-a}^a x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \rho b c \pi \left(\frac{2a^3}{3} - \frac{2a^5}{5}\right) = \frac{4\pi}{15} \rho b c a^3.$$

Für den andern Theil des Trägheitsmomentes

$$2c\rho \iint y^2 dy \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx$$

wird man einen ähnlichen Ausdruck finden

$$\frac{4}{15} \pi \rho a c b^3,$$

und rechnet man beide Theile zusammen, so erhält man

$$C = \frac{4}{15} \pi \rho a b c (a^2 + b^2)$$

Da $\frac{4}{3} \rho \pi a b c$ die Masse des Ellipsoides vorstellt, hat man

$$C = \frac{M}{5} (a^2 + b^2).$$

In derselben Weise findet man die Trägheitsmomente in Beziehung auf die anderen Achsen, und man hat demnach

$$4. \quad \begin{cases} A = \frac{M}{5} (b^2 + c^2) \\ B = \frac{M}{5} (a^2 + c^2) \\ C = \frac{M}{5} (a^2 + b^2) \end{cases}$$

Sind $a = b = c = r$, so hat man für das Trägheitsmoment einer Kugel bezüglich eines Durchmessers

$$A = B = C = \frac{2}{5} M r^2 = \frac{8}{15} \rho \pi r^5$$

Nimmt man für r zwei Werte von α bis β , so hat man für das Trägheitsmoment einer sphärischen Schicht

$$\frac{8}{15} \pi \rho (\beta^5 - \alpha^5).$$

Trägheitsmomente von Rotationsflächen.

§ 196. Bei Rotationskörpern ermittelt man das Trägheitsmoment bezüglich der Umdrehungsachse mit nur einer Integration.

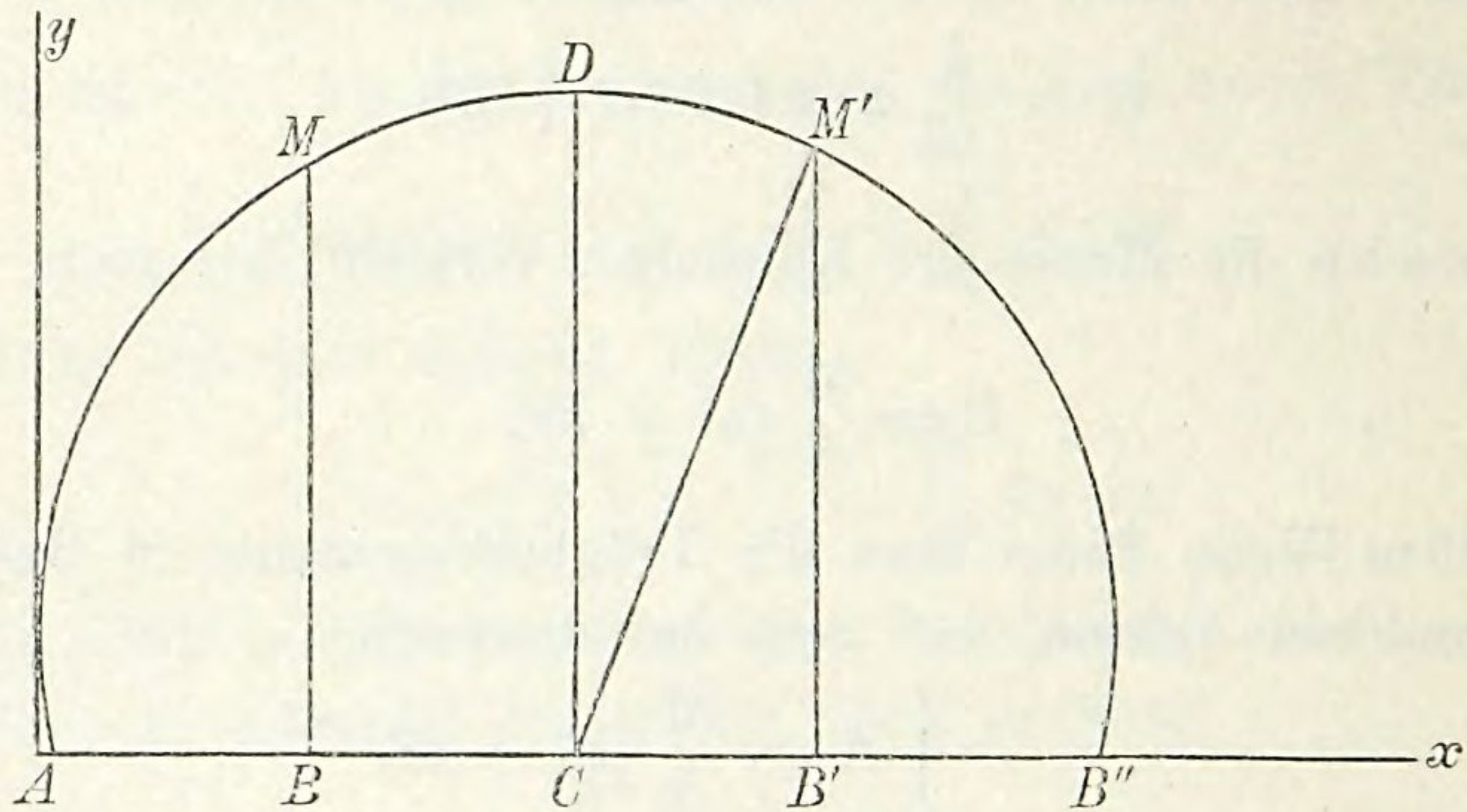
Man theilt nämlich den Rotationskörper in unendlich dünne, der Ebene der yz parallele Cylinder, jeder in dicke dx , wobei angenommen wird, dass der Rotationskörper durch Umdrehung einer in der xy liegenden Fläche und um die x -Achse erzeugt wurde.

Jeder dieser Cylinder wird in unendlich schmale Kreiszonen getheilt, von welchen jede Zone die Breite dr hat. Der Flächeninhalt einer solchen Zone, von welcher der innere Halbmesser gleich r , der äußere gleich $r + dr$ ist, hat zum Ausdruck, wie wir gesehen

$$\pi (r + dr)^2 - \pi r^2 = 2 \pi r dr.$$

Das Volumen eines Ringes ist gleich $2\pi r dr dx$. Das Trägheitsmoment dieses Ringes in Bezug auf die Rotationsachse erhält

Fig. 56.



man, wenn man das Product $2\pi r dr dx \rho$ mit r^2 multipliciert, und $2\pi r^3 dr dx \rho$ von $r = 0$ bis $r = y$ integriert, woraus sich ergibt

$$\frac{\rho \pi y^4 dx}{2}$$

Das Trägheitsmoment des ganzen Körpers erhält man dann, wenn man die Trägheitsmomente aller unendlich schmalen Cylinder, also das Integral

$$\frac{\rho \pi \int y^4 dx}{2}$$

in den Grenzen von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ ermittelt.

§ 197. Ist die erzeugende Fläche die eines in der Ebene der xy liegenden Halbkreises vom Halbmesser α , und dessen Gleichung

$$y^2 = 2\alpha x - x^2,$$

nimmt man ferner das Trägheitsmoment eines Kugelabschnittes von $x = 0$ bis $x = \beta$ in Beziehung auf die x -Achse als Umdrehungsachse, so hat man, wenn man in dem Integrale

$$\int \frac{\rho \pi}{2} y^4 dx$$

obigen Wert von y einsetzt

$$\begin{aligned} \frac{\rho \pi}{2} \int_0^\beta (2\alpha x - x^2)^2 dx &= \frac{\rho \pi}{2} \int_0^\beta (x^4 - 4\alpha x^3 + 4\alpha^2 x^2) dx = \\ &= \frac{\rho \pi}{2} \left(\frac{\beta^5}{5} - \alpha \beta^4 + \frac{4}{3} \alpha^2 \beta^3 \right) \end{aligned}$$

Im Falle einer ganzen Kugel ist $\beta = 2\alpha$ zu setzen, und man hat für das Trägheitsmoment der ganzen Kugel

$$\frac{8}{15} \pi \rho \alpha^5$$

wie wir bereits gefunden.

Fünfundzwanzigstes Capitel.

Trägheitsmomente in Bezug auf verschiedene parallele Achsen.

§ 198. Ist das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine Achse gegeben, so kann man es auch in Beziehung auf eine Achse finden, die jener Achse parallel ist. Es sei das Trägheitsmoment eines Körpers von der Masse M in Beziehung auf die z -Achse bekannt, und bezeichnen wir es mit μ , so dass man hat

$$\mu = \Sigma (x^2 + y^2) m = M k^2,$$

und sucht man das Trägheitsmoment desselben Körpers in Bezug auf eine Achse, welche der z -Achse parallel ist, und im Abstände α von dieser Achse liegt, so legen wir durch die z -Achse und die neue Achse die Ebene der xz , und alsdann hat man für das Trägheitsmoment in Bezug auf die neue im Abstände $x = \alpha$ parallele Achse

$$\mu = \Sigma [(x - \alpha)^2 + y^2] m = \Sigma (x^2 + y^2) m - 2\alpha \Sigma x m + \Sigma m \alpha^2$$

für das letzte Glied haben wir aber

$$\Sigma m \alpha^2 = M \alpha^2.$$

Für das vorletzte Glied dieser Gleichung haben wir ferner, wenn man mit x_1 die Coordinate des Schwerpunktes des Körpers bezeichnet

$$2\alpha \Sigma x m = 2\alpha M x_1$$

und alsdann wird

$$\begin{aligned} \mu &= \Sigma [(x - \alpha)^2 + y^2] m = \Sigma (x^2 + y^2) m - 2\alpha M x_1 + M \alpha^2 = \\ &= M k^2 - 2M x_1 \alpha + M \alpha^2 \end{aligned}$$

$$1. \quad = M (k^2 + \alpha^2) - 2\alpha M x_1.$$

Liegt der Schwerpunkt des Körpers auf der z -Achse, alsdann ist die Coordinate des Schwerpunktes $x_1 = 0$, und das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die parallele Achse im Abstände α von der z -Achse reducirt sich auf

$$2. \quad \mu = M (k^2 + \alpha^2).$$

§ 199. Ist also für das frühere Trägheitsmoment in Beziehung auf eine Achse, die durch den Schwerpunkt des Körpers geht gleich $M k^2$, so wird es durch die Wahl einer parallelen Achse um die

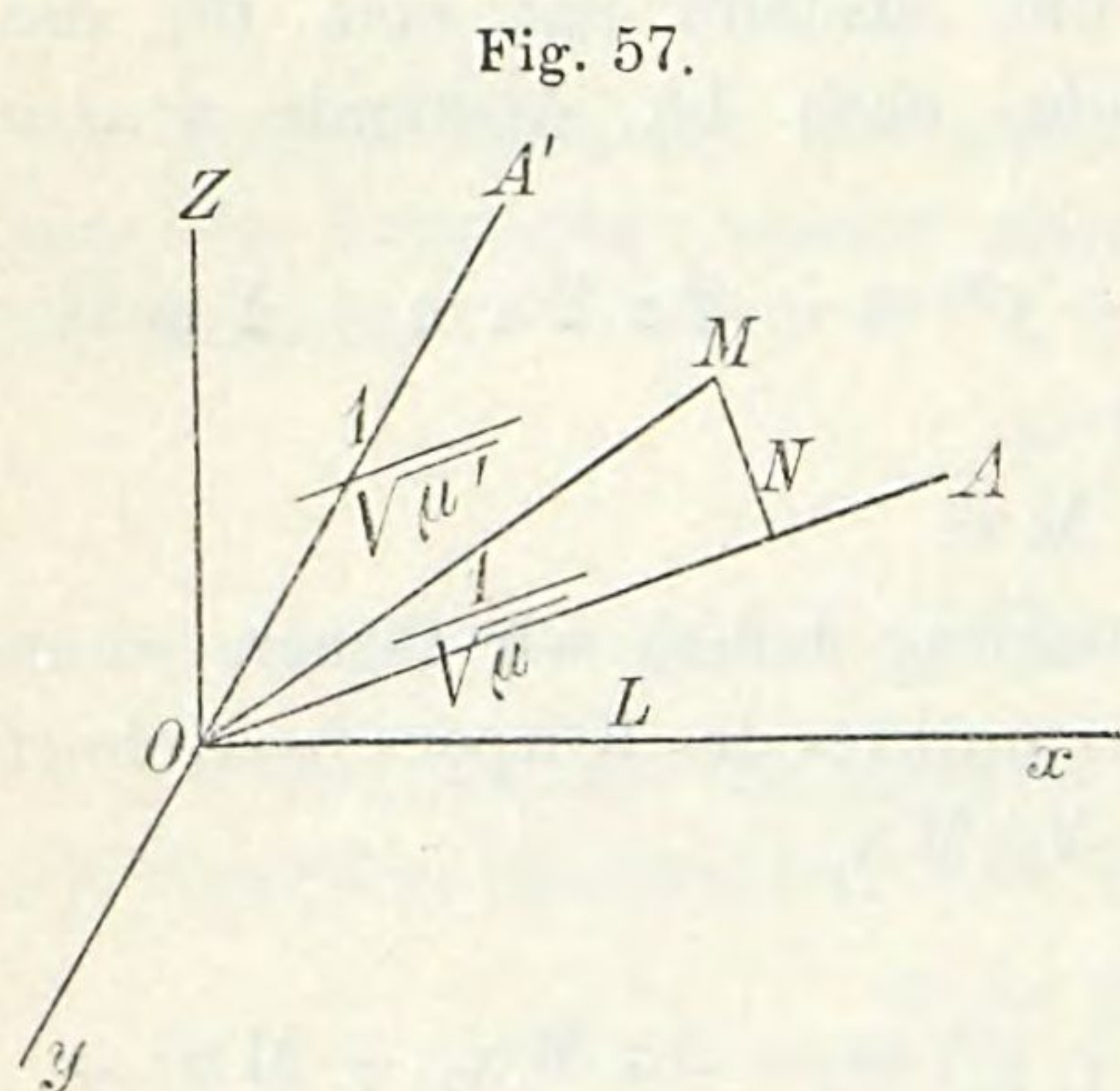
Größe $M \alpha^2$ vergrößert, und hängt diese Vergrößerung nicht von der Lage der neuen parallelen Achse, sondern bloß von deren Abstände von der ersten, durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden Achse ab. Ist also der Körper ein homogener, gleichmäßig mit Masse gefüllter Cylinder, dessen Basis ein Kreis vom Halbmesser α ist, und dessen Achse, als z -Achse genommen, also durch den Schwerpunkt geht, und wählen wir dann eine der Erzeugungslinien zur neuen Achse, so hat das neue Trägheitsmoment für jede der Erzeugungslinien denselben Ausdruck

$$u = M (k^2 + a^2).$$

Man sieht ferner, dass das Trägheitsmoment eines Körpers für eine Achse, die durch den Schwerpunkt geht, immer das Kleinste ist gegenüber den Trägheitsmomenten in Beziehung auf Achsen, die jener durch den Schwerpunkt gehenden Achse parallel sind.

Trägheitsmoment in Beziehung auf geneigte Achsen.

§ 200. Wir wollen das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine Achse OA finden, die durch den Coordinatenursprung geht, und mit den Coordinatenachsen die Winkel α, β, γ einschließt.



M sei der Massepunkt m , dessen Coordinaten x, y, z sind. Wir fällen auf die Achse OA eine Senkrechte MN . Die Cosinus der Winkel, welche OM mit den Coordinatenachsen einschließt, sind

$$\frac{x}{OM}, \quad \frac{y}{OM}, \quad \frac{z}{OM}.$$

Die Cosinus der Winkel, welche die neue Achse OA mit den Coordinatenachsen bildet, sind

$$\cos \alpha, \quad \cos \beta, \quad \cos \gamma,$$

daher

$$\cos MON = \cos \alpha \frac{x}{OM} + \cos \beta \frac{y}{OM} + \cos \gamma \frac{z}{OM}$$

daher

$$ON = OM \cos MON = \cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z$$

$$\begin{aligned} MN^2 &= OM^2 - ON^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + \\ &+ z \cos \gamma)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - \\ &\quad - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2, \end{aligned}$$

indem $(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 1$ ist.

Führt man diese Rechnung durch, bezeichnet die Distanz MN des Punktes M von der Achse OA mit r , und das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf die Achse OA mit μ , so hat man

$$r^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (x^2 + z^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma - \\ - 2 y z \cos \beta \cos \gamma - 2 z x \cos \gamma \cos \alpha - 2 x y \cos \alpha \cos \beta.$$

Daher

$$3. \quad \mu = \Sigma MN^2 m = \Sigma r^2 m = \cos^2 \alpha \Sigma (y^2 + z^2) m + \\ + \cos^2 \beta \Sigma (x^2 + z^2) m + \cos^2 \gamma \Sigma (x^2 + y^2) m - 2 \cos \beta \cos \gamma \Sigma m y z - \\ - 2 \cos \gamma \cos \alpha \Sigma m z x - 2 \cos \alpha \cos \beta \Sigma m x y.$$

§ 201. Bezeichnet man die im zweiten Gliede dieser Gleichung 3 vorkommenden Integrale mit A, B, C, D, E, F , also

$$4. \quad \begin{cases} \Sigma (y^2 + z^2) m = A \\ \Sigma (x^2 + z^2) m = B \\ \Sigma (x^2 + y^2) m = C \\ \Sigma y z m = D \\ \Sigma x z m = E \\ \Sigma y x m = F, \end{cases}$$

so hat man

$$5. \quad \mu = \Sigma r^2 m = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2 D \cos \beta \cos \gamma - \\ - 2 E \cos \gamma \cos \alpha - 2 F \cos \alpha \cos \beta.$$

Es wird dabei bemerkt, dass die Größen A, B, C , wie wir bereits hatten, die Trägheitsmomente des Körpers in Beziehung auf die Coordinatenachsen Ox, Oy, Oz vorstellen, dass ferner die Größen D, E, F , wie wir ebenfalls hatten, sind

$$6. \quad \begin{cases} D = \iiint \rho dx dy dz yz \\ E = \iiint \rho dx dy dz xz \\ F = \iiint \rho dx dy dz xy \end{cases}$$

indem, wie man weiss, $m = \rho dx dy dz$ ist.

Hat man ferner das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung einer durch den Coordinatenursprung gehende Achse OA gefunden, so kann man leicht das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf eine dieser Achse OA parallele, also nicht mehr durch den Ursprung gehende Gerade finden.

Sechszwanzigstes Capitel.

Centralellipsoide.

§ 202. Die Größen A, B, C, D, E, F bestimmen sich durch die Natur des Systems und dessen Lage in Beziehung auf die

Coordinatenachsen, und sind von der Richtung der Achse OA unabhängig.

Schneidet man nun auf der Achse OA (Fig. 57) eine Strecke $OL = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ macht eine ähnliche Construction auf eine andere, durch den Ursprung gehende Achse OA' , in Beziehung auf welche das Trägheitsmoment des Körpers $= \mu'$ ist, schneidet also auf dieser Achse OA' eine Strecke $OL' = \frac{1}{\sqrt{\mu'}}$ und wiederholt dieselbe Construction auf allen anderen durch den Coordinatenursprung gehenden Geraden, so bilden die Punkte $L, L' \dots$, indem OL, OL' stets einen reellen Wert haben, eine Oberfläche, deren Gleichung erhalten wird, wenn man die Coordinaten der Punkte $L, L' \dots$ mit $x, y, z, x', y', z' \dots$ bezeichnet.

Man hat nämlich dann

$$x = \cos \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad y = \cos \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad z = \cos \gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

$$\cos \alpha = x \sqrt{\mu}, \quad \cos \beta = y \sqrt{\mu}, \quad \cos \gamma = z \sqrt{\mu}.$$

Setzt man diese Werte in der Gleichung 5 des vorigen Paragraphen, so erhält man

$$1. \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Exz - 2Fxy = 1.$$

Der Ort der Punkte $L, L' \dots$ ist also eine Oberfläche zweiten Grades, und sieht man aus der Form dieser Gleichung, dass der Mittelpunkt dieser Fläche im Coordinatenursprunge liegt, da die Glieder erster Dimension in der Gleichung nicht vorkommen, ferner dass diese Oberfläche ein Ellipsoide ist, da jeder Radius vorgestellt durch $\frac{1}{\sqrt{\mu}}, \frac{1}{\sqrt{\mu'}}, \dots$ reell und endlich sein muss, indem $\mu = \Sigma mr^2$ positiv und endlich ist.

Durch diese Art sind sämtliche Trägheitsmomente des Körpers in Beziehung auf jede durch den Ursprung gehende Achse gegeben.

Poinsot nennt diese Oberfläche das Central-Ellipsoide oder Ellipsoide der Trägheit.

§ 203. Die Gleichung 1 kann reduciert werden, wenn man nämlich den Coordinatenachsen die Richtung der Hauptachsen des Ellipsoides gibt, welche nur ein einziges System bilden.

Wählen wir aber die Coordinatenachsen, welche immer durch den Coordinatenursprung und Mittelpunkt des Ellipsoides gehen, in

dieser Weise, und geben ihnen also die Richtung der Hauptachsen des Ellipsoides, so müssen die Größen A, B, C, D, E, F , welche von dieser Wahl abhängen, sich so gestalten, dass die Producte der Variablen, das ist die Größen D, E, F aus der Gleichung 1 des Ellipsoides verschwinden und bloß die Quadrate bleiben, und man hat dann $D = 0, E = 0, F = 0$, das ist

$$\Sigma m y z = 0, \Sigma m x z = 0, \Sigma m x y = 0,$$

und wird alsdann die Gleichung des Ellipsoides

$$2. \quad A x^2 + B y^2 + C z^2 = 1.$$

Der Körper, für den wir die Trägheitsmomente suchen, möge daher von welcher Gestalt immer sein, hat man immer ein Achsensystem, für welches diese drei Integrale D, E, F verschwinden.

Diese drei Achsen, in Beziehung auf welche die drei Integrale D, E, F verschwinden, werden Hauptachsen der Trägheit in Beziehung auf den Punkt O , und die Trägheitsmomente, welche diesen Achsen entsprechen, Hauptmomente genannt.

§ 204. Dieses System der Achsen des Ellipsoides ist, so lange die Größen A, B, C ungleich sind, ein einziges, und ist also in diesem Falle, in Beziehung auf den Punkt O des Körpers, nur ein einziges System von Hauptachsen der Trägheit vorhanden.

Sind zwei von den Größen A, B, C gleich, also das Ellipsoide ein Rotationsellipsoide, alsdann ist die Lage der dritten auf diesen beiden Achsen senkrechten Achse unveränderlich, während für die beiden anderen Achsen zwei beliebige, in der von beiden gleichen Achsen gebildeten Ebene liegende, aufeinander senkrecht stehende Gerade genommen werden können, so dass in diesem Körper unendlich viele Achsensysteme vorhanden sind, welche in Beziehung auf den Punkt O Hauptachsen der Trägheit sind.

Sind endlich alle drei Größen A, B, C einander gleich, also alle drei Achsen des Ellipsoides gleich, alsdann sind die Achsen aller rechtwinkligen, durch den Punkt O gehenden Achsensysteme Hauptachsen der Trägheit, für welche D, E, F oder $\Sigma y z m, \Sigma x z m, \Sigma x y m = 0$ sind.

Auch sind in diesem Falle alle Trägheitsmomente einander gleich. Denn die Gleichung 5 des vorigen Capitels gibt dann

$$\mu = A (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = A,$$

so dass μ unabhängig von der Richtung der Achse OA ist.

§ 205. Sucht man das Trägheitsmoment μ in Bezug auf eine Achse, welche durch den Coordinatenursprung geht und mit den

Hauptachsen der Trägheit die Winkel α , β , γ einschließen, so findet man solches, da der entsprechende Radius vector des Ellipsoides vorgestellt wird durch $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, mithin man die Gleichung hat

$$x = \cos \alpha \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad y = \cos \beta \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \quad z = \cos \gamma \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

Durch Substituierung dieser Werte in die Gleichung 2 hat man alsdann

$$3. \quad \mu = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Geht man von der Voraussetzung aus, dass $A > B > C$, und setzt man in dieser Gleichung statt $\cos^2 \alpha$ den Wert $(1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma)$, so hat man

$$\mu = A - (A - B) \cos^2 \beta - (A - C) \cos^2 \gamma,$$

also

$$\mu < A.$$

Man hat andererseits

$$\mu = C + (A - C) \cos^2 \alpha + (B - C) \cos^2 \beta,$$

also

$$\mu > C.$$

μ ist also kleiner als das größte, und größer als das kleinste Trägheitsmoment. Mithin sind das kleinste und das größte der Hauptmomente der Trägheit auch das kleinste und größte der Momente, welche sich auf alle Geraden beziehen, welche durch denselben Punkt gehen. Das größte Moment entspricht also der kleinsten Achse des Ellipsoides, und das kleinste Moment der größten Achse des Ellipsoides.

§ 206. Sucht man die Bedingung, dass eine Achse in einem bestimmten Punkte Hauptachse werde, so nehme man die fragliche Gerade beispielsweise für die z-Achse. Ist aber der Punkt, für welchen die Achse Hauptachse werden soll, im Ursprunge, dann ist die Bedingung, dass man hat

$$\Sigma m y z = 0, \quad \Sigma m x z = 0,$$

denn die gegebene Gerade ist alsdann nach einer der Achsen des Ellipsoides gerichtet. Diese Bedingungen sind nothwendig und hinreichend.

§ 207. Schließlich wollen wir den Punkt eines Körpers aufsuchen, für welchen alle drei Hauptmomente gleich sind.

Haben wir einen solchen Punkt gefunden, so ist aus dem Ausdrücke von μ zu ersehen, dass alsdann alle Trägheitsmomente

in Beziehung auf welche Achsen immer, die durch diesen Punkt gehen, unter sich gleich sind, und das Centralellipsoide demnach für diesen Punkt eine Kugel sein wird, dessen sämtliche Achsen Hauptachsen der Kugel sind.

Wir nehmen als Coordinatenachsen, die drei Hauptachsen, die durch den Schwerpunkt des Körpers gehen, und bezeichnen die Coordinaten der Punkte des Körpers bezüglich dieser Achsen mit x, y, z , wählen dann einen Punkt des Körpers, dessen Coordinaten a, b, c seien, und denken uns, bezüglich dieses Punktes seien unsere Anforderungen erfüllt.

Durch diesen gewählten Punkt errichten wir drei andere Achsen, welche den durch den Schwerpunkt gehenden Achsen parallel sind, und bezeichnen die Coordinaten der Körperpunkte in Beziehung auf dieses Achsensystem mit x', y', z' .

Wir werden also für den gewählten Punkt in Beziehung auf das neue Achsensystem vermöge Voraussetzung haben

$$\Sigma m y' z' = 0, \quad \Sigma m' x' z' = 0, \quad \Sigma m' x' y = 0,$$

ferner haben wir nach unserer Annahme

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c.$$

Substituieren wir nun diese Werte in den vorhergehenden Ausdrücken, so hat man

$$\begin{aligned} \Sigma m (y - b) (z - c) &= 0, \quad \Sigma m (x - a) (z - c) = 0 \\ \Sigma (x - a) (y - b) m &= 0. \end{aligned}$$

§ 208. Es ist aber

$$\begin{aligned} \Sigma m (y - b) (z - c) &= \Sigma m y z - c \Sigma m y - b \Sigma m z + b c \Sigma m = 0 \\ \Sigma (x - a) (z - c) &= \Sigma m x z - c \Sigma m x - a \Sigma m z + a c \Sigma m = 0 \\ \Sigma m (x - a) (y - b) &= \Sigma m x y - b \Sigma m x - a \Sigma m y + a c \Sigma m = 0. \end{aligned}$$

Für das alte, durch den Schwerpunkt gehende Achsensystem haben wir, da sie einerseits Hauptachsen sind, andererseits durch den Schwerpunkt gehen,

$$\begin{aligned} \Sigma m y z &= 0, \quad \Sigma m x z = 0, \quad \Sigma m x y = 0 \\ \Sigma m x &= 0, \quad \Sigma m y = 0, \quad \Sigma m z = 0. \end{aligned}$$

Die früheren Gleichungen reducieren sich demnach auf

$$\begin{aligned} \Sigma m (y - b) (z - c) &= b c \Sigma m = M b c = 0 \\ \Sigma m (x - a) (z - c) &= a c \Sigma m = M a c = 0 \\ \Sigma m (x - a) (y - b) &= \Sigma a b m = M a b = 0 \\ b c &= 0, \quad a c = 0, \quad a b = 0. \end{aligned}$$

Zwei der Größen a, b, c müssen demnach Null sein.

Setzen wird demnach $a = 0$, $b = 0$, so liegt der gesuchte Punkt auf der z -Achse.

§ 209. Aus dem Vorhergehenden wissen wir ferner, dass, indem man für die Trägheitsmomente bezüglich des alten Achsensystem A , B , C hat, die Ausdrücke der Trägheitsmomente beim neuen Achsensystem, dessen Ursprung zu Coordinaten 0 , 0 , c hat, und für welches die Lage der z -Achse ungeändert geblieben, die x -Achse und y -Achse aber den alten Achsen parallel im Abstände c liegen,

$$A + Mc^2, B + Mc^2 + C$$

sind.

Vermöge gestellter Bedingung haben, bezüglich des gewählten Punktes, alle diese drei Ausdrücke gleich zu sein, also

$$A + Mc^2 = B + Mc^2 = C,$$

folglich

$$4. \quad \begin{cases} 1. & A = B \\ 2. & c = \sqrt{\frac{C-A}{M}} = \sqrt{\frac{C-B}{M}} \end{cases}$$

Damit also im Körper sich ein solcher Punkt finde, für den die drei sich darauf beziehenden Hauptmomente der Trägheit und alle anderen Momente, bezüglich welcher Achsen immer, die durch diesen Punkt gehen, gleich seien, ist erforderlich:

a) Dass zwei der Hauptmomente in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt gehende Hauptachsen gleich seien, also dass das Ellipsoide in Beziehung auf den Schwerpunkt ein Rotations-Ellipsoide sei.

b) Dass der gesuchte Punkt auf der dritten Achse liege, welcher das dritte Hauptmoment entspricht.

c) Dass dieses dritte Moment C grösser als jedes der beiden gleichen Momente, da nur in diesem Falle der Wert für c reell ist.

Da ferner c , wie aus 4. zu ersehen, zwei Werte hat, so gibt es zwei Punkte, für welche die verlangten Bedingungen erfüllt sind. Beide Punkte liegen auf der durch den Schwerpunkt gehenden Achse, welcher das grösste Moment entspricht, und liegen sie zu beiden Seiten des Schwerpunktes, von diesem in der Distanz

$\pm \sqrt{\frac{C-A}{M}}$ entfernt. Das Central-Ellipsoide ist für das alte durch den Schwerpunkt gehende Achsensystem eine Rotationsellipsoide und für das neue Achsensystem eine Kugel.

§ 210. Die Verlegung des Ursprunges auf eine Hauptaxe, die durch den Schwerpunkt geht, gibt Veranlassung zu einer Bemerkung.

Verlegen wir, wie hier, den Ursprung auf der z -Achse im Abstände c vom Ursprunge, so haben wir $z = z' + c$.

Wir haben nun, vermöge Voraussetzung,

$$\Sigma zym = 0, \Sigma mxz = 0, \Sigma mxy = 0,$$

ferner

$$\Sigma yzm = \Sigma myz' + c \Sigma my = \Sigma myz',$$

weil Σmy , vermöge Voraussetzung, dass die Hauptachsen durch den Schwerpunkt gehen, $= 0$ ist.

Da aber

$$\Sigma myz = 0$$

ist, so ist auch

$$\Sigma myz' = 0$$

und so auch

$$\Sigma mxz' = 0,$$

folglich ist die z -Achse, welche die Hauptachse bezüglich des Schwerpunktes ist, auch Hauptachse bezüglich aller auf ihr liegenden Punkte, und die ihr conjugierten Hauptachsen der x und der y gehen durch den neuen Punkt der z -Achse im Abstände c parallel zu den früheren Achsen der x und der y , welche durch den Schwerpunkt gehen.

§ 211. Früher haben wir für die Trägheitsmomente eines rechtwinkligen homogenen Parallelepipedes in Beziehung auf seine Kanten, wenn $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$ sind, gefunden.

$$A = \frac{4}{3} M (b^2 + c^2)$$

$$B = \frac{4}{3} M (a^2 + c^2)$$

$$C = \frac{4}{3} M (a^2 + b^2).$$

Verlegen wir jetzt die Achsen und den Ursprung in den Schwerpunkt, die Achsen parallel den früheren Achsen, so wird man vermöge der früher entwickelten Grundsätze, von jedem dieser Momente ein Product von M multipliciert mit dem Quadrate der betreffenden Distanz des Schwerpunktes von der alten Achse, also bezüglich der x -Achse das Product $M(b^2 + c^2)$, und in dieser Weise auch bezüglich der übrigen Achsen abziehen, und so die Momente der Trägheit bezüglich der neuen Achsen erlangen.

Es werden daher die Momente für parallele Achsen, die durch den Schwerpunkt gehen

$$A = \frac{4}{3} (b^2 + c^2) M - M (b^2 + c^2) = \frac{M}{3} (b^2 + c^2)$$

$$B = \frac{4}{3} M (a^2 + c^2) - M (a^2 + c^2) = \frac{M}{3} (a^2 + c^2)$$

$$C = \frac{4}{3} M (a^2 + b^2) - M (a^2 + b^2) = \frac{M}{3} (a^2 + b^2).$$

Gesetzt nun, es sei $a = b$ und mithin $A = B$, so hat man, wenn der Abstand auf der z -Achse mit γ bezeichnet, und man die Werte von A und C in die Gleichung 4 einsetzt,

$$\gamma = \sqrt{\frac{C - A}{M}} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{3}}.$$

Ist $a > 2c$ liegen die gesuchten Punkte ausserhalb des Körpers. Für $a < 2c$ liegen sie im Innern des Körpers, für $a = 2c$ liegen sie auf der Oberfläche.

Siebenundzwanzigstes Capitel.

Virtuelle Deplacierung.

§ 212. Das Streben der Forscher in der Mechanik war un-
ausgesetzt dahin gerichtet, die Bedingungen des Gleichgewichtes,
sei es eines Punktes, sei es fester Körper, auf einziges, allgemeines
Princip zurückzuführen, damit man die Bedingungen in jedem ein-
zelnen Falle sofort erkenne. Galilei war der erste, welcher in der
Theorie der einfachen Maschinen das Princip der virtuellen Ge-
schwindigkeit zur Anwendung brachte. Descartes bediente sich eines
Theoremes, welches dem von Galilei gleichkommt, um die ganze
Statik aus einem einzigen Principe herzuleiten, aber, wie Lagrange
hervorhebt, Jean Bernouilli war es, der die große Allgemeinheit der
virtuellen Geschwindigkeit gefasst hat, und des großen Nutzens inne-
geworden, den es in den Problemen der Statik leisten kann. Das-
selbe Princip hat Maupertuis später unter dem Namen Gesetz der
Ruhe aufgestellt. Ueberhaupt sind alle darüber aufgestellten Prin-
cipien das Princip der virtuellen Geschwindigkeit in verschiedener
Form.

§ 213. Unter virtueller Deplacierung oder virtueller Verschie-
bung eines Punktes versteht man die Versetzung eines Punktes,
unabhängig von den Kräften, die ihn angreifen, also unabhängig

von der Bewegungsrichtung, die ihm die vorhandenen Kräfte wirklich ertheilen würden, in eine von der früheren Position unendlich wenig verschiedene, mit den Bedingungen des Systems vereinbarte Lage.

Seien also A, A', A'' materielle, gewissen Bedingungen unterworfenene Punkte, als auf einer Curve oder Fläche zu bleiben, oder sich in invariablen Distanzen voneinander zu befinden.

Wir überführen nun das Punktsystem von der Lage, in welcher es sich befindet, in eine unendlich wenig verschiedene nachbarliche Lage, wobei die Ueberführung den Bedingungen des Systems entspricht, so kommt ein Punkt A in eine unendlich nahe Position a . Die unendlich kleine Linie Aa , welche die frühere Lage irgend eines Punktes mit der neuen Lage verbindet, nennt man virtuelles Displacement oder virtuelle Verrückung, virtuell deshalb, weil diese dem System zugedachte Bewegung nur eine mögliche und keine wirkliche ist, und man nicht zu beachten hat, ob der Punkt unter dem Einflusse der sollicitierenden Kräfte dieser Bewegung wirklich folgen würde.

Diese unendlich kleine Displacement ist unabhängig von der Zeit, und man bedient sich für sie des Variationszeichens δ , während das Differenzialzeichen d für die wirkliche, in dem unendlich kleinen Zeittheile dt , vollzogenen Displacements gebraucht wird.

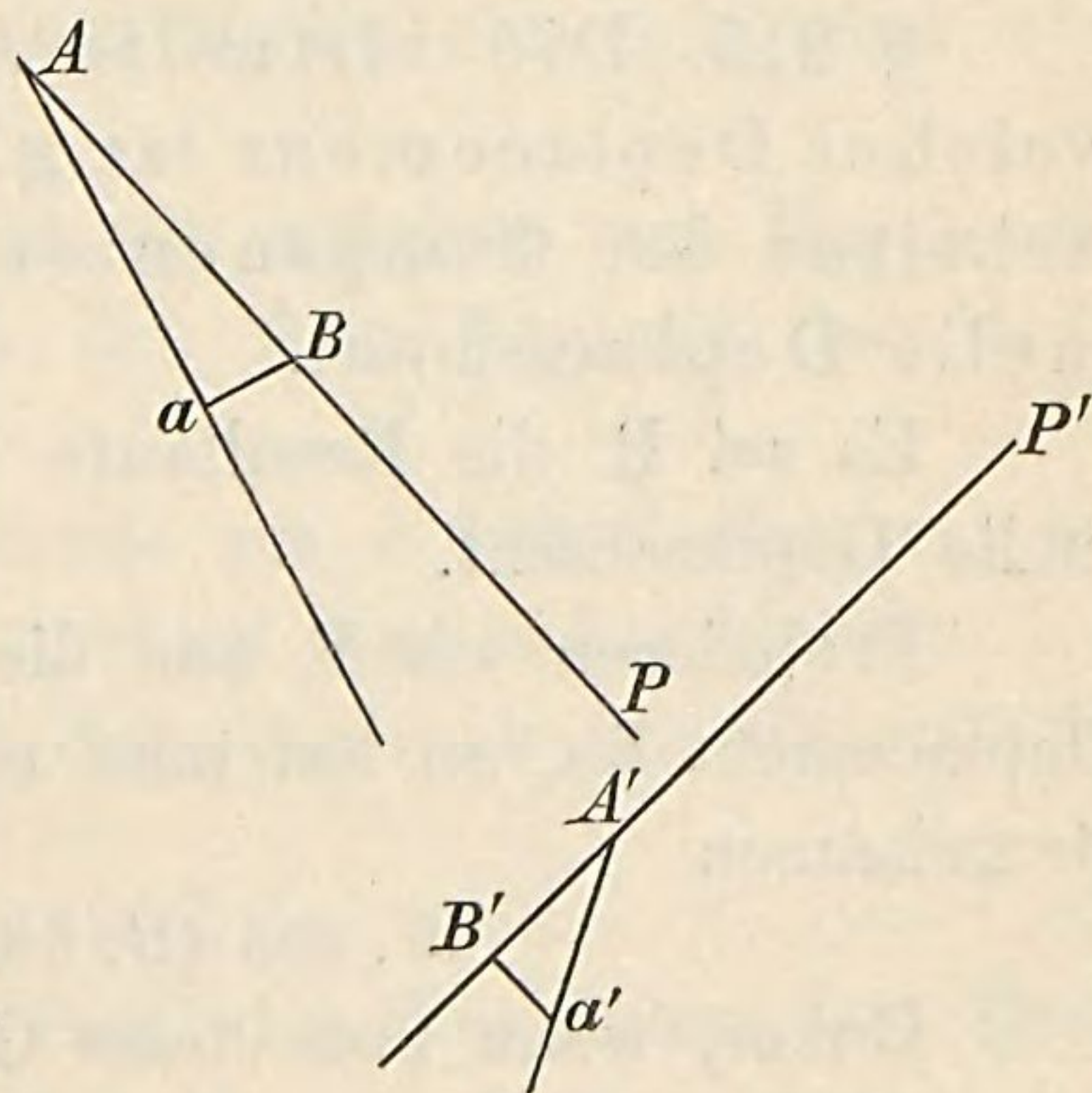
Virtuelle Arbeit.

§. 214. Unter virtueller Arbeit einer Kraft versteht man das Product der Kraft multipliciert mit dem virtuellen Displacement Aa des Angriffspunktes und dem Cosinus des Winkels zwischen der Richtung der Kraft und der Richtung des virtuellen Displacements.

Seien $A, A', A'' \dots$ Punkte des Systems, $P, P', P'' \dots$ Kräfte, die an diesen Punkten in den Richtungen $PA, P'A', P''A'' \dots$ angreifen, $Aa, A'a', A''a''$ die virtuellen Displacements.

Projicieren wir diese auf die Richtungen der Kräfte, so dass AB die Projection von Aa ist. Diese Projection AB ist gleich dem

Fig. 58.



Producte $Aa \cdot \cos$ Winkels aAB . Machen wir es so bezüglich der anderen Displacements, der anderen Punkte, und nennen das virtuelle Displacement δs und die Projectionen $AB, A'B' \dots \delta p, \delta p', \delta p'' \dots$, so kann man obige Definition auch ausdrücken: Die virtuelle Arbeit einer Kraft ist das Product der Kraft multipliciert mit der Projection des virtuellen Displacements ihres Angriffspunktes auf die Richtung der Kraft.

Die Projection δp wird als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem sie, von A ausgehend, in dem Sinne der Kraft oder in dem entgegengesetzten Sinne gerichtet ist, mit anderen Worten, je nachdem die Richtung Aa mit der Richtung der Kraft einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet. Die virtuelle Arbeit $P\delta p$ hat daher dasselbe Zeichen wie das der Projection δp , kann also $+$ oder $-$ sein. Ist das virtuelle Displacement senkrecht zur Kraft, so ist das Product $P\delta p = 0$.

Man hat noch einen andern Ausdruck.

Man hat nämlich für die virtuelle Arbeit

$$P \cdot Aa \cdot \cos aAP = P \cdot \cos aAP \cdot Aa.$$

$P \cdot \cos aAP$ ist aber die Componente der Kraft P in Beziehung auf das Displacement Aa , oder was dasselbe ist, die Projection der Kraft P auf Aa , und wollen wir diese Componente mit Q bezeichnen, so haben wir

$$P \cdot Aa \cdot \cos aAP = P \cdot \cos aAP \cdot Aa = Q \cdot Aa.$$

Mit Worten: Die virtuelle Arbeit einer Kraft ist gleich dem Producte des virtuellen Displacements multipliciert mit der Componente der Kraft in Beziehung auf das virtuelle Displacement.

§ 215. Die virtuelle Arbeit einer Kraft für irgend welches Displacement ist gleich der Summe der virtuellen Arbeiten der Componenten dieser Kraft für dasselbe virtuelle Displacement.

Es sei R die Resultante der Kräfte $P, P', P'' \dots \delta s$ das virtuelle Displacement.

Projicieren wir R und die einzelnen Kräfte P, P', P'' auf das Displacement δs , so hat man nach den in der Statik aufgestellten Grundsätzen

$$R \cdot \cos (R, \delta s) = \Sigma P \cos (P, \delta s)$$

Daher, wenn man diese Gleichung mit δs multipliciert

$$R \cdot \delta s \cdot \cos (R, \delta s) = \Sigma P \cdot \delta s \cdot \cos (P, \delta s),$$

mithin obiges Theoreme bewiesen erscheint.

§ 216. Die virtuelle Arbeit einer Kraft in Bezug auf irgend welches virtuelle Displacement ist gleich der Summe der virtuellen Arbeiten dieser Kraft in Bezug auf die Componenten des virtuellen Displacements.

Es seien $\delta a, \delta a', \delta a'' \dots$ die Componenten des virtuellen Displacements δs .

Projiziert man alle diese Linien $\delta s, \delta a, \delta a', \delta a'' \dots$ auf die Richtung der Kraft P , so hat man, indem δs Resultante von $\delta a, \delta a', \delta a'' \dots$ ist

$$\delta s \cos (P, \delta s) = \Sigma \delta a \cos (P, \delta a).$$

Diese Gleichung multipliciert mit P gibt aber

$$P \delta s \cos (P, \delta s) = \Sigma P \cdot \delta a \cdot \cos (P, \delta a),$$

mithin das Theorem bewiesen erscheint.

§ 217. Es seien X, Y, Z die Componenten von P bezüglich dreier rechtwinkliger Achsen Ox, Oy, Oz , δs das virtuelle Displacement des Angriffspunktes, und $\delta x, \delta y, \delta z$ die Componenten von δs nach denselben Achsen, so hat man vermöge § 215

$$P \cdot \delta s \cos (P, \delta s) = X \delta s \cdot \cos (X, \delta s) + Y \cdot \delta s \cdot \cos (Y, \delta s) + Z \cdot \delta s \cos (Z, \delta s).$$

Es sind aber

$$\delta s \cos (X, \delta s) = \delta x, \quad \delta s \cdot \cos (Y, \delta s) = \delta y, \quad \delta s \cdot \cos (Z, \delta s) = \delta z.$$

Man hat daher, da ferner nach unserer Bezeichnung

$$\delta s \cdot \cos (P, \delta s) = \delta p \text{ ist,}$$

$$1. \quad P \cdot \delta s \cdot \cos (P, \delta s) = P \delta p = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z$$

als Ausdruck für die virtuelle Arbeit einer Kraft.

§ 218. Die virtuelle Arbeit einer Kraft in einer Rotationsbewegung ist gleich dem Momente dieser Kraft bezüglich der Drehungsachse multipliciert mit dem virtuellen Winkeldeplacement.

Nehmen wir die Rotationsachse als z -Achse, zur Ebene der xy eine darauf senkrechte, durch den Angriffspunkt der Kraft gehende Ebene.

In dieser Ebene wählen wir ferner zur x -Achse eine auf die Projection der Kraft in der Ebene der xy senkrechte Gerade.

Bei dieser Wahl reducirt sich der Ausdruck für die virtuelle Arbeit einer Kraft

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z,$$

da $X \delta x = 0$ ist, weil die x -Achse auf der Projection der Kraft senkrecht steht, somit $X = 0$ ist, ferner auch $Z \delta z = 0$ ist, weil $\delta z = 0$ ist, auf $Y \delta y$.

Nehmen wir nun Polarcoordinaten, so hat man

$$x = r \cos \vartheta$$

$$y = r \sin \vartheta.$$

Lassen wir r , als Distanz des Angriffspunktes der Kraft von der Rotationsachse, also von der z -Achse constant sein, und nehmen die Variationen bloß bezüglich des Winkels ϑ vor, so hat man

$$\delta y = r \cos \vartheta \delta \vartheta = x \delta \vartheta,$$

daher

$$Y \delta y = Y \cdot \delta \vartheta \cdot x.$$

Y ist aber hier die Projection der Kraft auf die xy -Ebene, und steht Y senkrecht auf der x -Achse, x ist die Senkrechte auf Y und kann auch als Hebelarm von Y aufgefasst werden.

Das Product Yx ist also das Moment der Kraft, und die Arbeit der Kraft $Yx \delta \vartheta$ ist mithin das Moment der Kraft, multipliciert mit dem Winkeldeplacement.

Wir wollen dabei noch in Erinnerung bringen, dass man unter Moment einer Kraft bezüglich einer Achse immer das Product der Projection dieser Kraft auf eine Ebene versteht, welche auf dieser Achse senkrecht steht, multipliciert mit der kürzesten Distanz zwischen dieser Projection und der Achse.

Y ist hier die Projection der Kraft auf die Ebene der xy , welche auf der Rotationsachse senkrecht steht, x ist die kürzeste Distanz zwischen der Projection Y und der z -Achse, $\delta \vartheta$ ist das Winkeldeplacement. Daher Yx das Moment der Kraft in Beziehung auf die Rotationsachse, und $Yx \delta \vartheta$ das Moment der Kraft in Beziehung auf die Rotationsachse, multipliciert mit dem Winkel-Deplacement ist, und die virtuelle Arbeit der Kraft ist diesem Producte gleich, wie das Theoreme behauptet.

Achtundzwanzigstes Capitel.

Gleichgewicht eines freien materiellen Punktes.

§ 219. Seien P, P', P'' die Kräfte, welche an dem freien materiellen Punkte A wirken, R die Resultante dieser Kräfte, Aa eine durch A willkürlich geführte, unendlich kleine oder endliche Gerade, $r, \delta p, \delta p', \delta p'' \dots$ die Projectionen der Aa auf die Resultante und die Kräfte.

Sind $a, \alpha, \alpha', \alpha''$ die Winkel, welche Aa mit $R, P, P', P'' \dots$ einschließt, so ist

$$R \cos a = P \cos \alpha + P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + \dots = \Sigma P \cos \alpha.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit Aa , so hat man

$$R \cos a \cdot Aa = P \cos \alpha \cdot Aa + P' \cos \alpha' \cdot Aa + P'' \cos \alpha'' \cdot Aa + \dots$$

Nun ist aber

$$Aa \cdot \cos a = r, Aa \cdot \cos \alpha = \delta p,$$

$$Aa \cdot \cos \alpha' = \delta p' \dots$$

daher

$$Rr = P \cdot \delta p + P' \delta p' + P'' \delta p'' + \dots = \Sigma P \delta p.$$

Findet zwischen den Kräften Gleichgewicht statt, so ist $R = 0$, folglich $Rr = 0$, daher

$$P \delta p + P' \delta p' + P'' \delta p'' + \dots = \Sigma P \delta p = 0.$$

Wirken also an einem materiellen Punkte verschiedene Kräfte, so findet dann Gleichgewicht statt, wenn die Summe der virtuellen Arbeiten der Kräfte gleich Null ist für jedes virtuelle Displacement. Hier ist aber kein Unterschied, ob die Verrückung unendlich klein oder endlich ist.

Gleichgewicht eines nicht freien Punktes.

§ 220. Ist der Punkt nicht frei, sondern der Bedingung unterworfen, auf einer Curve oder Fläche zu bleiben, so braucht die Resultante nicht gleich Null zu sein, aber wenn sie nicht Null ist, muss sie senkrecht zur Curve oder Fläche stehen. Die mit dem Systeme vereinbarte virtuelle Verrückung Aa kann aber nur auf der durch den Punkt gehenden Tangente der Curve oder Fläche stattfinden, so dass Aa senkrecht zur Resultante steht und ihre Projection r auf die Resultante nothwendig gleich Null ist. Das Product Rr wird also, gleichviel ob R gleich Null ist oder nicht, gleich Null sein. Daher muss auch

$$\Sigma P \delta p = Rr = 0$$

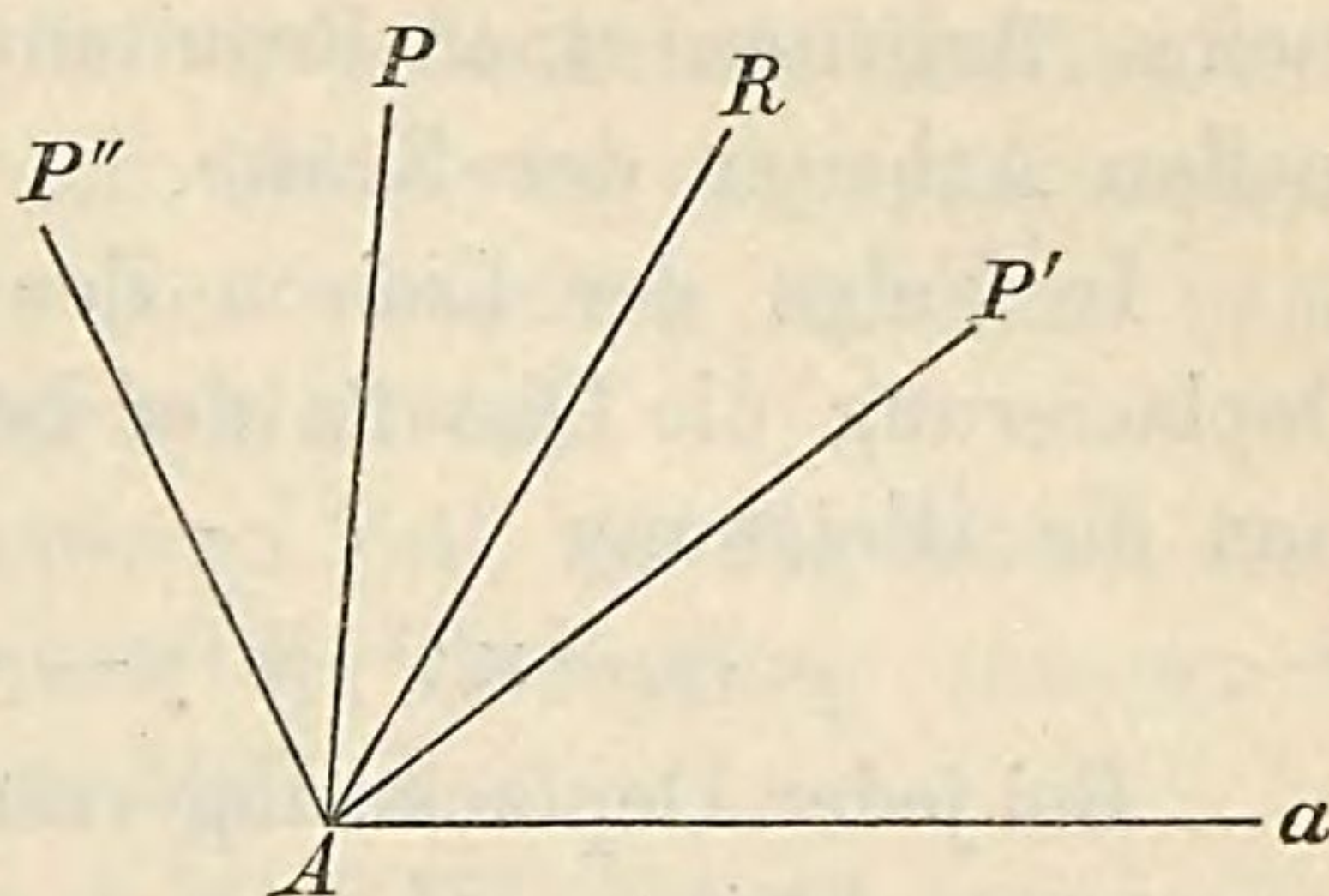
sein, und findet daher auch in diesem Falle obiger Grundsatz statt.

Umgekehrt ist in beiden Fällen die Summe der mit dem Systeme vereinbarten virtuellen Arbeiten $\Sigma P \delta p = 0$, alsdann muss $R = 0$ oder $r = 0$ sein, und der Punkt befindet sich im Gleichgewichte.

Gleichgewicht zweier durch eine starre Linie verbundener Punkte.

§ 221. Seien zwei Punkte A und B durch eine starre Gerade verbunden, von dieser Liaison aber abgesehen, ganz frei. An den

Fig. 59.



beiden Punkten A und B dieser Geraden wirken Kräfte, die Länge der Geraden sei $= L$, die Coordinaten der beiden Punkte seien x, y, z, x', y', z' . Statt der Kräfte an A und B können wir die Resultanten nehmen, die wir mit R und R' bezeichnen, da die virtuellen Arbeiten einer Resultante gleich sind der Summe der virtuellen Arbeiten der Kräfte.

In Folge der Liaison der beiden Punkte, wonach bei jeder Deplacierung die Distanz der beiden Punkte unverändert bleibt, hat man die Gleichung

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = L^2.$$

Bei jeder Deplacierung verändern sich die Coordinaten, während L constant bleibt.

Beziehen wir also die Kräfte auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem und ertheilen den Punkten A und B virtuelle Deplacements $\delta s, \delta s'$, so werden die Componenten dieser nach den Achsen $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y', \delta z'$ sein.

Differenzieren wir obige Gleichung, so kommt

$$(x - x')(\delta x - \delta x') + (y - y')(\delta y - \delta y') + (z - z')(\delta z - \delta z') = 0.$$

Die Gerade AB schließt ferner mit den Achsen Winkel ein, die wir mit α, β, γ bezeichnen, und deren Cosinus sind

$$\cos \alpha = \frac{x - x'}{L}, \cos \beta = \frac{y - y'}{L}, \cos \gamma = \frac{z - z'}{L}.$$

Dividirt man die vorhergehende Gleichung durch L , so hat man $\cos \alpha \delta x + \cos \beta \delta y + \cos \gamma \delta z = \cos \alpha \delta x' + \cos \beta \delta y' + \cos \gamma \delta z'$.

§ 222. Aus dieser Gleichung ersieht man nun, dass die virtuellen Deplacierungen der Endpunkte der Linie AB, nämlich der Punkte A und B gleiche Projectionen auf die Linie AB geben.

Damit hier Gleichgewicht statffinde, ist es nothwendig, dass die Richtung der beiden Resultanten der die Punkte A und B sollicitierenden Kräfte mit der Richtung der Linie AB zusammenfallen, ferner dass beide Resultanten einander vollkommen gleich und im entgegengesetzten Sinne wirken, so dass, wenn R von A nach B wirkt, R' von B nach A wirke.

Sind aber diese Bedingungen erfüllt, alsdann sind die Projectionen auf die Linie AB, Projectionen auf die Resultanten, und indem die Resultante aller Kräfte an A gleich ist der Resultante aller Kräfte an B, und die eine Resultante im entgegengesetzten Sinne als die andere Resultante wirkt, so dass im ganzen Systeme Gleichgewicht vorhanden ist, so sind die virtuellen Arbeiten der Kräfte an

A gleich den virtuellen Arbeiten der Kräfte an B, und beide virtuellen Arbeiten sind von entgegengesetztem Zeichen, so dass deren Summe gleich Null ist.

Obige Gleichung drückt also aus, dass, damit Gleichgewicht statfinde, es nothwendig ist, dass die virtuelle Arbeit der Kräfte an A gleich sei der der Kräfte an B, und beide von entgegengesetztem Zeichen seien, so dass die Summe der virtuellen Arbeiten beider Resultanten, mithin aller Kräfte gleich Null sei.

§ 223. Betrachten wir einen anderen Fall, wo die beiden durch eine starre Linie verbundenen Punkte der Bedingung unterworfen sind, auf zwei gegebenen Curven zu bleiben.

Es seien diese beiden Curven AM, BM', die unveränderliche Länge der Linie $AB = L$, x, y, z, x', y', z' die Coordinaten der beiden Punkte A und B, so dass man hat

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = L^2.$$

Wir nehmen auch hier an, an A wirke eine einzige Kraft R, und an B ebenfalls eine einzige Kraft. Denn wirken mehrere Kräfte, so nehmen wir statt der Kräfte die Resultanten, und was von den Resultanten gilt, ist auch richtig für die Summe der Kräfte.

Man hat auch hier, wenn man die Gleichung differenziert und durch z dividiert, indem L constant ist,

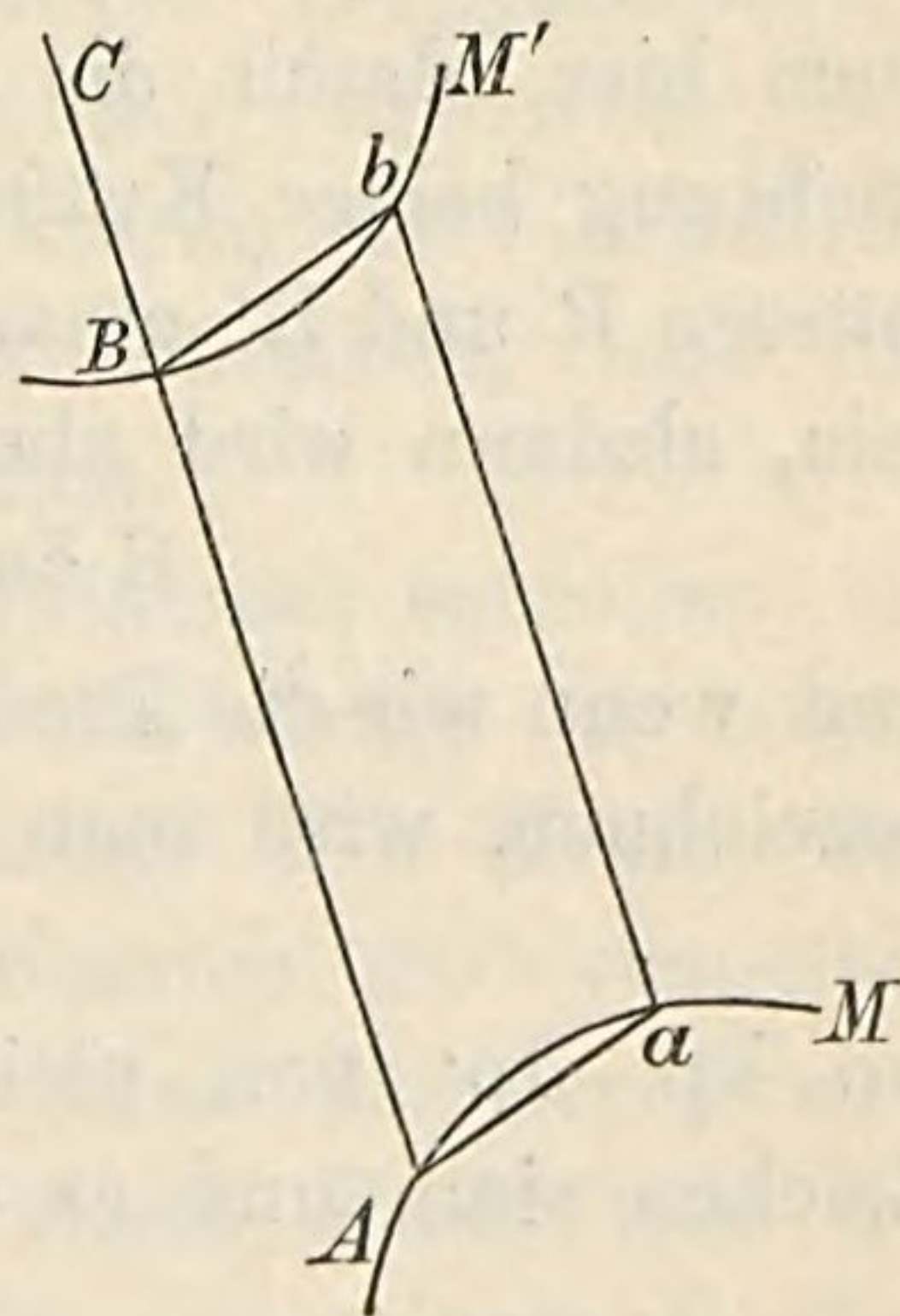
$$\begin{aligned} & \frac{(x - x')}{L} \delta x + \frac{(y - y')}{L} \delta y + \\ & + \frac{(z - z')}{L} \delta z = \frac{(x - x')}{L} \delta x' + \\ & + \frac{(y - y')}{L} \delta y' + \frac{(z - z')}{L} \delta z'. \end{aligned}$$

Ertheilen wir nun den Punkten A, B eine virtuelle Verrückung, so wird die Linie AB in die Lage ab kommen, der Punkt A wird den unendlich kleinen Bogen $Aa = \delta s$ auf der AM, und der Punkt B den unendlich kleinen Bogen $Bb = \delta s'$ beschrieben haben, welche unendlich kleine Bogen als gerade Linien aufgefasst werden können.

Die vorige Gleichung kann man in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} & \delta s \left[\frac{(x - x')}{L} \frac{\delta x}{\delta s} + \frac{(y - y')}{L} \frac{\delta y}{\delta s} + \frac{(z - z')}{L} \frac{\delta z}{\delta s} \right] = \\ & = \delta s' \left[\frac{(x - x')}{L} \frac{\delta x'}{\delta s'} + \frac{(y - y')}{L} \frac{\delta y'}{\delta s'} + \frac{(z - z')}{L} \frac{\delta z'}{\delta s'} \right] \end{aligned}$$

Fig. 60.



Der Ausdruck in der Klammer des linken Gliedes ist gleich dem $\cos B A a$, weil die Linie BA mit den Achsen Winkel einschließt, deren Cosinus zum Ausdruck haben

$$\frac{x-x'}{L}, \quad \frac{y-y'}{L}, \quad \frac{z-z'}{L},$$

und die Linie Aa mit den Achsen Winkel bildet, deren Cosinus ausgedrückt werden durch

$$\frac{\delta x}{\delta s}, \quad \frac{\delta y}{\delta s}, \quad \frac{\delta z}{\delta s}.$$

Ebenso ist der Ausdruck in der Klammer des Gliedes rechter Hand gleich $\cos CB b$.

Man hat also

$$\delta s \cos B A a = \delta s' \cos C B b.$$

§ 224. Wir nehmen an, dass die virtuellen Verrückungen der beiden Punkte in gleichem Sinne sind, was immer erfüllt werden kann, wenn man die Bogen entsprechend nimmt.

Die in der letzten Gleichung vorkommenden Ausdrücke stellen die Projectionen der Deplacements δs , $\delta s'$ auf AB vor, und muss auch hier, damit die Kräfte R , R' sich Gleichgewicht machen, die Richtung beider Kräfte längs der Linie AB gerichtet sein, ferner müssen R und R' einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sein, alsdann wird aber, da $R = R'$ ist,

$$R \delta s \cos B A a = R' \delta s' \cos C B b,$$

und wenn wir die Producte $\delta s \cos B A a$ und $\delta s' \cos C B b$ mit δp , $\delta p'$ bezeichnen, wird man haben

$$R \delta p = R' \delta p',$$

wo δp , $\delta p'$ von gleichem Zeichen, R , R' von entgegengesetztem Zeichen sind, und es ergibt sich demnach

$$R \delta p + R' \delta p = 0.$$

Wirken also an zwei Punkten A , B , welche durch eine starre Linie AB verbunden und genöthigt sind, auf zwei Curven zu verbleiben, zwei gleiche Kräfte in der Richtung der Geraden AB und von entgegengesetztem Sinne, so ist auch die Summe der virtuellen Arbeiten der Kräfte gleich Null.

§ 225. Nehmen wir an, es wirken an A und B gar keine äußeren Kräfte, und als Kräfte wirken bloß die wechselseitigen Actionen des materiellen Punktes A auf B , und die des Punktes B auf A , und bezeichnen wir diese Kräfte wie früher mit R , R' , Coordinaten und Deplacements wie früher, so werden die virtuellen

Arbeiten beider, von A auf B und von B auf A gerichteten Kräfte ausgedrückt sein durch

$$R \delta s \cos BAa, R' \delta s' \cos CBb,$$

und sind infolge des Principes der Action und Reaction einander gleich und von entgegengesetztem Sinne, und mithin die Summe dieser virtuellen Arbeiten der wechselseitig auf beide Punkte wirkenden Kräfte gleich Null.

Neunundzwanzigstes Capitel.

Allgemeines Princip der virtuellen Deplacierungen bei einem starren Körper oder Punktsysteme.

§ 226. Diese einzelnen Fälle vorausgeschickt, kommen wir zum allgemeinen Principe.

Machen sich Kräfte in welcher Zahl immer, die an einem Punktsysteme wirken, dessen Punkte gewissen Bedingungen unterworfen sind, Gleichgewicht, so ist die Summe der virtuellen Arbeiten der direct applicierten Kräfte gleich Null, für jedes virtuelle Deplacement, welches mit den Bedingungen des Systems vereinbar ist.

Wir bemerken dabei, dass die älteren Autoren für virtuelles Deplacemet virtuelle Geschwindigkeit schreiben, und die virtuelle Arbeit virtuelles Moment nennen.

Bevor wir nun zur Begründung dieses Principes schreiten, erinnern wir, dass man unterscheidet Kräfte, die direct an einem Körper angebracht sind, und Kräfte der Liaison. Für Kräfte der Liaison, da sie innere Kräfte sind, ist die Summe der virtuellen Arbeiten für jedes virtuelle Deplacement, sei es als das der Translation oder als das der Rotation gedacht, gleich Null, weil die wechselseitigen Wirkungen aller dieser Kräfte von einem Punkte auf den andern gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, und die Summe der von diesen Kräften herstammenden virtuellen Arbeiten daher nothwendig gleich Null ist.

Man braucht also, um die Gleichung des Gleichgewichtes zu erhalten, nur die virtuellen Arbeiten der direct applicirten Kräfte gleich Null zu setzen und die Kräfte der Liaison ganz außer Acht zu lassen.

Wenn wir ferner von Deplacements sprechen, die vereinbar mit dem Systeme sind, so verstehen wir darunter solche, wo die Gleichungen der Liaisons ungestört bleiben, die Coordinaten also

auch in der neuen Lage des Körpers den Gleichungen der Liaison entsprechen, und dabei ferner für welche Deplacierung immer stets eine in direct entgegengesetztem Sinne möglich ist.

Befindet sich ein materieller Punkt auf einer Ebene, Curve oder Fläche, so ist eine Bewegung darauf nach einer Richtung gleichzeitig mit einer Bewegung in direct entgegengesetzter Richtung möglich. Dagegen kann die Bewegung in senkrechter Richtung gegen die Ebene oder die Curve nur in einem Sinne vor sich gehen. Betrachtet man also die Bewegungen in der Ebene oder auf der Curve, so führt das zu Gleichungen, welche die Gleichgewichtsbedingungen enthalten, während die Bewegung in senkrechter Richtung nur die Richtung der normalen Kraft bestimmt, die der einer möglichen Bewegung entgegengesetzt ist.

Beim Principe der virtuellen Arbeit setzen wir demnach immer voraus, dass für jede der mit den Bedingungen des Systems vereinbarten Bewegungen gleichzeitig die Bewegung in direct entgegengesetztem Sinne möglich ist.

§ 227. Seien die invariabel miteinander verbundenen Punkte des Systems $A, A', A'' \dots n$ an der Zahl gegebenen Bedingungen unterworfen. Die Bedingungen werden durch Gleichungen ausgedrückt sein.

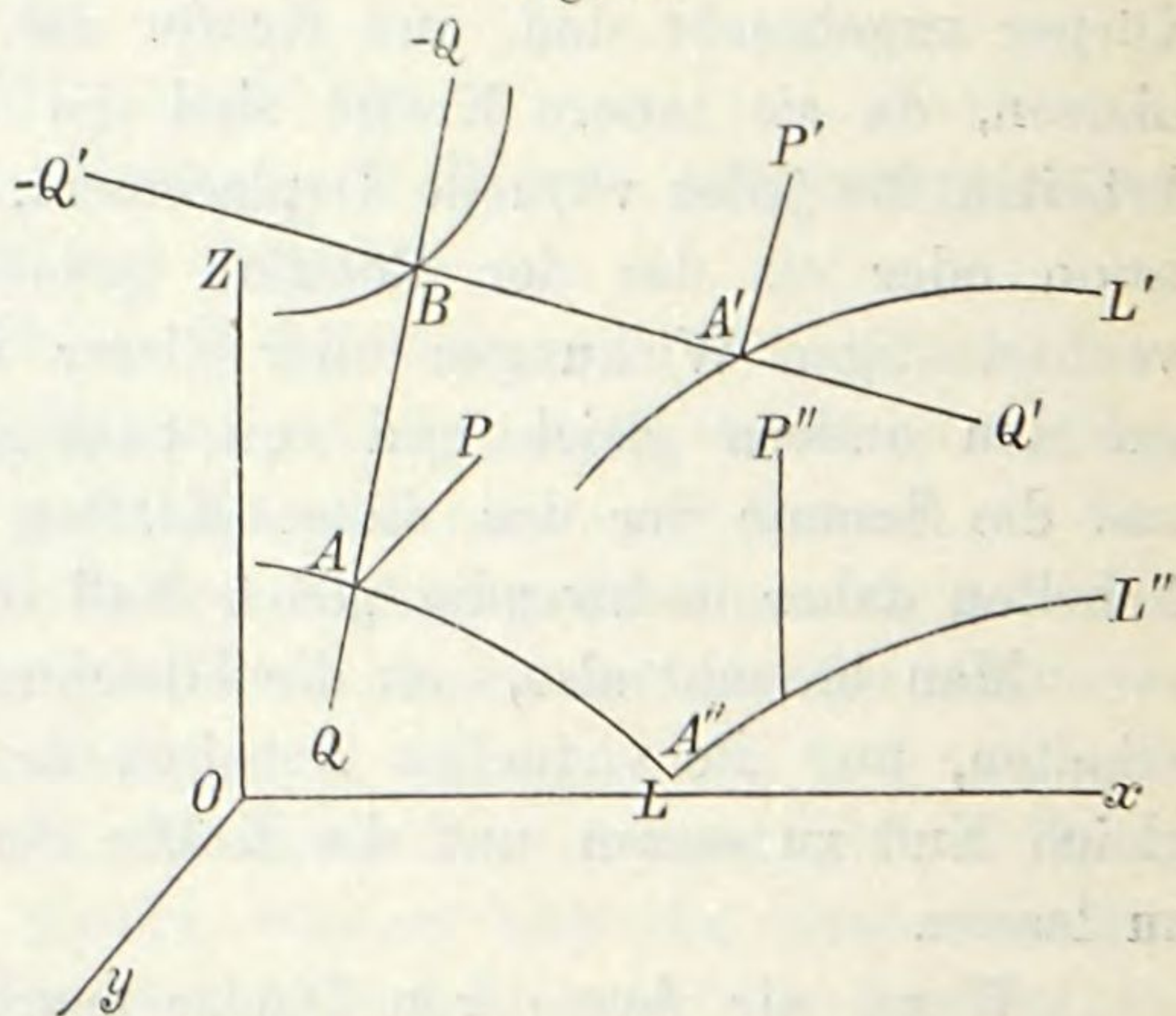
Seien ferner $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ die Coordinaten der Punkte, also $3n$ an der Zahl.

Die Zahl der Gleichungen muss weniger als $3n$ sein, da sonst alle Punkte fix wären und das ganze System in Ruhe sein würde, welche Kräfte immer daran wirken.

Nehmen wir an, die Zahl der Gleichungen sei $3n - 1$, von der Form $F(x, y, z, x', y' \dots) = 0$. In diesem Falle sagt man, dass das System mit complete Liaisons sei, alle Punkte sind dann unterworfen auf gewissen gegebenen Curven zu ver-

bleiben, und die Deplacierung eines Punktes hat die Deplacierung aller anderen Punkte zur Folge.

Fig. 61.



Denn aus den Gleichungen kann man alle Coordinaten x', y', z' x'', y'', z'' eliminieren, so dass man aus den Gleichungen die Werte von

$$y = f(x), z = f'(x)$$

ziehen kann.

Diese Gleichung stellt eine Curve AL vor, auf welcher der Punkt A zu verbleiben hat. In dieser Weise kann man mit den anderen Punkten vorgehen, und man wird sich überzeugen, dass jeder Punkt auf einer Curve zu verbleiben hat.

Ferner kann man alle Variabeln durch eine einzige, sei es x , ausdrücken, so dass, wenn man die Lage eines Punktes kennt, die der anderen Punkte bestimmt ist, und ertheilt man einem Punkte ein virtuelles Deplacement, so ergeben sich die virtuellen Deplacierungen aller anderen Punkte des Systems aus den Gleichungen.

Endlich kann man auf der Curve jedem Punkte eine virtuelle Verrückung nach dem einen oder dem entgegengesetzten Sinne ertheilen, so dass sich daraus für jeden Punkt zwei gleiche virtuelle Arbeiten von entgegengesetztem Zeichen ergeben.

Setzen wir schließlich, wie in den früheren Fällen, voraus, dass an jedem Punkte nur eine Kraft angreift, da man stets statt der mehreren Kräfte die Resultante nehmen kann.

§ 228. Nehmen wir also an, dass die Kräfte, welche an den Punkten A, A', A'' wirken, sich Gleichgewicht machen, da nun alle Punkte des Systems invariabel miteinander verbunden sind, so nehmen wir einen beliebigen Punkt des Systems B, welcher mit den Punkten A, A' durch zwei starre, um B bewegliche Strecken BA, BA' verbunden ist, bringen an A und B in der Richtung der Linie BA zwei gleiche Kräfte $Q, -Q$ von entgegengesetztem Zeichen an, und an den Punkten BA' in der Richtung dieser Linie ebenfalls zwei gleiche Kräfte und von entgegengesetztem Zeichen $Q', -Q'$, wodurch der Zustand des Systems nicht geändert wird.

Nennen wir nun die Projectionen der den Punkten ertheilten virtuellen Deplacierungen auf die Kräfte $\delta p, \delta p', \delta p''$ und bezeichnen die virtuelle Arbeit der an A angebrachten Kraft Q mit $Q\delta q$ und die virtuelle der an A' angebrachten Kraft Q' mit $Q'\delta q'$. Die Intensität der angesetzten Kraft Q' ist willkürlich, und können wir sie so bestimmen, dass Q' und P' den Punkt A' auf der Curve A'L' im Gleichgewichte halten, was dann der Fall sein wird, wenn man hat

$$P'\delta p' + Q'\delta q' = 0.$$

Man kann alsdann P' und Q' ganz unterdrücken, als wenn sie nicht vorhanden wären.

Ebenso können wir die Kraft Q so bestimmen, dass die Kräfte $-Q$, $-Q'$ den Punkt B im Gleichgewichte halten, was eintreten wird, wenn man hat

$$Q\delta q + Q'\delta q' = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$P'\delta p' = Q\delta q.$$

Aus der vorletzten Gleichung sieht man auch, dass man die beiden Kräfte an B unterdrücken kann, so dass an A außer der Kraft P noch die Kraft Q bleibt.

Wir haben also in der Weise operiert, dass wir die Kraft P' an A' ganz unterdrückt, dafür aber an A eine neue Kraft Q von der Intensität hinzugefügt, dass die virtuelle Arbeit derselben $Q\delta q$ gleich ist der virtuellen Arbeit der Kraft P' , also dem Producte $P'\delta p'$.

In dieser Weise können wir mit den anderen Kräften machen, und alle nach A transportieren.

§ 229. Jeder Punkt kann sich ferner auf der Curve nach zwei Richtungen mit entgegengesetzten Zeichen bewegen, so dass man zwei gleiche virtuelle Deplacierungen von entgegengesetztem Zeichen hat, was auch aus den Gleichungen zu ersehen ist.

Es seien nämlich die $(3n-1)$ Gleichungen von der Form

$$f(x, y, z, x', y', z' \dots) = 0.$$

Differenziert man dann eine Gleichung nach allen darin vorkommenden Variabeln, so wird die Gleichung sein

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta x'} + \dots = 0,$$

und die anderen Differenzialgleichungen der übrigen Gleichungen werden von ähnlicher Form sein. Genügen nun die $\delta x, \delta y, \delta z \dots$, positiv genommen, diesen Gleichungen, so wird diesen Differenzialgleichungen auch Genüge geschehen, wenn man allen diesen Variationen das negative Vorzeichen gibt, so dass für jeden Punkt zwei gleiche und im entgegengesetzten Sinne gerichtete Deplacierungen sich ergeben.

Wir haben ferner alle virtuellen Arbeiten nach einem einzigen Punkte A verlegt, und damit das System im Gleichgewichte ist, ist es nothwendig und hinreichend, dass diese nach einem einzigen Punkte A verlegten Kräfte sich Gleichgewicht machen, also dass die Summe der virtuellen Arbeiten bei jeder virtuellen mit dem

System verträglichen Deplacierung gleich Null ist, mithin dass die Gleichung besteht

$$1. \quad P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' + \dots = \Sigma P\delta p = 0.$$

§ 230. Ist die Anzahl der Bedingungen kleiner als im vorigen Falle, wo wir also ein System mit nicht completen Liaisons haben, so können wir uns zu den vorhandenen Liaisons immer neue Liaisons hinzudenken, bis die Zahl der vorhanden gewesenen und hinzugefügten Liaisons $3n-1$ wird, so dass irgend eine mit dem System verträgliche virtuelle Deplacierung die einzig mögliche wird. Das Gleichgewicht wird hiedurch nicht gestört, wenn es vorher bestanden. Alsdann ist aber die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit die Kräfte des nunmehr mit completen Liaisons gewordenen Systems sich Gleichgewicht machen, dass die Summe aller virtuellen Arbeiten für jede mit dem System verträgliche Deplacierung verschwinde, folglich ist auch hier die Summe der virtuellen Arbeiten gleich Null für jede virtuelle Deplacierung, welche mit den Bedingungen des Systems vereinbar ist.

§. 231. Umgekehrt, wenn die Summe der virtuellen Arbeiten der an einem Punktsysteme wirkenden Kräfte gleich Null ist für jede Deplacierung, die mit dem Systeme vereinbar ist, so machen sich die Kräfte Gleichgewicht.

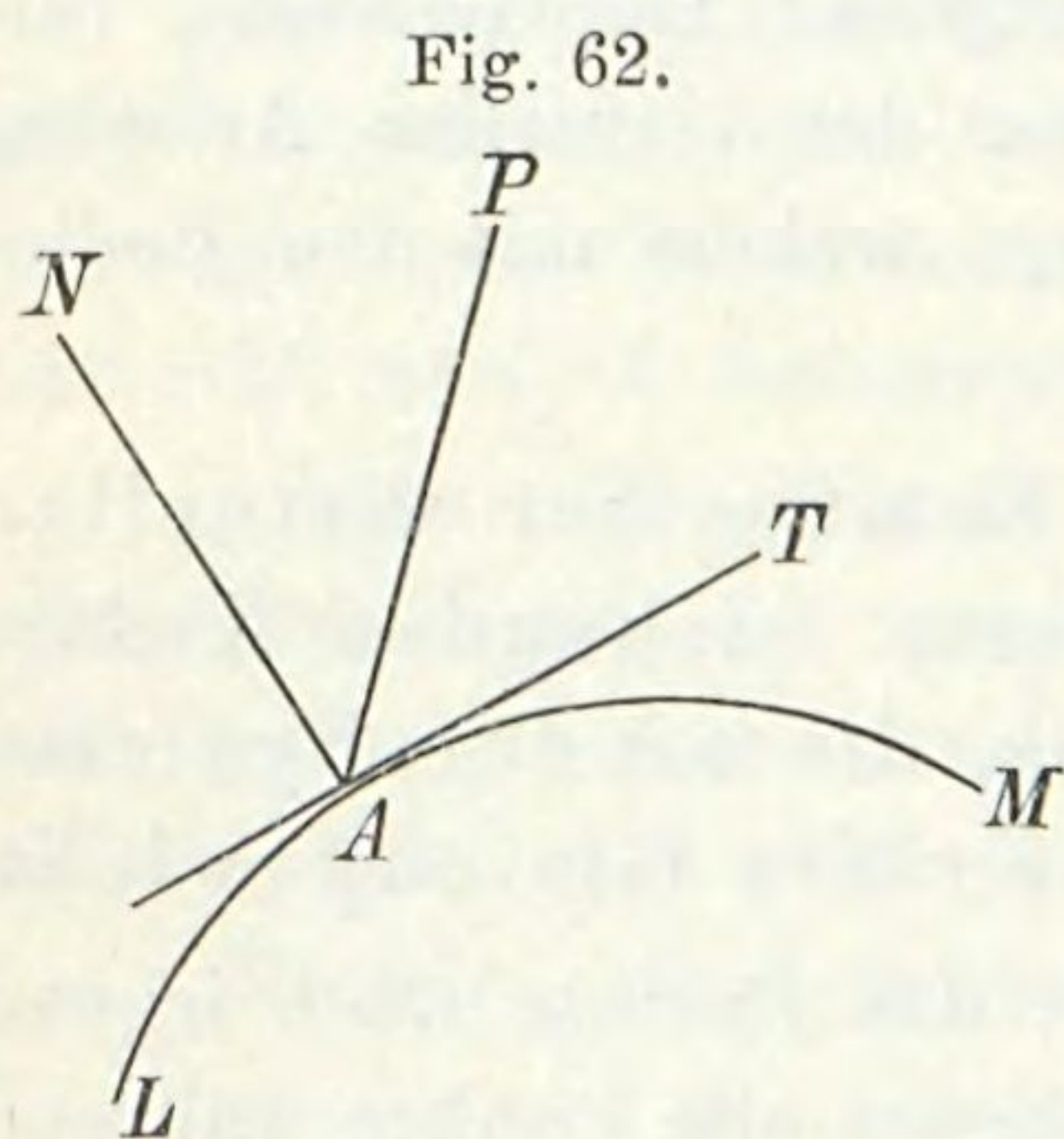
Denn könnten die gegebenen Kräfte das System nach irgend einer Richtung in Bewegung setzen, so müssten alle Punkte während einer unendlich kurzen Zeit, unendlich kleine Deplacierungen beschreiben. Man könnte aber, ohne diese Bewegung zu ändern, neue Bedingungen einführen, welche das System zu einem mit completen Liaisons machen, und welche jede Bewegung verhindern würde, die von der verschieden wäre, die vermöge Voraussetzung statthat. Man würde aber alsdann ein System mit completen Liaisons haben, in welchen die Summe der virtuellen Arbeiten gleich Null ist, und wo die Kräfte dennoch nicht im Gleichgewichte wären, was aber den früher bewiesenen Sätzen widerspricht.

Man hat demnach das allgemein geltende Theoreme, wonach, wenn Kräfte auf ein Punktsystem wirken, die Gleichungen zwischen den Coordinaten desselben mögen von welcher Art immer sein, die nothwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichtes die ist, dass die Summe der virtuellen Arbeiten der direct applicierten Kräfte Null sei bei allen virtuellen Deplacierungen, die mit dem Systeme verträglich sind.

§ 232. Wie wir gesehen, liegt der Herleitung des Principes der virtuellen Deplacierungen die Voraussetzung zu Grunde, dass, wenn der Punkt auf einer Fläche oder Curve zu verbleiben hat, die Resultante der Kräfte normal zur Fläche oder Curve stehen muss, indem dann die Projection der Deplacierung auf die Resultante gleich Null sein muss. Diese Voraussetzung ist aber nur dann richtig, wenn die Fläche oder Curve keine Reibung entwickelt, so dass die Bewegung nach keiner Seite der Tangentialebene der Fläche oder der Tangente der Curve gehemmt ist.

Im gegentheiligen Falle, wenn Reibung vorhanden ist, muss die Resultante nicht mehr normal sein.

Sei die Fläche, worauf der Punkt zu verbleiben hat, LM , die auf den Punkt A wirkende Kraft P nicht normal zur Fläche. Wir zerlegen die Kraft in zwei Kräfte, die eine normal zur Fläche NA , die andere tangential AT .



Gesetzt also, dass die Tangentialkraft AT durch die Reibung gehemmt, also aufgehoben wird, so wird A in Ruhe bleiben, ungeachtet P nicht normal zur Fläche steht.

Kann also der Schluss auf das Normalsein der Kraft nicht gemacht werden, so können alle weiteren Schlüsse und das ganze Princip nicht mehr gezogen werden. Es kann Gleichgewicht vorhanden sein, und dennoch die Summe der virtuellen Arbeiten nicht verschwinden, nicht gleich Null sein.

§ 233. Dieser Umstand vermindert den Wert des Theoremes der virtuellen Deplacierungen. Wie kann man nämlich wissen, dass eine ideale Fläche oder Curve, die von den Liaisons herkommt, keine Reibung entwickelt? Das ist sehr schwer.

Kennt man die Intensität der Reibung, so kann man statt derselben eine Kraft einführen und dann vom Principe, wie in den früheren Fällen, Gebrauch machen, indem man zu der Summe der virtuellen Arbeiten aller vorhandenen Kräfte die virtuelle Arbeit der eingeführten Kraft hinzufügt, und alsdann muss, im Falle des Gleichgewichtes, die Summe der virtuellen Arbeiten aller Kräfte, die eingeführte Kraft mitgerechnet, gleich Null sein.

§ 234. Das Princip der virtuellen Deplacierungen kann auch in einer andern Gestalt dargestellt werden.

In der Regel bringt man nicht die Kraft selbst, sondern deren Componenten X, Y, Z nach den Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems in Rechnung. Seien also die Componenten der Kraft P , bezogen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem X, Y, Z . Die virtuelle Arbeit der Kraft P , wo man die Projection virtueller Deplacierung auf die Kraft P mit δp bezeichnet, ist $P \delta p$. Die virtuellen Arbeiten der Componenten sind

$$X \delta x, Y \delta y, Z \delta z$$

wenn dx, dy, dz die Projection der virtuellen Deplacierung nach denselben Achsen sind.

Wie wir aus Früherem wissen, ist

$$P \delta p = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z.$$

Ähnliche Gleichungen werden wir bei den anderen Kräften haben, wenn wir diese mit $P', P'' \dots$, deren Componenten nach den Achsen mit $X', Y', Z', X'' \dots$ und nach den Achsen mit $\delta x', \delta y', \delta z', \delta x'' \dots$ die Projectionen der virtuellen Deplacements auf P mit $\delta p', \delta p'' \dots$ bezeichnen.

Substituieren wir aber die Werte von $P \delta p, P' \delta p \dots$ in die Gleichung 1., so hat man

$$2. \quad \Sigma P \delta p = \Sigma [X \delta x + Y \delta y + Z \delta z] = 0.$$

Dabei erstreckt sich das Summenzeichen auf alle direct applicierten Kräfte und alle mit dem Systeme compatiblen Verrückungen, bei welchen also die Liaisonsgleichungen ungestört bleiben, und versteht man unter Summe immer die algebraische Summe.

Dreißigstes Capitel.

Ableitungen der Bedingungen des Gleichgewichtes aus obigem Principe.

§ 235. Aus diesem allgemeinen Principe der virtuellen Deplacierungen können die Bedingungen des Gleichgewichtes eines Punktsystems abgeleitet werden.

Gesetzt, es wirken an den Punkten, n an der Zahl, n Kräfte $P, P', P'' \dots$, also an jedem Punkte des Systems eine Kraft, was keine Einschränkung bedeutet, da, wie wir bereits bemerkt, wenn mehr Kräfte an einem Punkte wirken, man immer die Resultante statt der einzelnen Kräfte nehmen kann.

Die Componenten der Kräfte nach den rechtwinkligen Achsen seien $X, Y, Z, X' \dots$, die Coordinaten der einzelnen Punkte $x, y, z, x' \dots$, die Projectionen der virtuellen Deplacierungen nach den

Achsen $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x' \dots$, die Anzahl der Gleichungen der Liaison zwischen den Punkten gleich k .

$$1. \quad L = 0, \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 0 \dots$$

Vermöge des Principes der virtuellen Deplacierungen haben wir ferner, im Falle des Gleichgewichtes

$$2. \quad \Sigma [X \delta x + Y \delta y + Z \delta z] = 0.$$

Diese Gleichungen müssen, wenn man dem Systeme eine unendlich kleine, mit dem Systeme compatible Deplacierung ertheilt, auch den neuen Coordinaten genügen, die Gleichungen müssen auch für die neuen Lagen der Punkte, also auch für $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, x' + \delta x' \dots$ richtig sein.

Es müssen demnach bezüglich der mit dem Systeme vereinbarten Variationen $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y' \dots$ die nachstehenden Gleichungen bestehen.

$$3. \quad \begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x} \delta x + \frac{\delta L}{\delta y} \delta y + \frac{\delta L}{\delta z} \delta z + \frac{\delta L}{\delta x'} \delta x' + \frac{\delta L}{\delta y'} \delta y' \dots = 0 \\ \frac{\delta L_1}{\delta x} \delta x + \frac{\delta L_1}{\delta y} \delta y + \frac{\delta L_1}{\delta z} \delta z + \frac{\delta L_1}{\delta x'} \delta x' + \frac{\delta L_1}{\delta y'} \delta y' \dots = 0 \\ \frac{\delta L_2}{\delta x} \delta x + \frac{\delta L_2}{\delta y} \delta y + \frac{\delta L_2}{\delta z} \delta z + \frac{\delta L_2}{\delta x'} \delta x' + \frac{\delta L_2}{\delta y'} \delta y' \dots = 0 \end{cases}$$

§ 236. Dabei sind $L, L_1, L_2 \dots$ Functionen einiger oder aller Coordinaten von der Form

$$L = f(x, y, z, x', y' \dots)$$

und ähnliche Functionen werden auch die anderen Gleichungen sein. Alle stellen gewisse Flächen vor, auf welchen sich die Punkte befinden. Ändert man das Zeichen aller in den Gleichungen 3. vorkommenden Größen $\delta x, \delta y, \dots$ so bleiben die Gleichungen auch richtig, so dass man die Deplacierungen in dem einen und in entgegengesetztem Sinne ertheilen kann. Die Gleichungen 3. enthalten ferner $3n$ -Variationen.

Aus den k -Gleichungen 3. können wir die Werte von k -Variationen, ausgedrückt in Werten der anderen $3n - k$ -Variationen bestimmen, und diese Werte in die Gleichung 2. hineintragen. Die darin vorkommenden restierenden $3n - k$ -Variationen sind ganz willkürlich, weil die Gleichung 2. für alle unter den Bedingungen des Systems zulässigen Variationen der Coordinaten gelten muss, und die gegebenen Bedingungen durch die Gleichungen 3. schon in Rechnung gebracht wurden. Die Gleichung 2. kann daher nur dann bestehen,

wenn jeder Coefficient der restierenden $3n-k$ -Variationen für sich gleich Null ist.

Dadurch bekommen wir $3n-k$ neue Gleichungen, und durch Verbindung dieser Gleichungen mit den Gleichungen 1., zusammen $3n$ -Gleichungen zwischen den Componenten der Kräfte und den Coordinaten ihrer Angriffspunkte, welche für das Gleichgewicht nothwendig und hinreichend sind.

§ 237. Die Elimination von k -Variationen aus den Gleichungen 3. kann durch die Methode der Multiplicatoren bewirkt werden, wodurch wohl nicht die Rechnung erleichtert wird, man aber zugleich die Liaisonskräfte berechnen kann.

Multipliziert man nämlich die erste der Gleichungen 3. mit λ , die zweite mit λ_1 , die dritte mit $\lambda_2 \dots$, K an der Zahl, addiert dieselben, und fügt die Gleichung 2. hinzu, so kommt

$$4. \quad \Sigma \left[X + \frac{\delta L}{\delta x} \lambda + \frac{\delta L_1}{\delta x} \lambda_1 + \frac{\delta L_2}{\delta x} \lambda_2 \right] \delta x + \dots = 0.$$

Die Größen der eingeführten Multiplicatoren sind willkürlich, wir können sie daher so wählen, dass die Coefficienten von k -Variationen gleich Null sind, so dass die daraus sich ergebenden Werte dazu dienen, die k Multiplicatoren zu berechnen. Es bleiben daher dann in der Gleichung $3n-k$ -Variationen, welche ganz willkürlich sind, und kann die Gleichung 4. nur bestehen, wenn die Coefficienten der einzelnen Variationen jeder für sich gleich Null werden, und mithin die Coefficienten aller $3n$ -Variationen gleich Null sind.

Dadurch aber bekommen wir ein System von $3n$ -Gleichungen von nachstehender Form:

$$5. \quad \left\{ \begin{array}{l} X + \frac{\delta L}{\delta x} \lambda + \frac{\delta L_1}{\delta x} \lambda_1 + \frac{\delta L_2}{\delta x} \lambda_2 + \dots = 0 \\ Y + \frac{\delta L}{\delta y} \lambda + \frac{\delta L_1}{\delta y} \lambda_1 + \frac{\delta L_2}{\delta y} \lambda_2 + \dots = 0 \\ Z + \frac{\delta L}{\delta z} \lambda + \frac{\delta L_1}{\delta z} \lambda_1 + \frac{\delta L_2}{\delta z} \lambda_2 + \dots = 0 \\ X' + \frac{\delta L}{\delta x'} \lambda + \frac{\delta L_1}{\delta y} \lambda_1 + \frac{\delta L_2}{\delta z} \lambda_2 + \dots = 0 \\ Y' + \frac{\delta L}{\delta y'} \lambda + \frac{\delta L_1}{\delta y'} \lambda_1 + \frac{\delta L_2}{\delta y'} \lambda_2 + \dots = 0 \\ Z' + \frac{\delta L}{\delta z'} \lambda + \frac{\delta L_1}{\delta y'} \lambda_1 + \frac{\delta L_2}{\delta z'} \lambda_2 + \dots = 0 \end{array} \right.$$

Von diesen 3 n-Gleichungen bestimmen k Gleichungen die Größen der eingeführten Multiplicatoren, und führt man diese Werte in die übrigen Gleichungen ein, so hat man die Bedingungen des Gleichgewichtes.

Finden umgekehrt die Gleichungen 5. statt, alsdann machen sich die Kräfte Gleichgewicht. Denn multipliciert man diese Gleichungen respective mit δx , δy , δz , $\delta x'$. . . , so gelangt man zur Gleichung 4. und dann, unter Beachtung der Gleichungen 3., zur Gleichung 2., welche die Gleichung des Gleichgewichtes ist, und ausdrückt, dass die Summe der virtuellen Arbeiten der Kräfte gleich Null ist.

§ 238. Die Gleichungen 5. führen zur Kenntniss der Kräfte der Liaison.

In der That, betrachten wir die Gleichung $L = 0$, so kann man diese Gleichung unterdrücken und statt derselben zu den bereits vorhandenen Kräften neue, die Liaison vorstellende und sie vollkommen ersetzende Kräfte hinzufügen, so dass die Gleichungen 5. dieselben bleiben und das Gleichgewicht nicht gestört werde.

Man könnte nämlich statt der zu unterdrückenden Gleichung $L = 0$, am Punkte A eine Kraft einführen, deren Componenten nach den Achsen

$$\frac{\lambda \delta L}{\delta x}, \quad \frac{\lambda \delta L}{\delta y}, \quad \frac{\lambda \delta L}{\delta z}$$

wären, ferner am Punkte A' eine Kraft einführen, deren Componenten nach den Achsen

$$\frac{\lambda \delta L}{\delta x'}, \quad \frac{\lambda \delta L}{\delta y'}, \quad \frac{\lambda \delta L}{\delta z'}$$

wären, und so an allen Punkten. Die Liaison $L = 0$ erzeugt alle diese Kräfte.

Die Intensität der an A anzubringenden Kraft wird den Ausdruck haben

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{\delta z}\right)^2}$$

Die Cosinus der Winkel, welche diese Kraft an A mit den Achsen einschließt, würden dann die Ausdrücke haben

$$\frac{\frac{\delta L}{\delta x}}{\sqrt{\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{\delta z}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{\delta L}{\delta y}}{\sqrt{\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{\delta z}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{\delta L}{\delta z}}{\sqrt{\left(\frac{\delta L}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{\delta z}\right)^2}}$$

Daraus erklärt man gleich, dass diese statt der Gleichung der Liaison $L = 0$ eingeführte Kraft an A normal zur Fläche $L = 0$ steht, und so wird auf die Beschaffenheit der anderen an den anderen angebrachten Kräfte.

In derselben Weise können wir mit den anderen Gleichungen $L_1 = 0, L_2 = 0 \dots$ vorgehen, das ist, sie als nicht vorhanden zu betrachten, und statt derselben entsprechende neue Kräfte an allen Punkten anbringen. Diese Hilfskräfte, welche die Liaisons ersetzen, sind in der That diejenigen, welche in einem Punktsysteme die Drucke und Spannungen erzeugen.

§ 239. Haben wir nun in dieser Weise alle Liaisons unterdrückt, so müssen einerseits alle Punkte des Systems als ganz freie betrachtet werden, und andererseits haben wir die vorhandenen Kräfte und die an A, A', A'' eingeführten neuen Kräfte, deren Componenten nach den Achsen sind von der Liaison $L = 0$, an dem Punkte A

$$\lambda \frac{\delta L}{\delta x}, \lambda \frac{\delta L}{\delta y}, \lambda \frac{\delta L}{\delta z},$$

am Punkte A'

$$\lambda \frac{\delta L}{\delta x'}, \lambda \frac{\delta L}{\delta y'}, \lambda \frac{\delta L}{\delta z'},$$

und so weiter.

Aehnliches wird auch von den anderen Liaisons sein, und bezeichnen wir die Componenten aller dieser Kräfte für A mit μ, ν, ρ , für A' mit μ', ν', ρ' , so wird man haben

$$6. \quad \begin{cases} \mu = \lambda \frac{\delta L}{\delta x} + \lambda_1 \frac{\delta L_1}{\delta x} + \lambda_2 \frac{\delta L_2}{\delta x} + \dots \\ \nu = \lambda \frac{\delta L}{\delta y} + \lambda_1 \frac{\delta L_1}{\delta y} + \lambda_2 \frac{\delta L_2}{\delta y} + \dots \\ \rho = \lambda \frac{\delta L}{\delta z} + \lambda_1 \frac{\delta L_1}{\delta z} + \lambda_2 \frac{\delta L_2}{\delta z} + \dots \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} \mu' = \lambda \frac{\delta L}{\delta x'} + \lambda_1 \frac{\delta L_1}{\delta x'} + \lambda_2 \frac{\delta L_2}{\delta x'} + \dots \\ \nu' = \lambda \frac{\delta L}{\delta y'} + \lambda_1 \frac{\delta L_1}{\delta y'} + \lambda_2 \frac{\delta L_2}{\delta y'} + \dots \\ \rho' = \lambda \frac{\delta L}{\delta z'} + \lambda_1 \frac{\delta L_1}{\delta z'} + \lambda_2 \frac{\delta L_2}{\delta z'} + \dots \end{cases}$$

und so an allen Punkten.

Ist nun ein System im Gleichgewichte, so erscheinen alle an den nunmehr freien Punkten wirkenden Kräfte durch die statt der Liaison eingeführten Kräfte zerstört.

§ 240. Die Gleichungen 5 und die der Liaisons 1 kann man als Gleichungen des Gleichgewichtes betrachten, indem man daraus die $3n$ Coordinaten $x, y, z, x' \dots$ und auch die Größen $\lambda, \lambda, \dots$, und daher auch die Kräfte der Liaisons berechnen kann.

Man muss noch am Schlusse bemerken, dass Variationen $\delta x, \delta y, \delta z \dots$ keineswegs mit den Differenzials dx, dy, dz zu verwechseln sind, was, wie wir später sehen werden, in der Dynamik wichtig ist.

Die Größen $\delta x, \delta y, \delta z \dots$ drücken die Projectionen ideeller, möglicher Verschiebungen aus, während dx, dy, dz unendlich kleine Zuwachse der Coordinaten eines Körpers in Bewegung während eines Zeitintervalls dt sind. Ein reelles Displacement ist im Allgemeinen nicht compatibel mit den Liaisons zu einer Zeit t .

Enthält nämlich die Liaisonsgleichung die Zeit, so wird ihr Differenzial sein

$$\frac{dL}{dt} dt + \frac{dL}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy + \frac{dz}{dz} dz + \dots = 0,$$

während wir bei virtueller Displacement die Gleichung haben

$$\frac{\delta L}{\delta x} \delta x + \frac{\delta L}{\delta y} \delta y + \frac{\delta L}{\delta z} \delta z + \dots = 0.$$

Diese beiden Gleichungen stimmen nur dann überein, wenn die Gleichung $L = 0$ die Zeit nicht enthält, wo also $\frac{dL}{dt} dt = 0$ ist.

Dann ist auch $\delta x = dx, \delta y = dy \dots$

Aus diesem Grunde hat man auch beim Principe der virtuellen Displacements statt des Differenzialzeichens das Variationszeichen eingeführt.

Einunddreißigstes Capitel.

Herleitung der Gleichungen des Gleichgewichtes eines soliden Körpers

§ 241. Aus der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichtes

$$\Sigma [X \delta x + Y \delta y + Z \delta z] = 0$$

lassen sich alle sechs Gleichungen für das Gleichgewicht eines soliden Körpers herleiten.

Der Körper kann eine Bewegung der Translation und eine der Rotation annehmen, und jede derselben nach drei Richtungen der Achsen.

Ertheilen wir nun dem Körper eine virtuelle Deplacierung nach der Richtung einer der Achsen, beispielsweise nach der x-Achse, also δx , alsdann sind alle $\delta y, \delta z = 0$, und obige Gleichung wird

$$\Sigma X \delta x = 0, \Sigma X = 0.$$

Ertheilen wir dem Körper successive nach den anderen Achsen virtuelle Deplacements $\delta y, \delta x$, alsdann ergeben sich drei Gleichungen

$$\Sigma X = 0$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$\Sigma Z = 0.$$

Wir haben ferner aus obiger allgemeiner Gleichung gefunden, dass die virtuelle Arbeit einer Kraft in einer Rotationsbewegung gleich ist dem Momente der Kraft bezüglich der Rotationsachse, multipliciert mit der Winkeldeplacierung. Nennen wir nun bei einer Drehung um die x-Achse die virtuelle Winkeldeplacierung $\delta \Theta$, das Moment der Kraft bezüglich der x-Achse L , so wird man haben

$$L \delta \Theta = 0, \text{ oder } L = 0.$$

Nun wissen wir, dass L , das Moment der Kraft bezüglich der x-Achse gleich ist $zy - Yz$, daher

$$zy - Yz = 0.$$

Dieselben Resultate hat man bei den anderen Drehungen um die y-Achse und um die z-Achse.

Man hat also die weiteren drei Gleichgewichtsbedingungen, wenn man bei allen Kräften so vorgeht

$$\Sigma (Zy - Yz) = 0$$

$$\Sigma (Xz - Zx) = 0$$

$$\Sigma (Yx - Xy) = 0.$$

Man kann dies auch unmittelbar aus obiger Gleichung ableiten. Nimmt man die z-Achse als Rotationsachse, so dass $\delta z = 0$ ist. Ferner hat man

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \Theta \\
 y &= r \sin \Theta \\
 \delta x &= -r \sin \Theta \delta \Theta, \quad \delta y = r \cos \Theta \delta \Theta \\
 \delta x &= y \delta \Theta \qquad \delta y = x \delta \Theta
 \end{aligned}$$

daher

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = (Yx - Xy) \delta \Theta = 0,$$

und in dieser Weise kann man alle drei obigen Gleichungen ableiten.

§ 242. Betrachten wir noch die allgemeine Gleichung des Gleichgewichtes

$$\Sigma [X \delta x + Y \delta y + Z \delta z] = 0$$

und nehmen an, sie sei die exacte Variation einer Function von $x, y, z, x' \dots$, diese mögen unabhängige Variables, oder abhängige miteinander durch die Gleichungen $L = 0, L_1 = 0$ liiert sein, so wird man haben

$$\Sigma [X \delta x + Y \delta y + Z \delta z] = \delta f . (x, y, z, x' \dots)$$

Dann ist, wie wir wissen, nothwendig, dass $X, Y, Z, X' \dots$ die partiellen Derivierten der Function f in Bezug auf $x, y, z, x' \dots$ sind, denn nur in diesem Falle kann der vorhergehende Ausdruck die exacte Variation der Function sein. Alsdann ist aber für die Position des Gleichgewichtes, und nur für diese der entsprechende Wert der $f(x, y, z, x' \dots)$ ein Maximum oder Minimum, im Falle die Function eines Maximums oder Minimums überhaupt fähig ist. Denn nur für die Gleichgewichtslage ist $\Sigma [X \delta x + Y \delta y + Z \delta z] = 0$, was bekanntlich Bedingung eines Maximums oder Minimums ist. Bei einem Maximum ist das Gleichgewicht stabil, das heißt, dass der Körper, wenn man ihn von der Gleichgewichtslage noch so wenig entfernt, die Rückkehr zur Gleichgewichtslage anstrebt, und in mehr oder weniger Zeit dahin zurückgelangt. Bei einem Minimum ist das Gleichgewicht labil, und kehrt der Körper, wenn er nur ein wenig von seiner Position des Gleichgewichtes derangiert wird, dahin nicht mehr zurück.

Zweiunddreißigstes Capitel.

Deformable Systeme.

Princip der Solidification.

§ 243. Bisnun haben wir das Gleichgewicht fester Körper betrachtet, Körper von unveränderter Form. Jetzt denken wir uns ein materielles System, dessen einzelne Punkte miteinander in gewisser

Weise verbunden sind, die Verbindung dabei aber nicht von invariabler Form ist.

Wir sprechen für alle solche Systeme das Princip aus, welches man das der Solidification nennt.

Befindet sich ein deformables System im Gleichgewichte, alsdann müssen die äußeren, das ist die direct applicierten Kräfte den Bedingungen des Gleichgewichtes von direct applicierten Kräften bei festen Körpern entsprechen.

In der That, da das System im Gleichgewichte ist, wird es dabei bleiben, wenn man die Punkte in invariabler Form miteinander verbindet, das ist, wenn man das System solidificiert. Bei diesem in der Weise constituierten festen Körper müssen aber die Kräfte, wenn sie im Gleichgewichte sind, den sechs Bedingungen des Gleichgewichtes entsprechen, folglich sind diese sechs Bedingungen auch beim deformablen System nothwendig, aber sie sind hier im allgemeinen nicht hinreichend, und müssen hier zum Gleichgewichte noch neue Bedingungen hinzutreten.

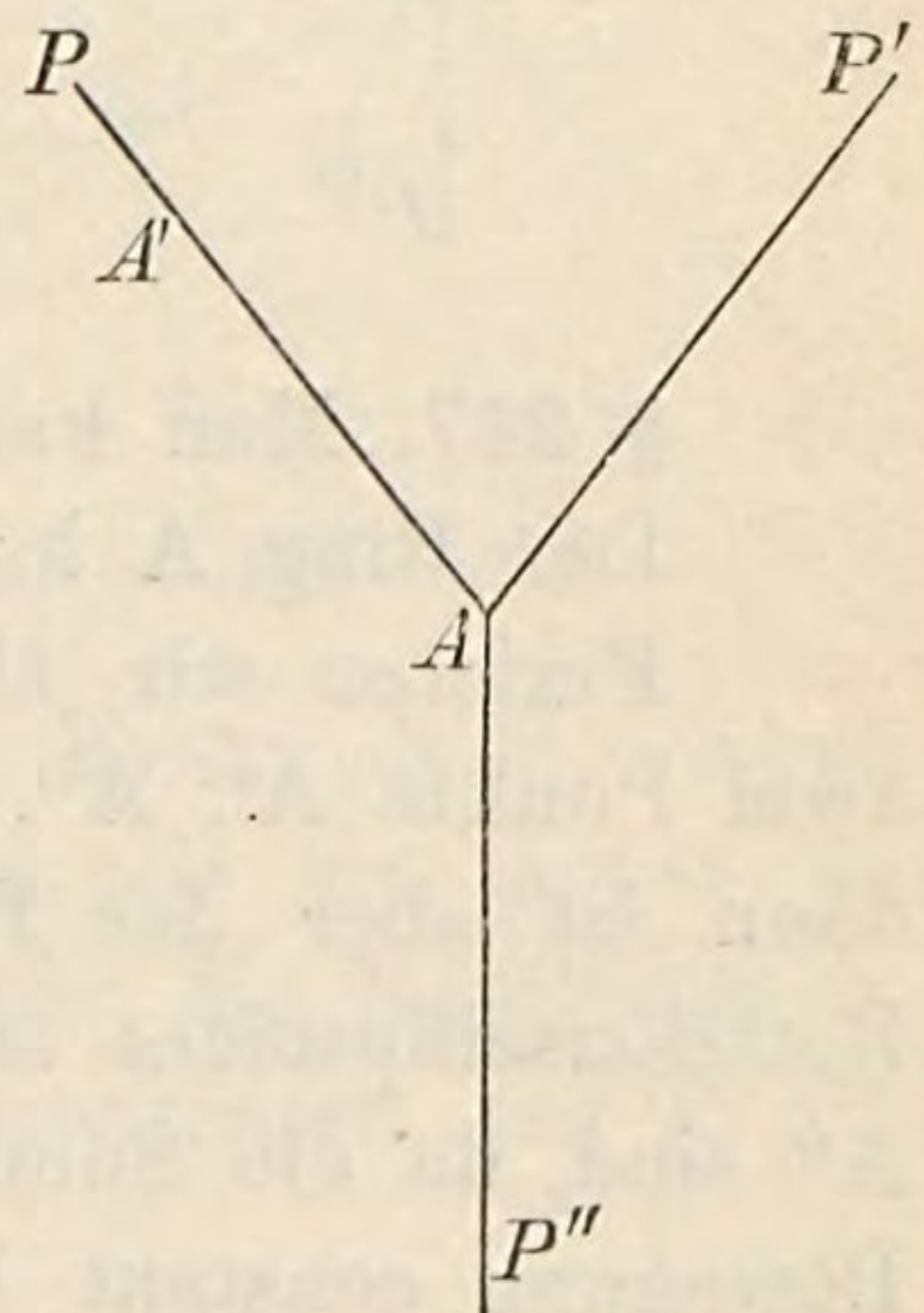
Gleichgewicht von Kräften an Schnüren.

§ 244. Wirken auf die Endpunkte eines biegsamen und un-
ausdehnbaren Seiles zwei Kräfte und befinden sich diese im Gleichgewichte, so muss, wie wir früher gesehen, das Seil in gerader Linie gespannt und die beiden an den Endpunkten wirkenden Kräfte nach der Länge des gespannten Fadens gerichtet, dabei einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sein.

Würden die Kräfte nicht nach der Länge des gespannten Seiles gerichtet sein, so müssten sie es drehen, und würden sie nicht einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sein, so müssten sie es nach dem Sinne der Richtung der größeren Kraft fortbewegen. Den einer jeden der an den beiden Endpunkten wirkenden Kräfte zukommenden Wert nennt man die Spannung des Seiles.

§ 245. Wirken drei Kräfte P , P' , P'' auf einen Punkt A mittelst dreier Schnüre AP , AP' , AP'' , welche sich an diesen Punkten vereinigen, und sind diese Kräfte im Gleichgewichte, so muss jede der drei Kräfte genau gleich und

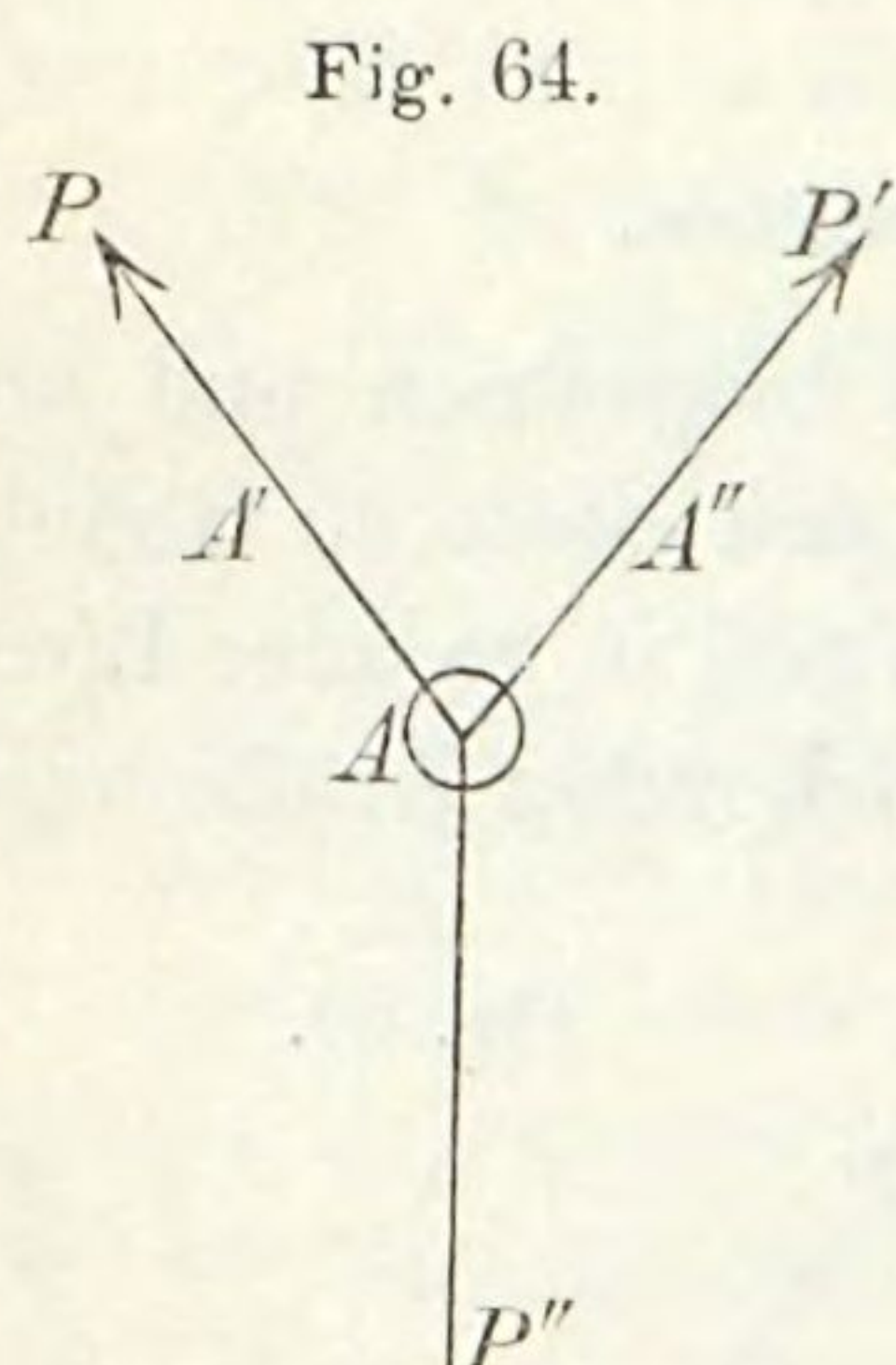
Fig. 63.



direct entgegengesetzt der Resultante der beiden anderen Kräfte sein. Diese drei Kräfte müssen also in einer und derselben Ebene sein und sich jede Kraft wie der Sinus des Winkels zwischen den Richtungen der beiden anderen Kräfte verhalten.

Fixiert man einen Punkt auf der Richtung einer Kraft, sei es P , so kann man die Kraft P unterdrücken und dennoch Gleichgewicht haben, da an der Stelle der Kraft die Fixität getreten, welche die Kraft vollkommen ersetzt. Der Druck, welchen der auf dem Seile AP fixierte Punkt A' erleidet, ist gleich und direct entgegengesetzt der Kraft P , welche man einführen müsste, wenn der Punkt A' wieder frei geworden wäre, um das Gleichgewicht herzustellen. Fixiert man auf dem Seile AP' ebenfalls einen Punkt und ebenso auf dem Seile AP'' einen Punkt statt der Kräfte, welche entfallen, so werden die Drucke, den diese Punkte erleiden, gleich und direct entgegengesetzt den respectiven Kräften P' , P'' sein.

§ 246. Sind die beiden Kräfte P, P' an den Enden der Schnur PAP' , welche durch einen Ring geht, angebracht, wird dieser Ring



A durch eine dritte Kraft P'' gehalten, und findet Gleichgewicht statt, so wird dieses nicht gestört, wenn wir den Ring A fixieren. Es muss also dann, da die Schnur PAP' gleiten kann, zwischen den zwei Kräften P, P' Gleichgewicht stattfinden, also müssen diese beiden Kräfte einander gleich sein, da sonst, wenn P nicht der Kraft P' gleich wäre, eine Fortbewegung nach der Richtung der größeren Kraft erfolgen müsste, infolge der Wirkung der Kraft von der Intensität $(P - P')$ oder $(P' - P)$. Es muss also $P = P'$ sein.

§ 247. Man kann dieses noch in anderer Weise beweisen.

Der Ring A kann sich längs der Schnur PAP' bewegen.

Fixieren wir also auf den Richtungen der Schnüre PA, AP' zwei Punkte A', A'' , so wird das Gleichgewicht nicht gestört, alsdann ist aber der Punkt A gezwungen auf der Oberfläche eines Rotationsellipsoides zu verbleiben, dessen beide Brennpunkte A' und A'' sind, da die Summe der Distanzen AA' und AA'' stets bei der Bewegung constant bleibt und gleich der großen Achse ist. Man kann mithin die Schnur $A'AA''$ ganz unterdrücken, wenn man den Punkt A der Bedingung unterwirft, beständig auf dieser Oberfläche zu verbleiben. In dieser Weise wird aber der Punkt A nur dann

sich im Gleichgewichte befinden, wenn die Kraft P'' , welche auf ihn wirkt, normal zur Oberfläche steht. Die Richtung dieser Kraft P'' muss demnach, vermöge bekannter Eigenschaft der Ellipse, Bisectrice des Winkels $A'AA''$ sein. Diese Bisectrice ist die Richtung der Resultante der beiden Kräfte P, P' , folglich sind die beiden Kräfte P, P' einander gleich.

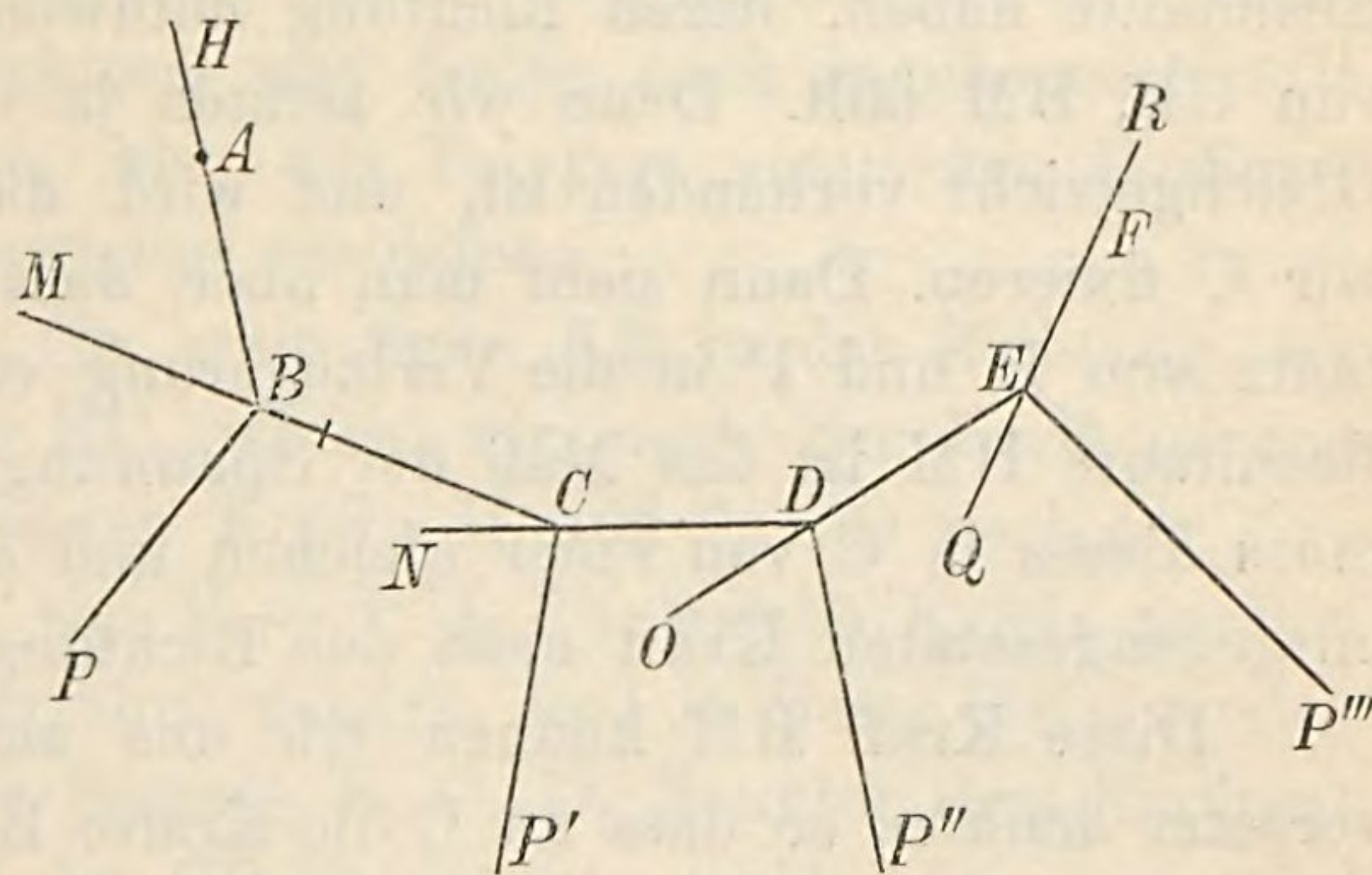
Stellt man nun die beiden Kräfte P, P' durch die Strecken AP, AP' vor und nennt den Winkel $A'AA''\omega$, so wird die dritte Kraft P'' , welche der Resultante der Kräfte P und P' direct entgegengesetzt ist, gleich sein $2P \cos \frac{\omega}{2}$. P'' ist auch der Druck, den A erleidet, wenn der Ring fixiert wird.

Dreiunddreißigstes Capitel.

Gleichgewicht der Kräfte bei einer Seilcurve.

§ 248. Seien die Punkte A, B, C, D, E, F durch biegsame und ausdehnbare Seile verbunden. An den Punkten A, F sind Kräfte H und K angebracht, welche, damit Gleichgewicht vorhanden ist, nothwendig nach den Längen der Fäden AB, EF gerichtet sein müssen.

Fig. 65.



An den Punkten B, C, D, E sind beliebige Kräfte P, P', P'', P''' angebracht, welche vermittelt an diesen Punkten befestigter Schnüre nach den Richtungen BP, CP', DP'', EP''' wirken. Wir

denken uns an jedem Punkte wirke bloß eine Kraft, denn wirken deren an einem Punkte mehrere, so können wir sie immer zu einer Resultante vereinigen und statt der Kräfte die Resultante in Rechnung bringen, und die verschiedenen Resultanten mit P, P', P'', P''' bezeichnen.

Diesen Complex von Seilen, welche an den Spitzen, also an den Punkten B, C, D, E mit festen Knoten verbunden sind, nennt man ein Seilpolygon. Statt der Knoten können Ringe angebracht

sein, die wir einstweilen ausschließen, und werden wir darauf später zurückkommen.

§ 249. Damit nun in diesem Systeme Gleichgewicht vorhanden ist, ist es nothwendig, dass jedes einzelne Seil von zwei gleichen und entgegengesetzten Kräften, die wir uns an den beiden Endpunkten des Seiles angebracht denken können, gezogen werde.

In der That, würde man ein Seil, wie BC, in einem Punkte L durchschneiden, so wäre das Gleichgewicht zerstört und die Punkte B, C würden sich nach gewissen Richtungen bewegen. Man sieht also klar, dass die an den Punkten B, C vorhandenen zwei Kräfte sie in Bewegung setzen würden, aber durch die obwaltende Liaison, welche das Seilstück eingeführt, zerstört wurden. Die beiden Kräfte sind daher nothwendig gleich und entgegengesetzt längs des Seiles BC gerichtet.

Die Intensität, welche einer jeden der am Seile BC wirkenden zwei Kräfte zukommt, ist die Spannung des Seiles BC.

§ 250. Aus dem vorhergehenden Grundsatz können wir die Bedingungen des Gleichgewichtes herleiten.

Die Kraft H an A können wir in ihrer Richtung nach B versetzen, so dass an B zwei Kräfte H und P angreifen, welche eine Resultante haben, deren Richtung nothwendig in die Verlängerung von CB, BM fällt. Denn wir setzten ja voraus, dass im Systeme Gleichgewicht vorhanden ist, und wird dieses nicht gestört, wenn wir C fixieren. Dann sieht man aber, dass die Richtung der Resultante von H und P in die Verlängerung von CB fallen muss. Diese Resultante BM ist das Maß der Spannung des Seilstückes BC, und muss dieses in C von einer gleichen und der Resultante BM direct entgegengesetzten Kraft nach der Richtung BC gezogen werden.

Diese Kraft BM können wir uns auf ihrer Richtung nach C versetzt denken, so dass an C die Kräfte $BM + P' = H + P + P'$ wirken, welche eine Resultante ergeben, aus früheren Gründen, gerichtet nach der Verlängerung DC, nach CN, und diese ist das Maß der Spannung des Seilstückes CD.

In derselben Weise versetzen wir CN nach D, an welchem Punkte demnach die Kräfte $H + P + P' + P''$ wirken, die eine Resultante nach der Verlängerung von ED, also nach DO haben. Diese versetzen wir nach E, so dass an E die parallel zu sich selbst transportierten Kräfte $H + P + P' + P'' + P'''$ wirken, die eine Resultante nach der Verlängerung von FE, EQ haben.

Indem nun im Systeme Gleichgewicht vorhanden ist, muss diese Resultante der Kräfte $H + P + P' + P'' + P'''$ auf der Richtung des Seilstückes FE gleich und entgegengesetzt der Kraft K sein, und dann ist die Resultante aller Kräfte gleich Null. Die Resultante der Kräfte $H + P + P' + P'' + P'''$ oder die Kraft K ist das Maß der Spannung des Seilstückes FE.

§ 251. Man könnte in derselben Weise vorgehen, von K beginnend, alle Kräfte parallel zu sich selbst nach B verschieben und man würde zum Resultate gelangen, dass die letzte Kraft H gleich und direct entgegengesetzt ist der Resultante aller andern Kräfte.

Überhaupt machen sich, im Falle am Polygone Gleichgewicht vorhanden ist, alle am Seilpolygone direct angreifende, parallel zu sich selbst an welchen Punkt immer überführte Kräfte Gleichgewicht an diesem Punkte und die Spannung eines jeden Seiles hat zum Maße die Resultante aller Kräfte, die an einer Seite des Seilstückes angreifen.

§ 252. Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, sind nämlich die Kräfte so, dass sie, parallel zu sich selbst an irgend welchen Punkt überführt, sich Gleichgewicht machen, so kann immer dem Polygone, dessen Seiten gegeben sind, eine solche Figur ertheilt werden, dass die ihrer Richtung und Größe nach gegebenen Kräfte sich Gleichgewicht machen, also das Polygon unter dem Einflusse dieser Kräfte im Gleichgewichte verbleibe.

Stellen wir nämlich die erste Seite AB in der Richtung der Kraft H, die zweite Seite BC richten wir nach der Verlängerung der Resultante BM der beiden Kräfte H und P, CD nach der Verlängerung der Resultante von $H + P + P'$, welche Kräfte parallel zu sich selbst nach C überführt wurden, und in dieser Weise weiter. Dann ist es klar, dass die Spitzen B, C, D, E unter dem Einflusse von H, P, P', P'', P''', K im Gleichgewichte verbleiben, und jeder der Punkt des Polygons im Gleichgewichte sein muss.

§ 253. Betrachte man ferner: Am Punkte B wirken drei Kräfte, H, P und eine dritte Kraft, herrührend von der Seitenverbindung mit C. Daraus sieht man, da jeder der Punkte im Gleichgewichte sein muss, dass alle drei Kräfte in einer und derselben Ebene enthalten sein müssen. Ferner muss jede Kraft dem Sinus des Winkels zwischen beiden Kräften proportional sein, daher

$$H : P = \sin PBC : \sin HBC.$$

§ 254. Beziehen wir ferner alle Kräfte auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, bezeichnen die Winkel, welche die Kraft H mit den Achsen einschließt, mit a, b, c , die Winkel der Kraft K mit den Achsen mit d, e, f , die Winkel der Kräfte mit $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \dots$, so sind, da die Kräfte parallel zu sich selbst nach einem einzigen Punkte verschoben sich Gleichgewicht machen, drei Gleichgewichtsbedingungen nothwendig und hinreichend, und man wird haben

$$1. \quad \begin{cases} H \cos a + K \cos d + \Sigma P \cos \alpha = 0 \\ H \cos b + K \cos e + \Sigma P \cos \beta = 0 \\ H \cos c + K \cos f + \Sigma P \cos \gamma = 0 \end{cases}$$

Sind statt der Kräfte H und K die beiden Punkte A und F fixiert und kennt man die Kräfte $P, P', P'' \dots$, so kann man die Drucke bestimmen, die A und F erleiden, welche gleich und entgegengesetzt sind den respectiven Kräften H und K , deren Werte wir bereits bestimmt haben.

Kennt man die Figur des Polygons, so kennt man die Richtungen der Drucke, nämlich deren Winkel mit den Achsen a, b, c, d, e, f , und wird

$$H : P = \sin PBC : \sin HBC$$

und ebenso

$$K : P''' = \sin DEP''' : \sin KED.$$

Kennt man nicht die Figur des Polygons, so hat man zur Bestimmung der acht Größen H, K, a, b, c, d, e, f obige drei Gleichungen 1, dann zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c &= 1 \\ \cos^2 d + \cos^2 e + \cos^2 f &= 1. \end{aligned}$$

Drei andere Gleichungen wird man haben durch die Ausdrücke, dass die Differenzen der Coordinaten vom selben Namen der Punkte A und F bezüglich jeder Achse gleich ist der Projection des Polygons auf diese Achse.

Verbindungen durch Ringe.

§ 255. Ist an einer Spitze B statt eines Knotens ein Ring angebracht, durch welchen das Seilstück ABC passieren kann, alsdann muss H gleich sein der an B nach BC wirkenden Kraft, und P wird den Winkel ABC in zwei gleiche Hälften theilen. Es kann also die Richtung der Kraft PB nicht willkürlich von vornherein bestimmt werden. Sind an allen Punkten Ringe angebracht, werden die Spannungen aller einzelnen Seilstücke einander gleich, und H

gleich K sein. Die Werte der Kräfte bekommen dann die Ausdrücke

$$P = 2H \cos \frac{1}{2} ABC, \quad P' = 2H \cos \frac{1}{2} \cos BCD.$$

Kennt man die Figur des Polygons, so wird man auch Größe und Richtung der Kräfte kennen, die man an jeder Spitze anbringen muss, damit das System im Gleichgewichte ist. Diese Kräfte, im entgegengesetzten Sinne genommen, werden auch die Drucke vorstellen, welche die Spitzen erleiden würden, wenn sie fixiert sein und das Seil $ABC \dots F$ durch sie passieren würden.

§ 256. In dem Falle, wenn die äußersten Seilstücke AB , FE sich scheiden, also in einer und derselben Ebene liegen, werden sie eine Resultante haben. Setzen wir nun voraus, dass diese Seilstücke sich in s schneiden, und sei R eine der Resultante von H und K gleiche und entgegengesetzte Kraft.

Da wir hatten

$$H + P + P' + P'' + P''' + K = 0,$$

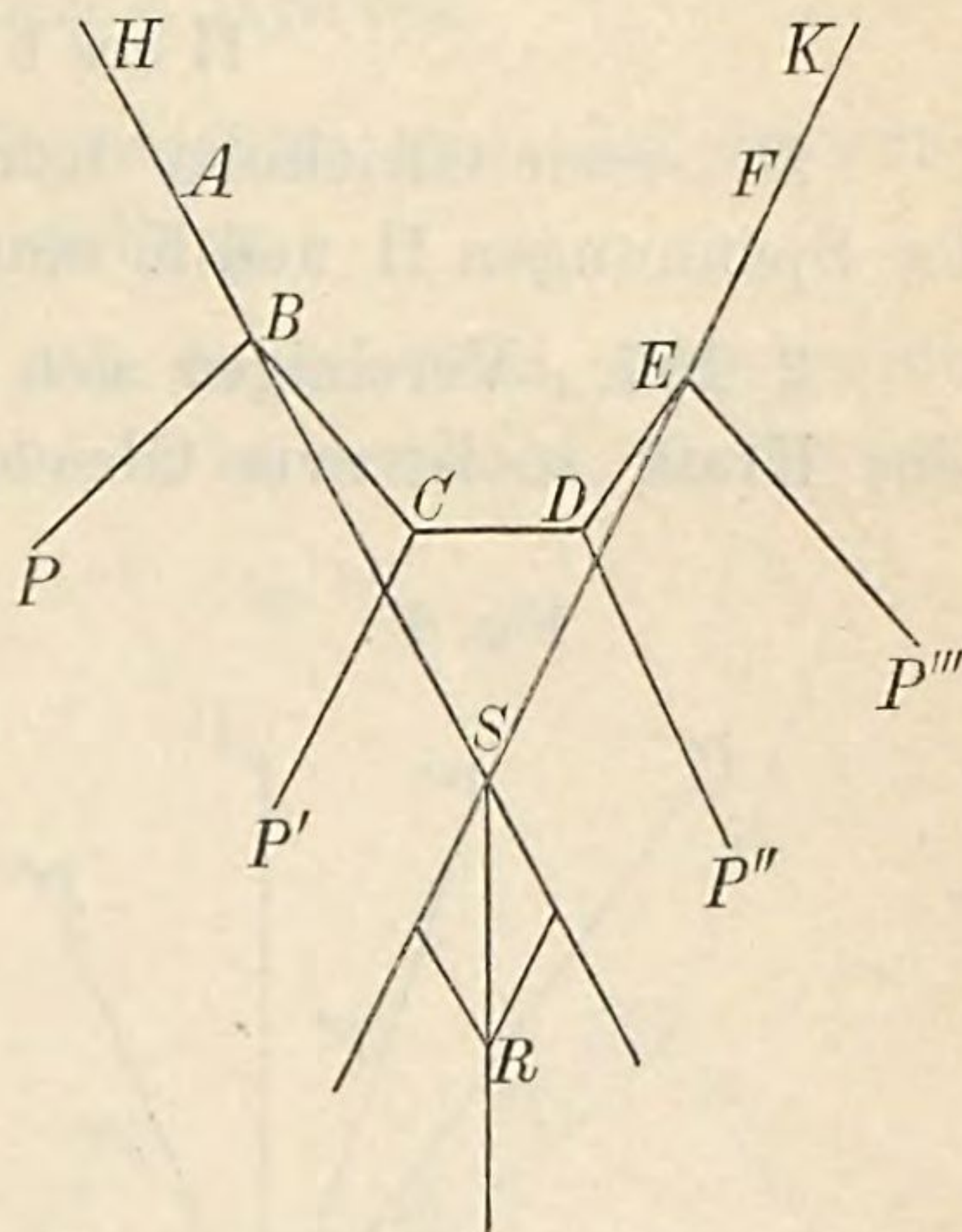
so ist

$$H + K = R = P + P' + P'' + P'''.$$

Um also die Spannungen der äußersten Seile des sich im Gleichgewichte befindenden Polygons, dessen beide Endpunkte fixiert sind, zu erhalten, genügt es, alle gegebenen Kräfte an diesem Schnittpunkt s zu versetzen, und daselbst diese Kräfte nach den beiden Richtungen HB , KE zu decomponieren. Jede dieser beiden Componenten ist das Maß der Spannung des entsprechenden äußersten Seiles, und zugleich des Druckes auf den fixierten Punkt, an welchem dieses Seil befestigt ist.

Sind die Kräfte Gewichte, also deren Richtungen parallel und vertical, dann ist das ganze Polygon in einer und derselben Vertical-ebene enthalten, da kein Grund vorhanden, weshalb es sich aus dieser Ebene mehr nach der einen, als nach der anderen Seite entfernen sollte. Um nun auszudrücken, dass die Kräfte, versetzt an

Fig. 66.



einen Punkt, sich Gleichgewicht machen, braucht man nur zwei Gleichungen.

Nimmt man nämlich zwei Achsen in der Verticalebene, die eine vertical, die andere horizontal, und sind die Winkel, welche die äußersten Seile mit den Achsen bilden, a, b, d, e , so hat man als Gleichungen des Gleichgewichtes

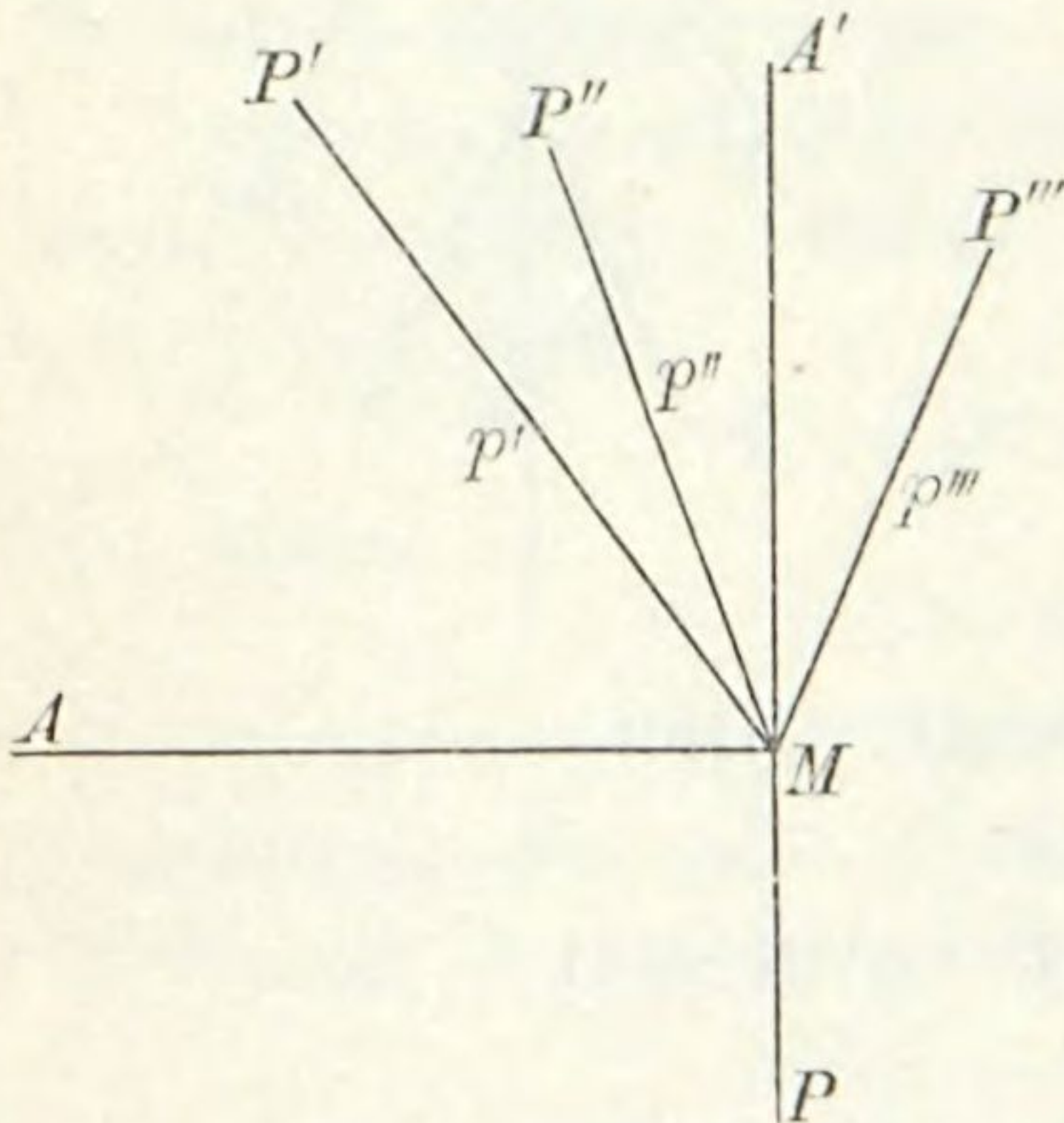
$$H \cos a + K \cos d = 0$$

$$H \cos b + K \cos e + \Sigma P = 0.$$

Die erste Gleichung drückt aus, dass horizontale Componenten der Spannungen H und K einander gleich und entgegengesetzt sind.

§ 257. Vereinigen sich mehrere Seile, jedes sollicitiert durch eine Kraft, so ist zum Gleichgewichte nothwendig, dass jede unter diesen Kräften gleich und direct entgegengesetzt ist der Resultante aller anderen Kräfte.

Fig. 67.



Fixiert man auf jedem Seile, mit Ausnahme eines einzigen MP, einen Punkt, so kann man nach den Größen der Drucke fragen, welche jeder einzelne fixierte Punkt von der Kraft MP erleidet.

Sind bloß drei Seile vorhanden, welche nicht in derselben Ebene liegen und worauf Punkte fixiert wurden, alsdann kann man die Kraft P nach den Seilen decomponieren und jeden

Druck kennen. Man verlängert nämlich die Gerade MP , nimmt auf der Verlängerung eine Strecke MA' , welche die Intensität der Kraft P vorstellt, und construiert das Parallelepiped, welches MA' zur Diagonale, und Mp' , Mp'' , Mp''' , welche mit den Richtungen der drei Seile MP' , MP'' , MP''' zusammenfallen, als anstoßende Seiten hat, so werden, da die Kraft P durch AA' vorgestellt ist, Mp' , Mp'' , Mp''' die Componenten der Kraft P nach den Richtungen MP' , MP'' , MP''' darstellen, und drücken die Spannungen der Seile aus, welche also bestimmt sind.

Sind aber mehr als drei Seile vorhanden, dann ist das Problem unbestimmt, wenn man die Seile als unausdehnbar annimmt, da man die Kraft P dann auf unendlich viele verschiedene Arten in Componenten nach den Richtungen der Seile zerlegen kann.

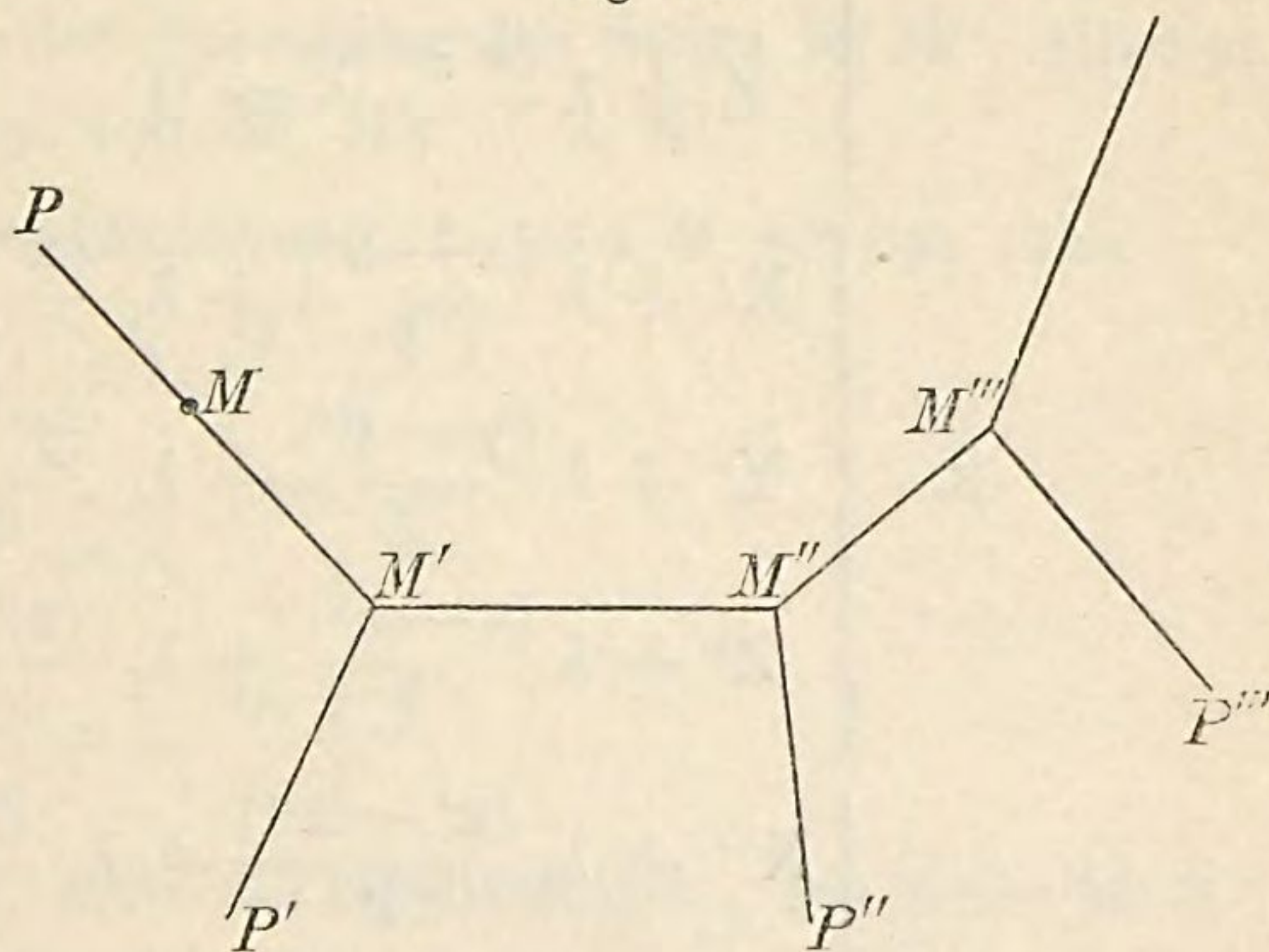
Eine solche Unbestimmtheit haben wir bereits bei Stützung eines Körpers auf einer Ebene gesehen. In der Natur ist alles bestimmt. Dort gibt der Körper mehr oder weniger dem Drucke nach, wird mehr oder weniger zusammengedrückt, hier wird jedes Seil mehr oder weniger gedehnt.

Vierunddreißigstes Capitel.

Herleitung der Bedingungen des Gleichgewichtes eines Seilpolygons aus der Generalgleichung.

§ 258. Die Punkte $M, M', M'' \dots n$ an der Zahl, seien durch biegsame, aber unausdehnbare Seile, $(n-1)$ in der Zahl, verbunden, und wirken an den Punkten die Kräfte $P, P', P'' \dots$, deren Componenten nach den Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems $X, Y, Z, X' \dots$ sind. Die Coordinaten seien $x, y, z, x' \dots$, die Längen der Seile $M M', M' M'' \dots$ werden mit $l, l', l'' \dots$ bezeichnet.

Fig. 68.



Wir haben in dieser Weise $n-1$ Gleichungen, die wir mit $L, L_1, L_2 \dots$ bezeichnen.

$$L = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} - l = 0$$

$$L_1 = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2} - l' = 0$$

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$$

Differenziert man diese Gleichungen bezüglich aller darin vorkommenden Größen, indem die Größen $l, l', l'' \dots$ constant sind, so wird man haben, wenn man alle Glieder durch die respectiven $l, l', l'' \dots$ dividiert,

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{(x' - x)}{l} \delta x + \frac{(y' - y)}{l} \delta y + \frac{(z' - z)}{l} \delta z + \frac{(x - x')}{l} \delta x' + \\ & + \frac{(y - y')}{l} \delta y' + \frac{(z - z')}{l} \delta z' = 0. \end{aligned}$$

Bezüglich der anderen Seile werden wir $(n-2)$ analoge Gleichungen, zusammen $(n-1)$ Gleichungen haben, und dazu noch die Generalgleichung des Gleichgewichtes

$$\Sigma [X \delta x + Y \delta y + Z \delta z] = 0.$$

§ 259. Wendet man nun wie früher, im Zwecke der Elimination von Variationen, die Methode von Multipliatoren an, setzt die Coefficienten der Variationen, welche man eliminieren will, gleich Null, hierauf auch die Coefficienten der verbliebenen Variationen gleich Null, mit einem Worte, setzt man die Coefficienten aller δ gleich Null, so erhält man $3n$ Gleichungen (§ 237, 5).

$$\begin{aligned} 1. \quad & \left\{ \begin{aligned} X + \lambda \frac{(x' - x)}{l} &= 0 \text{ oder } X = \lambda \frac{(x - x')}{l} \\ Y + \lambda \frac{(y' - y)}{l} &= 0 \quad Y = \lambda \frac{(y - y')}{l} \\ Z + \lambda \frac{(z' - z)}{l} &= 0 \quad Z = \lambda \frac{(z - z')}{l} \end{aligned} \right. \\ 2. \quad & \left\{ \begin{aligned} X' + \lambda \frac{(x - x')}{l} + \lambda_1 \frac{(x'' - x')}{l'} &= 0 \\ Y' + \lambda \frac{(y - y')}{l} + \lambda_1 \frac{(y'' - y')}{l'} &= 0 \\ Z' + \lambda \frac{(z - z')}{l} + \lambda_1 \frac{(z'' - z')}{l'} &= 0 \end{aligned} \right. \\ 3. \quad & \left\{ \begin{aligned} X'' + \lambda_1 \frac{(x' - x'')}{l'} + \lambda_2 \frac{(x''' - x'')}{l''} &= 0 \\ Y'' + \lambda_1 \frac{(y' - y'')}{l'} + \lambda_2 \frac{(y''' - y'')}{l''} &= 0 \\ Z'' + \lambda_1 \frac{(z' - z'')}{l'} + \lambda_2 \frac{(z''' - z'')}{l''} &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen die $n-1$ Multipliatoren, so wird man $3n - (n-1) = 2n + 1$ Bedingungen des Gleichgewichtes haben. Die Gleichungen $L = 0, L_1 = 0 \dots$ betragen $(n-1)$. Wir werden also zusammen $3n$ Gleichungen haben, welche zur Bestimmung der $3n$ Coordinaten und der Gestalt des Polygons dienen.

§ 260. Die Größen $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \dots$ sind nicht anders als die Spannungen der Seile.

Die drei ersten Gleichungen 1. zeigen, dass die Spannung λ am Seile MM' von M nach M' wirkt, ihre Componenten nach den Achsen sind in diesen Gleichungen bestimmt.

Denn $\frac{x'-x}{l}, \frac{y'-y}{l}, \frac{z'-z}{l}$ sind die Cosinus der Winkel, welche die Kraft λ mit den Achsen bildet, und die Producte $\lambda \frac{x'-x}{l} \dots$ sind die Componenten von λ parallel nach den Achsen, wirkend von M nach M'. Die Spannung λ und die Kraft P heben sich also auf, mithin ist λ das Maß der Spannung von MM'. Die Kraft P fällt demnach in die Verlängerung, wenn das Polygon im Gleichgewichte ist.

Die Gleichungen 2. enthalten nebst den Componenten von P auch die Componenten einer der Kraft λ gleichen und direct entgegengesetzten Kraft, wirkend an M' und gerichtet von M' nach M, und überdies noch den Componenten einer zweiten Kraft λ_1 gerichtet nach M' M'' von M' nach M''. Diese drei Kräfte machen sich Gleichgewicht, also ist λ_1 das Maß der Spannung des Seiles M' M''. Ebenso ist λ_2 das Maß der Spannung von M'' M''' u. s. w.

§ 261. Addiert man die Gleichung 1. und 2. so hat man

$$X + X' = \lambda_1 \frac{(x'-x'')}{l'}$$

$$Y + Y' = \lambda_1 \frac{(y'-y'')}{l'}$$

$$Z + Z' = \lambda_1 \frac{(z'-z'')}{l'}$$

Daraus ersieht man aber, dass die Spannung λ_1 , am Seile M' M'' wirkend, und die Kräfte P P' sich Gleichgewicht machen, mithin ist eine der λ_1 , welche die Spannung des Seiles M' M'' misst, gleiche und direct entgegengesetzte Kraft die Resultante der Kräfte P und P'.

Setzt man die Gleichungen 1., 2. und 3. zusammen, so wird man sich überzeugen, dass die Spannung λ_2 des Seiles M'' M''', von M'' nach M''' gerichtet, gleich und direct entgegengesetzt ist der Resultante der parallel nach M'' verschobenen Kräfte P, P' und der Kraft P'' ist.

Wären alle Tensionskräfte λ, λ_1 und λ_2 nicht positiv, so könnte kein Gleichgewicht stattfinden. Denn würde eine Spannung wie λ_1 negativ sein, so würden zwei Punkte M', M'' durch zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte gezogen sein, welche sie einander zu nähern anstreben, und das Gleichgewicht könnte in diesem Falle nur dann stattfinden, wenn die Seile durch starre Linien ersetzt wären.

Aus diesen beim Seilpolygon aufgestellten Bedingungen ersieht man, dass das Princip der virtuellen Deplacierungen nicht bloß bei

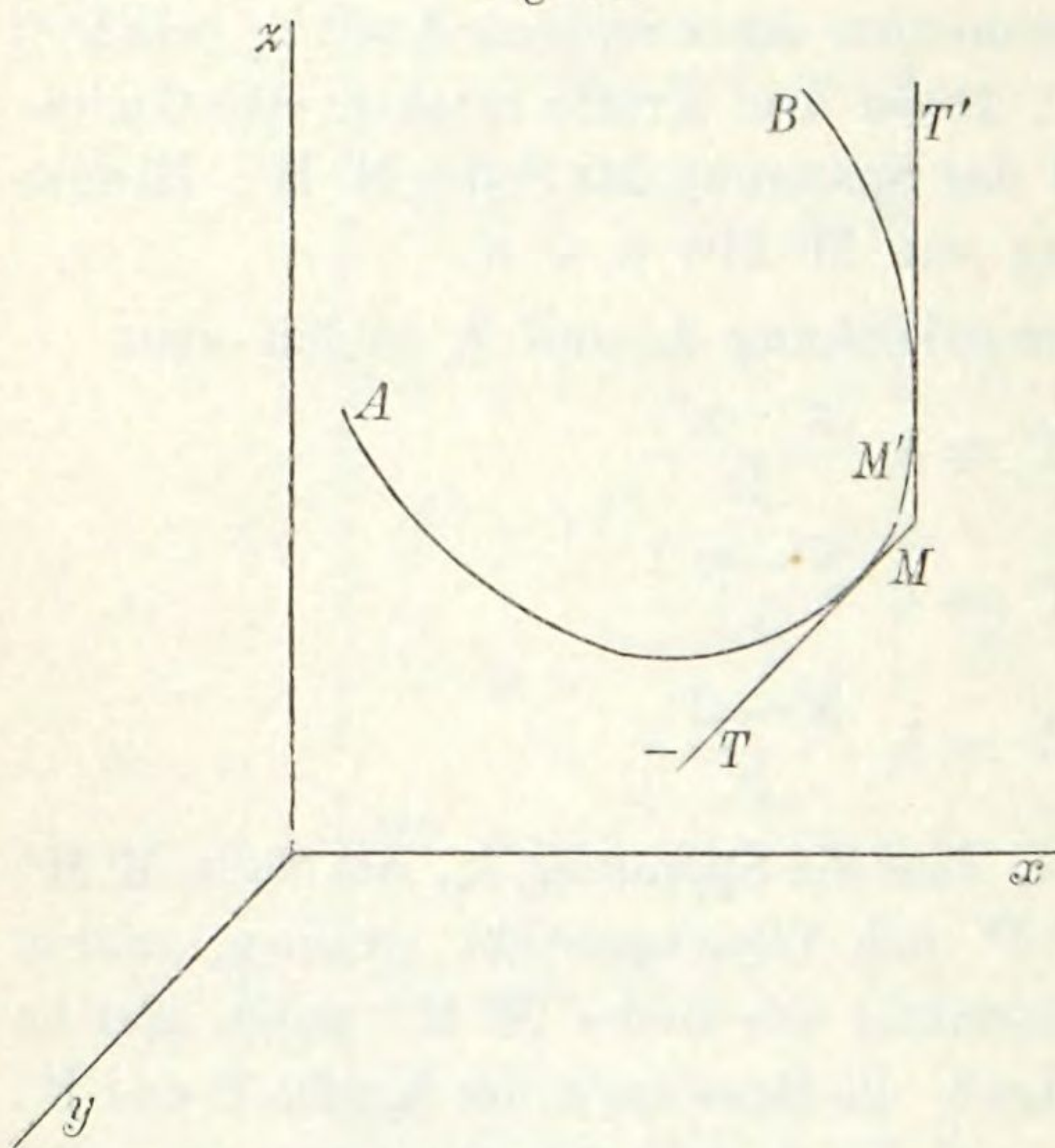
einem starren Körper, solcher möge frei oder Bedingungen unterworfen sein, sondern auch für ein System von Punkten Geltung hat, welche durch biegsame und unausdehnbare Fäden miteinander verbunden sind, unter der Voraussetzung jedoch, dass die Fäden gerade und gespannt bleiben.

Fünfunddreißigstes Capitel.

Gleichgewicht eines biegsamen Fadens.

§ 262. A M B stelle einen biegsamen und unausdehnbaren Faden, Seilcurve genannt, vor, von sehr kleiner Dicke, dessen Endpunkte A und B fixiert seien. Sämmtliche Punkte dieser Seilcurve seien

Fig. 69.



von sehr kleinen Kräften sollicitiert, die an derselben im Gleichgewichte sind.

Man hat die Gestalt des Fadens und die Spannung an jedem Punkte in der Gleichgewichtslage zu bestimmen.

Wir beziehen die Kräfte auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, ein Bogenelement M M' sei mit ds bezeichnet. Sei ferner ε die Masse der Einheit der Länge des Fadens, und können wir ε, x, y, z im ganzen Elemente ds als

constant annehmen. Die auf die Masseinheit wirkende Kraft wollen wir P , deren Componenten X, Y, Z nennen. Das Fadenelement ds der Curve A M B von der Länge s , also der unendlich kleine Bogen M M', dessen Masse demnach durch εds vorgestellt ist, wird dann von einer Kraft afficiert, deren Componenten nach den Achsen

$$X\varepsilon ds, Y\varepsilon ds, Z\varepsilon ds$$

sind. Dabei nehmen wir an, dass die Curve A M B von A nach B gerichtet ist, das ist der Bogen s wird von A aus gezählt.

§ 263. Nebstdem werden die beiden Enden des Fadenelementes von zwei, nach den Tangenten an diesen Endpunkten, in entgegengesetztem Sinne gerichteten Spannungen sollicitiert. Wir wollen diese Spannungen, welche daher stammen, dass das Bogenelement

mit anderen nachbarlichen Elementen dieser Curve an beiden Enden verbunden ist, mit T und T' bezeichnen. Die Spannung T im Punkte x, y, z ändert sich continuierlich mit diesem Punkte, ist eine continuierliche Function der Coordinaten x, y, z . Die Cosinus der Winkel, welche die Tangenten mit den Achsen einschließt, sind $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, sind also ebenfalls eine Function der Coordinaten.

Wirkt ferner die Spannung T an einem Punkte des Fadenelementes x, y, z , so wirkt T' am Punkte des anderen Endes $x + dx, y + dy, z + dz$, und hat die eine Spannung die Größe T , so wird die andere, Ende von ds wirkende Spannung gleich sein $T + dT$.

Die Componenten der am Punkte x, y, z sollicitierenden Spannung T nach den Achsen sind also

$$T \frac{dx}{ds}, \quad T \frac{dy}{ds}, \quad T \frac{dz}{ds}.$$

Die Componenten der am Punkte $x + dx, y + dy, z + dz$ in entgegengesetzter Richtung angreifenden Spannung $T' = T + dt$, nach den Achsen sind

$$T \frac{dx}{ds} + d\left(T \frac{dx}{ds}\right), \quad T \frac{dy}{ds} + d\left(T \frac{dy}{ds}\right), \quad T \frac{dz}{ds} + d\left(T \frac{dz}{ds}\right).$$

Dabei werden die Componenten von T und die von T' das entgegengesetzte Zeichen haben. Letztere, mit der Richtung der Curve übereinstimmend, betrachten wir als positiv.

§ 264. Betrachten wir das Bogenelement MM' , an welchem nebst den Kräften die Spannungen T, T' nach den Richtungen $MT, M'T'$ wirken. Ist nun Gleichgewicht in der Curve, so wird auch das Bogenelement unter dem Einflusse aller Kräfte und der Spannungen von T und T' sich im Gleichgewichte befinden. Liegt die Curve in einer Ebene, so müssen sich die beiden Tangenten schneiden. Aber selbst, wenn die Curve doppelt gekrümmt ist, können sie als sich schneidend betrachtet werden, weil ihre kürzeste Distanz im Vergleiche zu ds als unendlich kleine Größe zweiter Ordnung angesehen werden muss.

Die beiden Spannungen haben demnach eine Resultante und daher müssen auch alle zwischen den Punkten MM' wirkenden Kräfte eine Resultante haben, welche der Resultante der beiden Spannungen gleich und direct entgegengesetzt ist, und in der Krümmungsebene der Curve liegt.

Wie wir ferner erwähnt, werden wir die Spannung T , die nach der Richtung MT wirkt, also in der Richtung $M'M$, entgegengesetzt dem

Laufe der Curve, als negativ betrachten, und werden deren Componenten nach den Achsen negativ sein.

$$- T \frac{dx}{ds}, - T \frac{dy}{ds}, - T \frac{dz}{ds}.$$

Die Componenten von T' nach den Achsen betrachten wir als positiv, und die sind:

$$T \frac{dx}{ds} + d \left(T \frac{dx}{ds} \right), T \frac{dy}{ds} + d \left(T \frac{dy}{ds} \right), T \frac{dz}{ds} + d \left(T \frac{dz}{ds} \right).$$

Die Bedingungen des Gleichgewichtes sind also dieselben wie für Kräfte, die an einem Punkte wirken, d. h. die Summe der Componenten der Kräfte und Spannungen parallel nach jeder Achse müssen gleich Null sein. Die in jeder Summe der Componenten vorkommenden Größen $T \frac{dx}{ds}, -T \frac{dx}{ds}, T \frac{dy}{ds}, -T \frac{dy}{ds}, T \frac{dz}{ds}, -T \frac{dz}{ds}$ heben sich auf, und wir erhalten folgende Gleichungen:

$$1. \quad \begin{cases} d \left(T \frac{dx}{ds} \right) + X \varepsilon ds = 0 \\ d \left(T \frac{dy}{ds} \right) + Y \varepsilon ds = 0 \\ d \left(T \frac{dz}{ds} \right) + Z \varepsilon ds = 0. \end{cases}$$

Diesen Gleichungen kann man auch eine andere Form geben, und zwar:

$$2. \quad \begin{cases} X \varepsilon + T \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dT}{ds} \frac{dx}{ds} = 0 \\ Y \varepsilon + T \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dT}{ds} \frac{dy}{ds} = 0 \\ Z \varepsilon + T \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{dT}{ds} \frac{dz}{ds} = 0. \end{cases}$$

§ 265. Diese Gleichungen sind die nothwendigen und hinreichenden, um daraus die Bedingungen des Gleichgewichtes herzuleiten.

Multipliziert man die erste der Gleichung 2. mit dx , die zweite mit dy , die dritte mit dz , addiert dieselben und beachtet die Relation

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1,$$

aus welcher

$$\frac{dx}{ds} d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \frac{dy}{ds} d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \frac{dz}{ds} d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

folgt, so hat man

$$3. \quad \begin{cases} \varepsilon [Xdx + Ydy + Zdz] + \frac{dT}{ds} ds = 0 \\ \frac{dT}{ds} ds = -\varepsilon [Xdx + Ydy + Zdz]. \end{cases}$$

Man hat also die Spannung ausgedrückt in einer Function der Componenten der Kraft, welche an dem betreffenden Punkte wirkt.

§ 266. Um die durch den Faden gebildete Curve zu erlangen, wird man die Gleichungen 1. integrieren, woraus sich ergibt

$$4. \quad \begin{cases} -T \frac{dx}{ds} = \int X\varepsilon ds + a \\ -T \frac{dy}{ds} = \int Y\varepsilon ds + b \\ -T \frac{dz}{ds} = \int Z\varepsilon ds + c. \end{cases}$$

Eliminiert man daraus T, so kommt

$$5. \quad \frac{dx}{\int X\varepsilon ds + a} = \frac{dy}{\int Y\varepsilon ds + b} = \frac{dz}{\int Z\varepsilon ds + c}.$$

Ist Dichte und Dicke des Fadens constant in der ganzen Länge des Fadens, und nehmen wir weiter an, dass $\varepsilon (Xdx + Ydy + Zdz)$ das exacte Differenzial einer Function $\varphi(x, y, z)$ sei, alsdann hat man

$$T = -\varphi(x, y, z) + \text{const.}$$

und kennt man die Spannung T_0 für einen bestimmten Punkt x_0, y_0, z_0 , so ergibt sich aus 3.

$$T - T_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0) - \varphi(x, y, z).$$

T wird also in diesem Falle nur von $\varphi(x, y, z)$ abhängen, aus der Spannung für einen Punkt erhält man die Spannungen in jedem anderen Punkte, ausgedrückt durch dessen Coordinaten.

Kennt man T, so verhelfen uns die Gleichungen 1. oder 5. die Gestalt der Curve zu kennen.

§ 267. Stehen die Kräfte in allen Punkten des Fadens normal zur Curve, so wird

$$6. \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Denn dividirt man diese Producte durch Pds , so stellt der Ausdruck

$$\frac{Xd x}{Pds} + \frac{Ydy}{Pds} + \frac{Zdz}{Pds}$$

den Cosinus des Winkels vor, den die Kraft mit der Tangente an diesem Punkte bildet, und da die Kraft normal zur Curve in allen Punkten steht, wird dieser Cosinus in allen Punkten gleich Null sein, folglich wird auch $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ sein in der ganzen Ausdehnung der Curve.

In diesem Falle ergibt sich also aus 3.

$$dT = 0, T = c.$$

Die Spannung ist also in einem solchen Falle in der ganzen Ausdehnung des Fadens constant.

§ 268. Den Gleichungen 1. kann man eine andere Form geben, wenn man beachtet, dass $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel sind, welche die Tangente mit den Achsen einschließt, und die wir mit $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ bezeichnen, und wenn wir ferner den Krümmungshalbmesser der Curve mit ρ und dessen Winkel mit den Achsen mit λ, μ, ν bezeichnen, indem man bekanntlich hat

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{ds \cos \lambda}{\rho}, \quad d\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{ds \cos \mu}{\rho}, \quad d\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{ds \cos \nu}{\rho}.$$

Führen wir nun die Differenzierungen der Gleichungen 1. aus, und setzen darin die hier angegebenen Werte ein, so hat man

$$7. \quad \begin{cases} dT \cos \alpha + T \frac{ds \cos \lambda}{\rho} + X \varepsilon ds = 0 \\ dT \cos \beta + T \frac{ds \cos \mu}{\rho} + Y \varepsilon ds = 0 \\ dT \cos \gamma + T \frac{ds \cos \nu}{\rho} + Z \varepsilon ds = 0. \end{cases}$$

§ 269. Für den Fall, wenn die Kraft normal zur Curve steht, wo also die Gleichung 6. stattfindet, und mithin T constant ist, werden diese Gleichungen 7.

$$8. \quad \begin{cases} \frac{T}{\rho} \cos \lambda = -X \varepsilon \\ \frac{T}{\rho} \cos \mu = -Y \varepsilon \\ \frac{T}{\rho} \cos \nu = -Z \varepsilon. \end{cases}$$

Erhebt man diese Gleichungen zum Quadrate und addiert dieselben, so hat man

$$9. \quad \begin{cases} \frac{T^2}{\rho^2} = \varepsilon^2 [X^2 + Y^2 + Z^2] \\ \frac{T}{\rho \varepsilon} = P, \quad \rho = \frac{T}{P \varepsilon} \end{cases}$$

welche Gleichungen folgenden Satz geben:

Im Falle die Kraft normal zur Curve steht, die Spannung mithin in der ganzen Länge der Curve constant ist, erhält der Faden stets eine solche Gestalt, dass die Kraft umgekehrt proportional ist dem Krümmungshalbmesser.

Sind demnach die normalen Kräfte gleich und liegen sie in einer Ebene, so ist die Seilcurve ein Kreis.

§ 270. Nennt man die Winkel, welche die Kraft P mit den Achsen bildet, λ' , μ' , ν' , so hat man, wenn man die zweite der Gleichung 9. einmal mit $\cos \lambda'$, dann mit $\cos \mu'$ und schließlich mit $\cos \nu'$ multipliciert,

$$10. \quad \begin{cases} X = P \cos \lambda' = \frac{T \cos \lambda'}{\rho \varepsilon} \\ Y = P \cos \mu' = \frac{T \cos \mu'}{\rho \varepsilon} \\ Z = P \cos \nu' = \frac{T \cos \nu'}{\rho \varepsilon} \end{cases}$$

Substituiert man diese Werte für X , Y , Z in den Gleichungen 8. so ergibt sich

$$\cos \lambda' = -\cos \lambda, \quad \cos \mu' = -\cos \mu, \quad \cos \nu' = -\cos \nu.$$

Die Kraft ist also nach der Verlängerung des Krümmungshalbmessers des Fadens am betreffenden Punkte gerichtet.

Wir haben ferner gesehen, dass die Richtung der Kraft P immer in der Krümmungsebene der Curve liegt (§ 264), und ist die Kraft normal, so ist sie, wie wir eben gesehen, nach der Verlängerung des Krümmungshalbmessers gerichtet. Rührt nun die normale Kraft aus dem Widerstande einer krummen Fläche her, so steht die Krümmungsebene der Curve in jedem Punkte senkrecht auf jener Fläche, und dann ist die krumme Linie zwischen zwei Punkten der Fläche eine geodesische Linie.

§ 271. Dieser Fall tritt ein, wenn ein Faden auf einer Fläche $\varphi(x, y, z)$ gespannt ist durch zwei Kräfte, welche ihn an beiden

Enden ziehen und der Faden sich im Gleichgewichte befindet. Die Kraft P ist in diesem Falle normal zur Fläche, und daher zu der durch den Faden beschriebenen Curve. Denn die Kraft, welche den Faden sollicitiert, ist die Reaction der Fläche, welche in den verschiedenen Punkten normal zur Fläche und zum Faden steht. Die Spannung ist mithin in allen Punkten des Fadens constant, folglich müssen auch die beiden Kräfte einander und der Spannung des Fadens gleich sein. Nebstdem ist die Krümmungsebene des Fadens in jedem Punkte normal auf der Fläche, folglich beschreibt der Faden auf der Fläche die kürzeste Linie.

§ 272. Dieses Resultat, für den Fall nämlich, wenn der Faden auf einer Fläche $\varphi(x, y, z)$ gespannt ist, wodann also in jedem Punkte die Krümmungsebene der Curve und auch die darin immer liegende Kraft P senkrecht auf der Fläche stehen, erscheint auch durch die Rechnung bestätigt.

Die Differenzialgleichungen 2. werden nämlich für diesen Fall, wo T in der ganzen Ausdehnung der Curve constant ist

$$11. \quad \begin{cases} X\varepsilon + T \frac{d^2 x}{ds^2} = 0 \\ Y\varepsilon + T \frac{d^2 y}{ds^2} = 0 \\ Z\varepsilon + T \frac{d^2 z}{ds^2} = 0. \end{cases}$$

Eliminiert man daraus T , so kommt

$$12. \quad \frac{\frac{d^2 x}{ds^2}}{X} = \frac{\frac{d^2 y}{ds^2}}{Y} = \frac{\frac{d^2 z}{ds^2}}{Z}.$$

Da die Kraft P normal zur Fläche steht, so sind die Componenten X, Y, Z proportional den Cosinus der Winkel, welche die Normale der Fläche mit den Achsen einschließt, also proportional den Größen

$$\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{d\varphi}{dz}.$$

Ersetzt man demnach in den Gleichungen 12. X, Y, Z durch $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$, so hat man

$$13. \quad \frac{\frac{d^2 x}{ds^2}}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{\frac{d^2 y}{ds^2}}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\frac{d^2 z}{ds^2}}{\frac{d\varphi}{dz}}.$$

§ 273. Die Integrierung dieser Gleichungen ist nicht leicht ausführbar, aber wo sie stattfinden, ist die betreffende Curve auf der Fläche eine geodesische Linie, das ist die Linie, bei welcher die Distanz zwei ihrer Punkte immer die möglichst kürzeste ist.

Nimmt man nämlich auf der Fläche zwei Punkte, deren Coordinaten x_0, y_0, z_0 und x, y, z , sind, so ist die Länge des Bogens, welcher zwischen beiden Punkten enthalten ist und welchen wir mit s bezeichnen,

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Variiert man diesen Ausdruck, so ist

14.

$$\delta s = \int \frac{dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \int \frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds}.$$

Integriert man durch Theile, so ist, wenn man bedenkt, dass die Größen, welche aus dem Zeichen $\int$ heraustreten an den Grenzen gleich Null sind, da $\delta x, \delta y, \delta z$ an den Grenzen gleich Null sind, so hat man

$$15. \quad \delta s = - \int \left[\delta x d \left(\frac{dx}{ds} \right) + \delta y d \left(\frac{dy}{ds} \right) + \delta z d \left(\frac{dz}{ds} \right) \right].$$

Für die Linie minima muss man haben:

$$16. \quad \delta x d \left(\frac{dx}{ds} \right) + \delta y d \left(\frac{dy}{ds} \right) + \delta z d \left(\frac{dz}{ds} \right) = 0,$$

welche man mit der Gleichung der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ verbinden muss.

Variiert man aber diese, so ergibt sich

$$17. \quad \frac{d\varphi}{dx} \delta x + \frac{d\varphi}{dy} \delta y + \frac{d\varphi}{dz} \delta z = 0.$$

Man muss jetzt eine der Größen $\delta x, \delta y, \delta z$ eliminieren und die Coefficienten der anderen Größen gleich Null setzen. Man kann aber von der Methode der Multiplicatoren Gebrauch machen.

Multipliziert man also die Gleichung 16. mit λ , vereinigt sie mit 17. und setzt alle Coefficienten von $\delta x, \delta y, \delta z$ gleich Null, so hat man

$$18. \quad \lambda d \left(\frac{dx}{ds} \right) + \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \lambda d \left(\frac{dy}{ds} \right) + \frac{d\varphi}{dy} = 0, \\ \lambda d \left(\frac{dz}{ds} \right) + \frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen λ , so kommt man auf die Gleichungen 13.

Diese Gleichungen 18. sind ganz identisch mit den Gleichungen 11., wenn man in diesen statt $X \varepsilon, Y \varepsilon, Z \varepsilon$ die Größen $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ und statt T die Größe λds einsetzt.

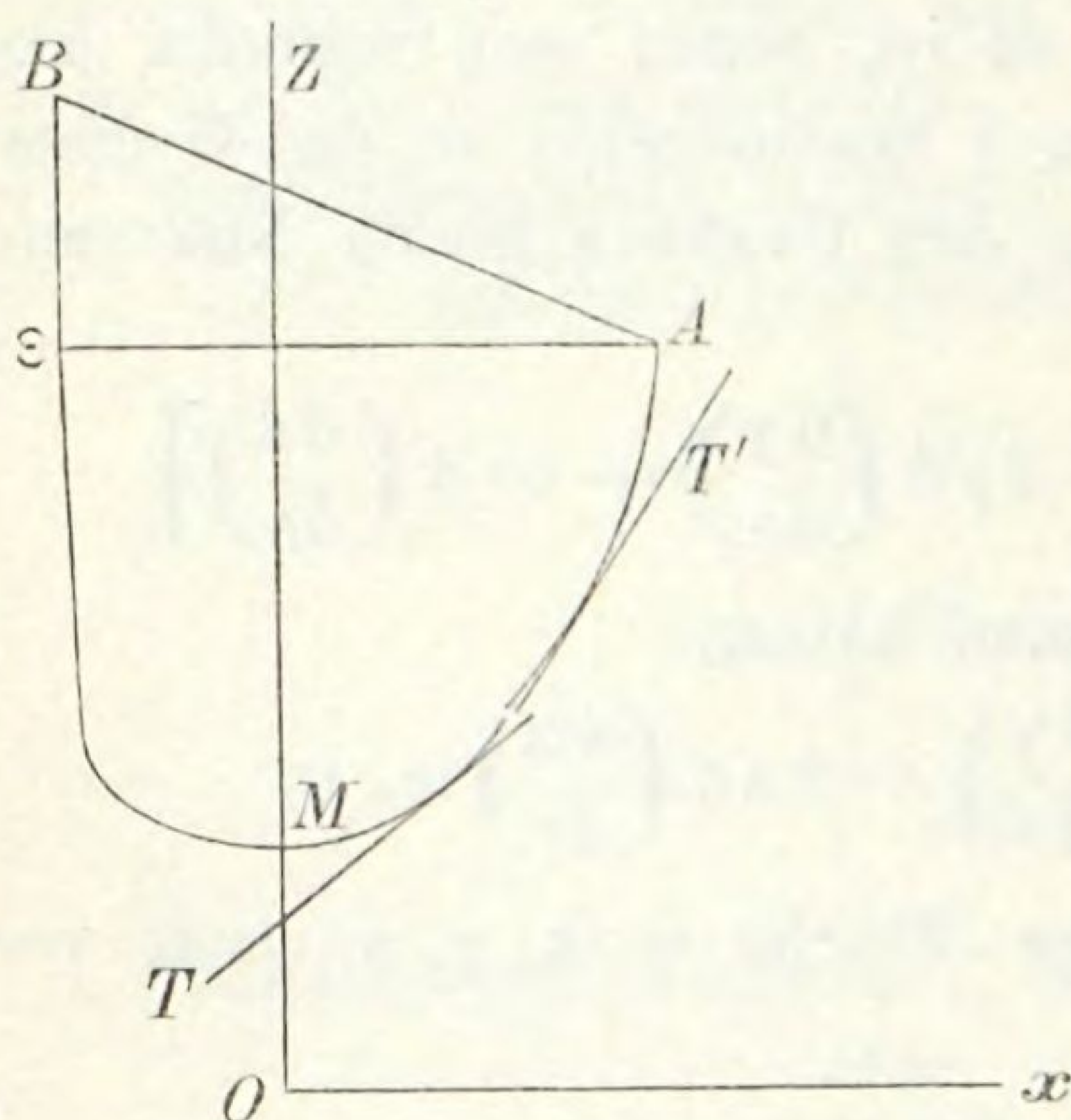
Die Integrationsconstanten erhält man, wenn man ausdrückt, dass die Curve durch die beiden Punkte x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 geht.

Sechsenddreißigstes Capitel.

Theorie der Kettenlinien.

§ 274. Ein homogener, vollkommen biegsamer und unausdehnbarer Faden, vertical attachiert an zwei fixen Punkten A und B, und nur von der Kraft der Schwere, sonst aber von keinen anderen Kräften sollicitiert, bildet eine Linie, die man Kettenlinie nennt.

Fig. 70.



Diese Kettenlinie A M B wird ganz in der verticalen, durch die beiden fixen Punkte A und B gehenden Ebene liegen: denn alle von der Schwere herrührenden Kräfte, die auf die einzelnen Punkte der Curve wirken, sind vertical und einander parallel und daher ist die Curve vertical und ganz in der Verticalebene liegend (§ 256).

Dieses lässt sich aber auch durch die Analysis beweisen.

Die Gleichungen 2. des vorigen Capitels sind:

$$1. \quad \begin{cases} X \varepsilon + T \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dT}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} = 0 \\ Y \varepsilon + T \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dT}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} = 0 \\ Z \varepsilon + T \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{dT}{ds} \cdot \frac{dz}{ds} = 0. \end{cases}$$

Da die Kräfte sämtlich vertical sind, so ist in diesen Gleichungen $X = 0, Y = 0, Z = -g$, wenn wir nämlich die Acceleration der Kraft der Schwere mit g bezeichnen und die Achse der Z im entgegengesetzten Sinne der Schwere richten.

Die Gleichungen 1. werden demnach für die Kettenlinie, indem man darin die eben angegebenen Werthe einsetzt.

$$2. \quad \begin{cases} T \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dT}{ds} \cdot \frac{dx}{ds} = 0 \\ T \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dT}{ds} \cdot \frac{dy}{ds} = 0 \\ T \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{dT}{ds} \cdot \frac{dz}{ds} = \varepsilon g. \end{cases}$$

§ 275. Die ersten beiden Gleichungen kann man sofort integrieren, und sie geben für die Spannungen:

$$3. \quad T \frac{dx}{ds} = a, \quad T \frac{dy}{ds} = b,$$

wo unter a und b die Constanten der Integration sind.

Aus diesen Gleichungen 3. folgt aber

$$4. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}.$$

$$y = \frac{b}{a} x + e,$$

wo e wiederum die Constante der Integration bedeutet.

Die Projection der Curve in der Ebene xy ist demnach eine gerade Linie, folglich ist die Curve vertical und eben.

Es genügen daher zur Bestimmung der Curve zwei Achsen. Wir wählen hiezu die der x und z , so dass die Curve in der Ebene der xz liegt, und ist die x -Achse horizontal, die z -Ache vertical im entgegengesetzten Sinne der Schwere gerichtet.

§ 276. Integriert man die dritte der Gleichungen 2., so hat man

$$5. \quad T \frac{dz}{ds} = g\varepsilon s + c,$$

wo c eine Integrationsconstante ist.

Man hat demnach für die Curve zwei Gleichungen

$$6. \quad \begin{cases} d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0 \\ d\left(T \frac{dz}{ds}\right) = g\varepsilon ds \end{cases}$$

oder

$$7. \quad \begin{cases} T \frac{dx}{ds} = a \\ T \frac{dz}{ds} = g\varepsilon s + c \end{cases}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen T, so hat man

$$8. \quad \frac{dz}{dx} = \frac{g\varepsilon s}{a} + \frac{c}{a}.$$

Differenziert man diese Gleichung in Bezug auf x, so hat man

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{g\varepsilon}{a} \frac{ds}{dx} = \frac{g\varepsilon}{a} \sqrt{\frac{dx^2 + dz^2}{dx^2}} = \frac{g\varepsilon}{a} \sqrt{1 + \frac{d^2z}{dx^2}}.$$

Setzen wir

$$9. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{g\varepsilon}{a} = h, \quad \frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dz} p, \end{array} \right.$$

so hat man

$$10. \quad \frac{d^2z}{dx^2} = p \cdot \frac{dp}{dz} = h (\sqrt{1 + p^2})$$

$$11. \quad \frac{p dp}{\sqrt{1 + p^2}} = h dz.$$

§ 277. Integriert man die Gleichungen 11., so kommt

$$12. \quad \sqrt{1 + p^2} = hz + f,$$

wo f die Integrationsconstante bedeutet.

Daraus hat man

$$13. \quad p = \sqrt{(hz + f)^2 - 1}, \quad \frac{dz}{dx} = \sqrt{(hz + f)^2 - 1}$$

$$14. \quad x = \int \frac{dz}{\sqrt{(hz + f)^2 - 1}}.$$

Das Integral ist, wenn man mit k eine Constante bezeichnet,

$$15. \quad x + k = \frac{1}{h} l[hz + f + \sqrt{(hz + f)^2 - 1}],$$

wo unter l der natürliche Logarithmus verstanden wird, und daraus

$$16. \quad e^{(x+k)h} = hz + f + \sqrt{(hz + f)^2 - 1}.$$

Multipliziert und dividiert man das rechte Glied dieser letzten Gleichung mit

$$hz + f - \sqrt{(hz + f)^2 - 1}$$

so hat man

$$17. \quad e^{(x+k)h} = \frac{1}{hz + f - \sqrt{(hz + f)^2 - 1}}$$

daher

$$18. \quad e^{-(x+k)h} = hz + f - \sqrt{(hz + f)^2 - 1}.$$

Addiert man die Gleichungen 16. und 18., so kommt

$$19. \quad 2(hz + f) = e^{(x+k)h} + e^{-(x+k)h}.$$

Lassen wir nun die Achsen durch einen Punkt ε passieren dessen horizontale Distanz von $A = m$ und dessen verticale Distanz von $B = n$ ist, so werden die Coordinaten des Punktes A $x = m$, $z = 0$, die des Punktes B $x = 0$, $z = n$ sein, und die Gleichung 19. wird für die beiden Punkte A und B sein

$$20. \quad \begin{cases} 2f = e^{(m+k)h} + e^{-(m+k)h} \\ 2(hn + f) = e^{kh} + e^{-kh} \end{cases}.$$

Differenziert man ferner die Gleichung 19., so hat man

$$21. \quad \frac{dz}{dx} = \frac{e^{(x+k)h} - e^{-(x+k)h}}{2}$$

$$22. \quad 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}[e^{2(x+k)h} + e^{-2(x+k)h} + 2]$$

$$23. \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}[e^{(x+k)h} + e^{-(x+k)h}].$$

Integriert man diese Gleichung von $x=0$ bis $x=m$, so kommt, wenn man die Länge des Fadens AMB mit L bezeichnet,

$$24. \quad L = \frac{1}{2h} [e^{(m+k)h} - e^{-(m+k)h} - e^{kh} + e^{-kh}].$$

Aus den Gleichungen 20. und 24. kann man f , k , h durch die gegebenen Stücke m , n und L berechnen.

§ 278. Setzt man in der Gleichung 19.

$$\begin{aligned} x + k &= x' \\ z + \frac{f}{h} &= z', \quad z = z' - \frac{f}{h}, \end{aligned}$$

und lässt dann die Zeichen weg, so werden die Coordinaten transformiert, und diese Gleichung hat dann nachstehende Form

$$25. \quad z = \frac{1}{2h} [e^{hx} + e^{-hx}].$$

Das ist die gesuchte Gleichung der Kettenlinie, deren Eigenschaften wir untersuchen wollen.

§ 279. Aus der Gleichung

$$z = \frac{1}{2h} (e^{hx} + e^{-hx})$$

folgt, wenn man differenziert

$$26. \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} (e^{hx} - e^{-hx}).$$

Man erkennt also, dass die Kettenlinie bezüglich der z -Achse symmetrisch liegt.

Setzt man in der Gleichung $x = 0$, so hat man

$$z = \frac{1}{h}.$$

Die Coordinaten des niedrigsten Punktes der Curve sind demnach $x = 0$, $z = \frac{1}{h}$.

Man sieht auch, dass die Ordinaten wie auch die Derivierte mit dem Wachsen der absoluten Werte von x ebenfalls wachsen.

Differenziert man die Gleichung 26., so hat man

$$27. \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{h}{2} (e^{hx} + e^{-hx}) = h^2 z.$$

Aus 26. hat man ferner

$$28. \quad 1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = z^2 h^2$$

also

$$29. \quad \frac{ds}{dx} = zh, \quad z = \frac{1}{h} \frac{ds}{dx}, \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{2} (e^{hx} + e^{-hx}).$$

Integriert man von $x = 0$ anfangen, so ergibt sich

$$30. \quad s = \frac{1}{2h} (e^{hx} - e^{-hx}) = \frac{1}{h} \frac{dz}{dx}, \quad ds = \frac{1}{h} d\left(\frac{dz}{dx}\right).$$

Aus den beiden Gleichungen 29. und 30. ergibt sich

$$z = \frac{1}{h} \frac{ds}{dx}, \quad z^2 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{ds}{dx} \right)^2$$

$$s = \frac{1}{h} \frac{dz}{dx}, \quad s^2 = \frac{1}{h^2} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2$$

und daher

$$31. \quad z^2 - s^2 = \frac{1}{h^2}.$$

§ 280. Die geometrischen Bedeutungen der Gleichungen 29., 30. und 31. sind nun folgende.

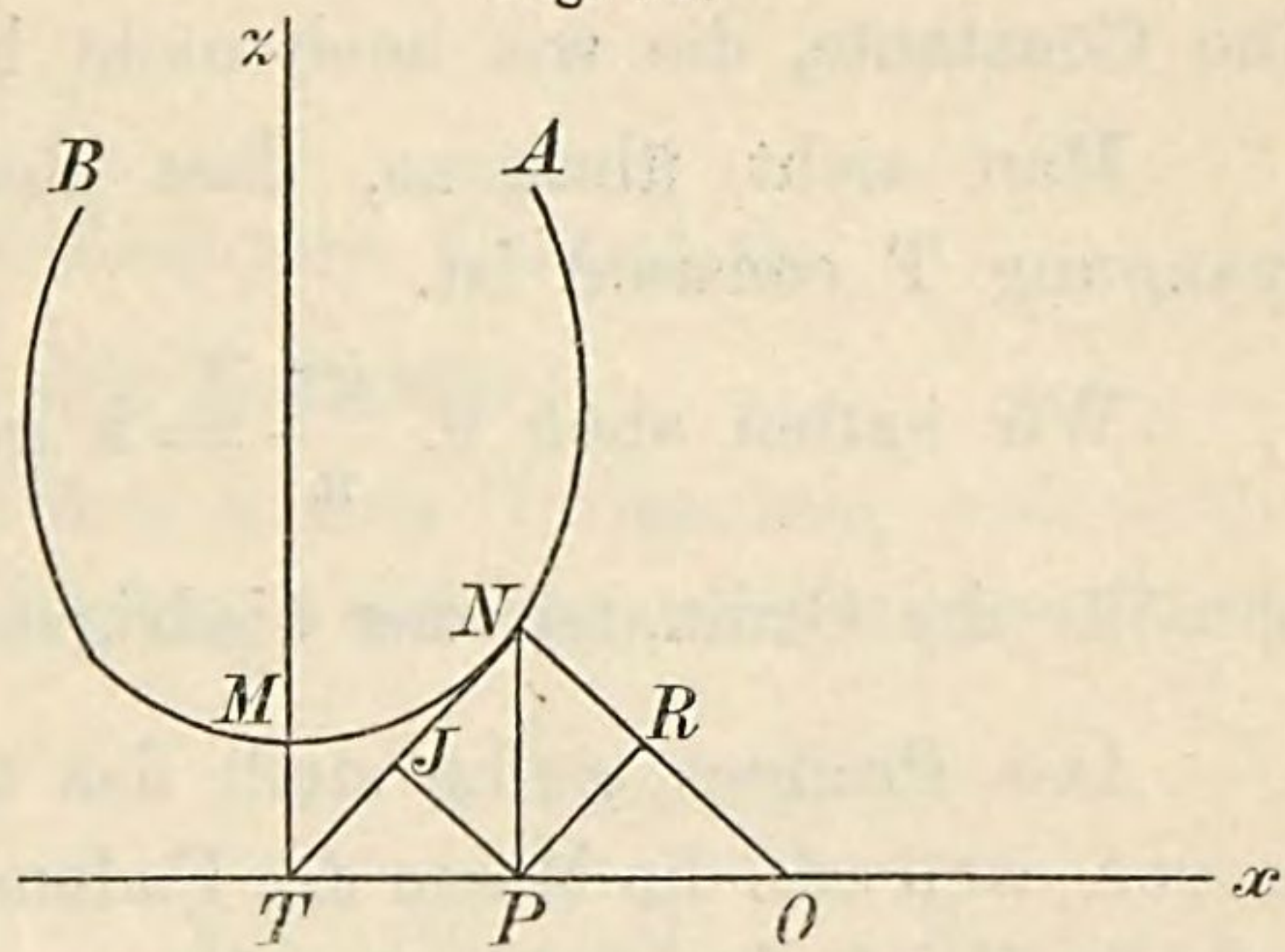
Die Gleichung 29. drückt aus, dass in jedem Punkte N der Kettenlinie die Projection NK der Ordinate NP auf die Normale NO constant und gleich $\frac{1}{h}$ ist. Denn $NK = z \cos PNO = z \cos NTP =$
 $= z \frac{dx}{ds} = \frac{1}{h}.$

Die Gleichung 30. drückt aus, dass die Projection NJ der Ordinate NP auf die Tangente NT gleich ist dem Bogen NM, gerechnet vom niedrigsten Punkte der Curve.

Dann hat man

Fig. 71.

$$\begin{aligned}
 NJ &= JP \tan NPJ = \\
 &= JP \tan NTP = \\
 &= JP \frac{dz}{dx} = NK \frac{dz}{dx} = \\
 &= z \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dz}{dx} = z \cdot \frac{dz}{ds} = \\
 &= \frac{1}{h} \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{1}{h} \frac{dz}{dx} = s.
 \end{aligned}$$



Endlich sagt die Gleichung 31. aus, dass der Bogen MN, die Ordinate z und die Länge $\frac{1}{h}$ ein rechtwinkeliges Dreieck bilden, von welchem die Ordinate z die Hypotenuse ist.

§ 281. Der Krümmungshalbmesser einer ebenen Curve wird ausgedrückt durch

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dz^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dx^2}}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke die bisher erhaltenen Werte aus den Gleichungen 28. und 27., so hat man

$$\rho = \frac{z^3 h^3}{h^2 z} = z^2 h = \frac{z^2 h^2}{h} = \frac{1}{h} \left(\frac{ds}{dx}\right)^2.$$

Die Normale NO ist gleich $z \frac{ds}{dx} = z \cdot zh = z^2 h$, folglich ist $\rho = NO$.

Der Krümmungshalbmesser der Kettenlinie ist wie beim Kreise gleich der Normale, und ist nur im entgegengesetzten Sinne gerichtet, weil diese Curve ihre convexe Seite der Achse der x zuwendet, indem aus 30. zu ersehen, dass $ds = \frac{1}{h} d\left(\frac{dz}{dx}\right)$ ist, s aber gleichzeitig mit x wächst, daher $\frac{d^2z}{dx^2}$ immer positiv ist, der Krümmungshalbmesser aber immer in der Concavität der Curve liegt.

§ 282. Für die Spannung des Fadens in einem seiner Punkte haben wir die Gleichungen 3., von welchen die erste gibt

$$T \frac{dx}{ds} = a,$$

eine Constante, die wir noch nicht bestimmt haben.

Man sieht übrigens, dass die horizontale Componente der Spannung T constant ist.

Wir hatten oben 9. $\frac{g\varepsilon}{a} = h$ gesetzt, also $a = \frac{g\varepsilon}{h}$. Dann hat man für die Ordinaten des niedrigsten Punktes der Curve $z = \frac{1}{h}$.

Das Product $g\varepsilon ds$ stellt das Gewicht eines Curvenelementes ds vor, weil εds die Masse des Fadenelementes ds , g die Acceleration und die Kraft der Schwere, das ist das Gewicht durch Mg ausgedrückt wird. Bezeichnen wir das Gewicht der Einheit der Länge des Fadens mit ω , so wird das Gewicht des Fadenelementes ds gleich sein ωds .

Nennen wir die Spannung des niedrigsten Punktes der Curve, welche horizontal ausgeübt wird, $\frac{\omega}{h}$, so wird man haben

$$T \frac{dx}{ds} = \frac{g\varepsilon}{h} = \frac{\omega}{h},$$

und daraus

$$32. \quad T \frac{dx}{ds} = \frac{\omega}{h}, \quad T = \frac{\omega}{h} \frac{ds}{dx} = \omega z.$$

Die Spannung der Kettenlinie ist also in jedem Punkte proportional der Ordinate an diesem Punkte.

Am niedrigsten Punkte ist die Ordinate $z = \frac{1}{h}$, daher die Spannung daselbst $\frac{\omega}{h}$, was zu erwarten war.

Die Spannung kann man auch aus der Generalgleichung erhalten.

Wir hatten im vorigen Capitel Gleichung 3.

$$dT = -\varepsilon [Xdx + Ydy + Zdz].$$

Setzt man darin $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$, $\varepsilon g = \omega$ so hat man

$$\begin{aligned} dT &= \varepsilon g dz \\ T &= \omega z. \end{aligned}$$

für x die Größe k , dann für $Bz = \frac{1}{h} + f - b$, $x = -k'$ einsetzt,

$$4. \quad \begin{cases} \frac{1}{h} + f = \frac{1}{2h} (e^{hk} + e^{-hk}) \\ \frac{1}{h} + f - b = \frac{1}{2h} (e^{-hk'} + e^{hk'}) \end{cases}$$

und daraus, wenn man die untere von der oberen abzieht,

$$5. \quad b = \frac{1}{2h} (e^{hk} + e^{-hk} - e^{hk'} - e^{-hk'})$$

und aus diesen, wenn man b mit $AMB = L$ addiert und von einander abzieht,

$$6. \quad \begin{cases} L + b = \frac{1}{h} (e^{hk} - e^{-hk'}) \\ L - b = \frac{1}{h} (e^{hk'} - e^{-hk}) \end{cases}$$

Da ferner $k + k' = a$, so hat man, wenn man die letzten Gleichungen miteinander multipliziert,

$$7. \quad \begin{cases} L^2 - b^2 = \frac{1}{h^2} (e^{ha} + e^{-ha} - 2) \\ \quad \quad \quad = \frac{1}{h^2} \left(e^{\frac{ha}{2}} - e^{-\frac{ha}{2}} \right)^2 \\ \sqrt{L^2 - b^2} = \frac{1}{h} \left(e^{\frac{ha}{2}} - e^{-\frac{ha}{2}} \right) \end{cases}$$

Diese Gleichung enthält nur die einzige Unbekannte $\frac{1}{h}$.

§ 284. Setzt man $\frac{ha}{2} = \alpha$, $\frac{\sqrt{L^2 - b^2}}{a} = n$, so geht die letzte der Gleichungen (7.) über in

$$8. \quad n = \frac{1}{ah} (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = \frac{1}{2\alpha} (e^{\alpha} - e^{-\alpha})$$

Entwickelt man $(e^{\alpha} - e^{-\alpha})$ in eine Reihe, so hat man

$$9. \quad \frac{\alpha^2}{3!} + \frac{\alpha^4}{5!} + \dots = n - 1.$$

Da n nur bekannte Größen enthält, so ist $\frac{1}{h}$ durch die Gleichung (7.) gegeben.

Liegen A und B in einer horizontalen Linie, alsdann ist $k = k'$, $b = 0$, $\frac{1}{h} + f = \frac{1}{2h} \left(e^{\frac{ha}{2}} + e^{-\frac{ha}{2}} \right)$.

§ 285. Ist der Faden L nur ein wenig größer als die Linie AB, alsdann ist

$$n = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{a^2}}$$

fast gleich 1, daher $n - 1$ und folglich auch α sehr kleine Größen. Man kann daher in 9. nehmen

$$\frac{\alpha^2}{6} = n - 1$$

und daraus

$$\alpha = \sqrt{6(n - 1)} = \sqrt{6 \left[\sqrt{\frac{L^2 - b^2}{a^2}} - 1 \right]}.$$

Aus diesem Werte hat man auch

$$h = \frac{2\alpha}{a}, \quad \frac{1}{h} = \frac{a}{2\alpha}.$$

In 6. hatten wir ferner

$$L + b = \frac{1}{h} \left(e^{hk} - e^{-hk'} \right)$$

$$L - b = \frac{1}{h} \left(e^{hk'} - e^{-hk} \right).$$

Wegen $k + k' = a$ hat man

$$L + b = \frac{1}{h} \left(1 - e^{-ha} \right) e^{hk}.$$

Daraus bestimmt man den Wert von k und also auch von $k' = a - k$. f bestimmt man aus der ersten der Gleichungen (4.).

§ 286. Unter allen ebenen Curven, welche durch zwei fixe Punkte passieren und sich um eine und dieselbe in ihrer Ebene liegende Achse drehen, erzeugt die Kettenlinie die kleinste Fläche.

Für eine durch Drehung einer in der Ebene der xz liegenden Curve um die x -Achse erzeugte Rotationsfläche hat man, wenn man solche mit v bezeichnet,

$$v = 2\pi \int z ds = 2\pi \int z \sqrt{dx^2 + dz^2}.$$

Variiert man diese, so hat man

$$\begin{aligned} \delta v &= 2\pi \int \left[\delta z ds + z \delta dx \frac{dx}{ds} + z \delta dx \frac{dz}{ds} \right] \\ &= 2\pi \int \left[\delta z ds + z d\delta x \frac{dx}{ds} + z d\delta z \frac{dz}{ds} \right]. \end{aligned}$$

Integriert man partiell, und beachtet, dass die Grenzen fix sind, und dass für diese Grenzen, es sei von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ nach der Voraussetzung δx und δz verschwinden, so hat man

$$\delta v = 2\pi \int \left[\delta z ds - d \left(z \frac{dx}{ds} \right) \delta x - d \left(z \frac{dz}{ds} \right) \delta z \right].$$

Damit ein Minimum stattfindet, muss der Ausdruck unter dem Integralzeichen verschwinden, und da die Variationen δx , δz von einander unabhängig und unbestimmt sind, müssen die Coefficienten jeder für sich gleich Null sein, und daraus ergibt sich

$$ds - d \left(z \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad d \left(z \frac{dx}{ds} \right) = 0$$

$$s - z \frac{dx}{ds} = a, \quad z \frac{dx}{ds} = b,$$

wo unter a und b die Constanten der Integration verstanden werden.

Die letzte Gleichung gibt

$$\left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = \frac{z^2}{b^2}, \quad 1 + \frac{dz^2}{dx^2} = \frac{z^2}{b^2}$$

$$\frac{dz^2}{dx^2} = \frac{z^2}{b^2} - 1, \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{\frac{z^2}{b^2} - 1}}$$

Integriert man und setzt c als Constante bei, so hat man

$$x + c = b \left[\frac{z}{b} + \sqrt{\frac{z^2}{b^2} - 1} \right]$$

und daraus

$$e^{\frac{x+c}{b}} = \frac{z}{b} + \sqrt{\frac{z^2}{b^2} - 1}$$

$$e^{-\frac{x+c}{b}} = \frac{z}{b} - \sqrt{\frac{z^2}{b^2} - 1}$$

$$2 \frac{z}{b} = e^{\frac{x+c}{b}} + e^{-\frac{x+c}{b}}$$

$$z = \frac{b}{2} \left(e^{\frac{x+c}{b}} + e^{-\frac{x+c}{b}} \right).$$

Man hat also für das Minimum die Gleichung der Kettenlinie.

Aus diesem Satze folgt weiter, dass die Kettenlinie unter allen Curven, welche dieselben Bedingungen erfüllen, die Curve ist, bei welcher der Schwerpunkt am nächsten zur Achse, also am tiefsten liegt, wenn diese horizontal ist.

Denn nach dem Guldin'schen Theoreme hat die erzeugte Fläche zum Ausdrucke die Länge der Curve multipliciert mit dem Umfange des Kreises, welchen der Schwerpunkt dieser Curve beschreibt. Dieser Kreis muss also bei der Drehung der Kettenlinie um eine Achse der möglichst kleinste sein.

Achtunddreißigstes Capitel.

Die Kettenbrückenlinie.

§ 287. Denken wir uns, dass die verticale Kraft, welche das Element ds des an den Punkten A und B aufgehängten Fadens angreift, nicht der Länge dieses Elementes, sondern dessen horizontaler Projection dx proportional sei, alsdann nimmt der Faden eine Form an, welche von der Kettenlinie verschieden ist. Dieses ist der Fall, wenn auf einem gewichtlosen Faden eine Last gleichförmig horizontal verbreitet ist, auf welche die verticale Kraft proportional dem Elemente dx wirkt. Der Faden wird dann eine Gestalt annehmen, welche der Gestalt der Tragkette einer Hängebrücke ähnlich ist, wenn man das Gewicht der Kette, als sehr klein, gegenüber der darauf angebrachten sehr großen Last, vernachlässigt.

Auch diese Curve wird ganz in der durch die Punkte A und B gehenden verticalen Ebene AMB liegen. Wir wenden hier zwei der Gleichungen (2.) des 36. Capitels an, indem wir $X = 0$, $Z = -g$ setzen, $\omega = g\varepsilon$ die totale Kraft nennen, welche ein Stück Kette sollicitiert, deren horizontale Projection gleich der Längeneinheit ist, und die Spannung am tiefsten Punkte mit $\frac{\omega}{h}$ bezeichnen, und alsdann werden wir haben

$$1. \quad \begin{cases} d \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0. \\ d \left(T \frac{dz}{ds} \right) = g\varepsilon dx = \omega dx. \end{cases}$$

Integriert man die erste Gleichung, so hat man wie in der Gleichung 32. des vorigen Capitels

$$2. \quad T \frac{dx}{ds} = \frac{\omega}{h}.$$

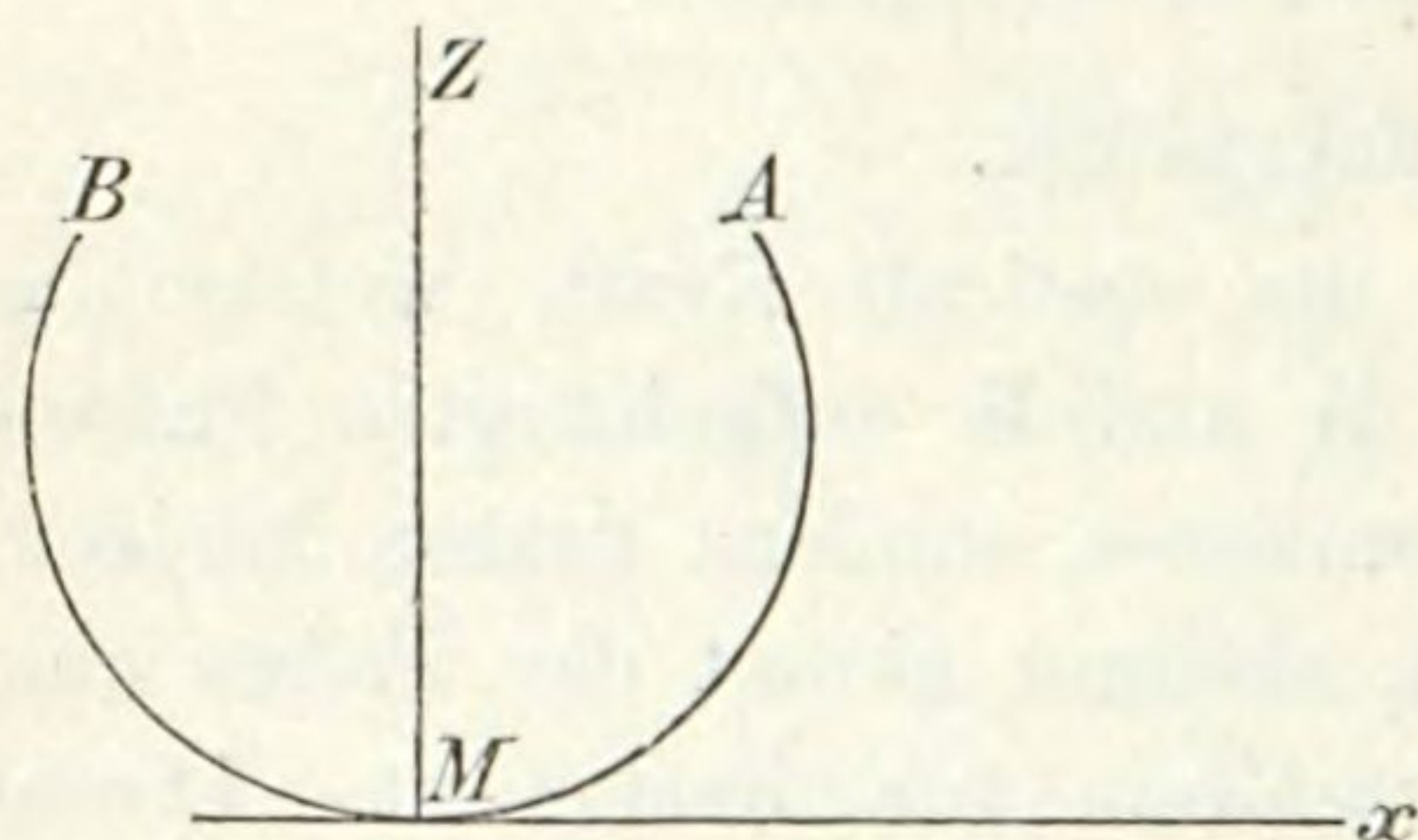
Die horizontale Componente der Spannung ist also auch hier constant.

Führt man diesen Wert von T in die zweite der Gleichungen 1. ein, so hat man

$$3. \quad \begin{cases} \frac{1}{h} d \left(\frac{dz}{dx} \right) = dx \\ \frac{1}{h} \frac{dz}{dx} = x. \end{cases}$$

Man setzt keine Constante bei, wenn wir den niedrigsten Punkt zum Coordinatenursprung nehmen, wo für $x=0$, auch $z=0$

Fig. 73.



und $\frac{dz}{dx} = 0$ ist.

Integriert man die zweite der Gleichungen (3.), so hat man

$$4. \quad \frac{2}{h} z = x^2.$$

Man setzt keine Constante bei, da für $x=0$ auch $z=0$ sein muss.

Die Curve ist also in diesem Falle eine Parabel, deren Achse vertical gerichtet und deren Scheitel am tiefsten Punkte M liegt.

§ 288. Die Spannung entnimmt man aus Gleichung 2., wornach

$$T = \frac{\omega}{h} \frac{ds}{dx}$$

ist.

Aus der zweiten der Gleichungen (3.) hat man

$$5. \quad \begin{cases} \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + 1 = h^2 x^2 + 1 \\ \frac{ds}{dx} = \sqrt{h^2 x^2 + 1}, \quad T = \frac{\omega}{h} \sqrt{h^2 x^2 + 1}. \end{cases}$$

Die Spannung also, welche für $x=0$ gleich ist $\frac{\omega}{h}$, wächst mit x .

Behält man die Bezeichnung des § 283 bei (Fig. 72), nennt die Spannung $\frac{1}{h}$, so kann man aus der Gleichung der Curve

$x^2 = \frac{2}{h} z$, wie bei der Kettenlinie, alle Werte berechnen, die bei dieser Curve vorkommen.

Man hat nämlich

$$k^2 = \frac{2}{h} f \quad k'^2 = \frac{2}{h} (f - b),$$

und daraus

$$k^2 - k'^2 = (k + k')(k - k') = a(k - k') = \frac{2}{h}b$$

$$k - k' = \frac{2}{h} \frac{b}{a}$$

$$k + k' = a$$

$$k = \frac{a}{2} + \frac{b}{ha}, \quad k' = \frac{a}{2} - \frac{b}{ah}.$$

Ferner haben wir aus 5.

$$6. \quad ds = dx \sqrt{h^2 x^2 + 1}.$$

Integriert man, so kommt

$$7. \quad s = \frac{x}{2} \sqrt{h^2 x^2 + 1} + \frac{1}{2h} \left[hx + \sqrt{h^2 x^2 + 1} \right].$$

Eine Constante wird nicht beigesetzt, da für $x = 0$ auch $s = 0$ wird.

Setzt man in 7. für x bald $= k$, bald $= k'$ und addiert, so hat man

$$L = \frac{k}{2} \sqrt{h^2 k^2 + 1} + \frac{k'}{2} \sqrt{h^2 k'^2 + 1} + \frac{1}{2h} \left[hk + \sqrt{h^2 k^2 + 1} \right] \\ + \frac{1}{2h} \left[hk' + \sqrt{h^2 k'^2 + 1} \right].$$

Substituiert man darin die obgefundenen Werte von k und k' , so hat man zur Bestimmung von $\frac{1}{h}$ eine transcendente Gleichung.

Für $b = 0$, $k = k' = \frac{a}{2}$ hat man

$$L = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{h^2 a^2}{4} + 1} + \frac{1}{h} \left[\frac{ha}{2} + \sqrt{\frac{h^2 a^2}{4} + 1} \right].$$

Neununddreißigstes Capitel.

Die Anziehung der Körper.

§ 289. Alle Körper in der Natur ziehen sich wechselseitig an, und die Intensität der Anziehung, die zwei unendlich kleine Körper-elemente, welche wir mit dm und dm' bezeichnen, aufeinander ausüben, ist proportional den Massen, das ist den Quantitäten der

in diesen Körperelementen enthaltenen Materie und verkehrt proportional dem Quadrate der Distanz der beiden Körperelemente.

Nennen wir die Größe der Attraction f in dem Falle, wenn eine Quantität Materie, welche der Einheit der Masse gleichkommt, in jedem der zwei Körperelemente enthalten ist, wir uns solche in einem Punkte vereinigt denken und die Distanz der beiden Elemente gleich der Längeneinheit ist, alsdann hat die Intensität der wechselseitigen Anziehung, welche zwei, in der Distanz u von einander befindlichen Körperelemente dm und dm' , eines auf das andere ausüben zum Ausdrücke

$$\frac{f dm dm'}{u^2}.$$

Dabei nehmen wir an, dass die Distanz u für alle Punkte dieser unendlich kleinen Körperelemente dm und dm' constant eine und dieselbe ist, was uns offenbar gestattet ist, da bei dieser Annahme nur unendlich kleine Größen höherer Ordnung vernachlässigt werden, welche beim Übergange zur Grenze verschwinden. Dieses Gesetz hat uns die Erfahrung gelehrt, alle Erscheinungen in der Natur, insbesondere alle Erscheinungen am Himmel haben uns, wie wir sehen werden, zu diesem unumstößlichen Gesetz geführt.

Aus diesem Ausdrücke $\frac{f dm dm'}{u^2}$ sieht man, dass derselbe für die totale Arbeit der Attraction eines Körpers auf einen Punkt ein exactes Differential sein wird, da f , die Anziehung eines Punktes auf seinen Punkt in der Einheit der Distanz vorstellend, eine Function dieser Distanz ist und mithin obiger Ausdruck eine Form $f du$ haben wird, daher auch die Attraction des ganzen Körpers auf einen Punkt ein exactes Differential sein wird. Wir werden dieses bald bestätigt finden.

Anziehung einer homogenen sphärischen Schicht und eines sphärischen Körpers.

§ 290. Betrachten wir eine homogene sphärische Schicht zwischen zwei concentrischen Sphären, deren Halbmesser a und b sind, und wollen wir deren Anziehung auf ein Element dm' , welches außerhalb der Schicht in A in der Entfernung $OA = c$ vom Mittelpunkte der Sphären liegt, bestimmen, wobei wir einen Punkt der Schicht mit μ bezeichnen.

Es sei M der materielle Punkt der Schicht, r, θ, ϕ dessen Polarcoordinaten, O der Pol, Ox die durch den Punkt A gehende

Polarachse, und xOy eine fixe Ebene. Bezeichnen wir auch die Distanz des materiellen Punktes μ von A mit u , und das Element des Volumens der Schicht mit $d\tau$.

Man hat, wie aus dem früheren bekannt ist,

$$d\tau = r^2 \sin \Theta \, dr \, d\Theta \, d\phi,$$

wo r den Radius vector bedeutet, und wenn ρ die Dichte der Schicht bedeutet,

$$\mu = \rho \, d\tau = \rho \, r^2 \sin \Theta \, dr \, d\Theta \, d\phi.$$

Daher hat die Intensität der vom Punkte μ der Schicht auf das in A befindliche Element dm' ausgeübten Attraction zum Ausdrücke

$$1. \quad \frac{f \mu \, dm'}{u^2} = \frac{f \rho r^2 \sin \Theta \, dr \, d\Theta \, d\phi \, dm'}{u^2}.$$

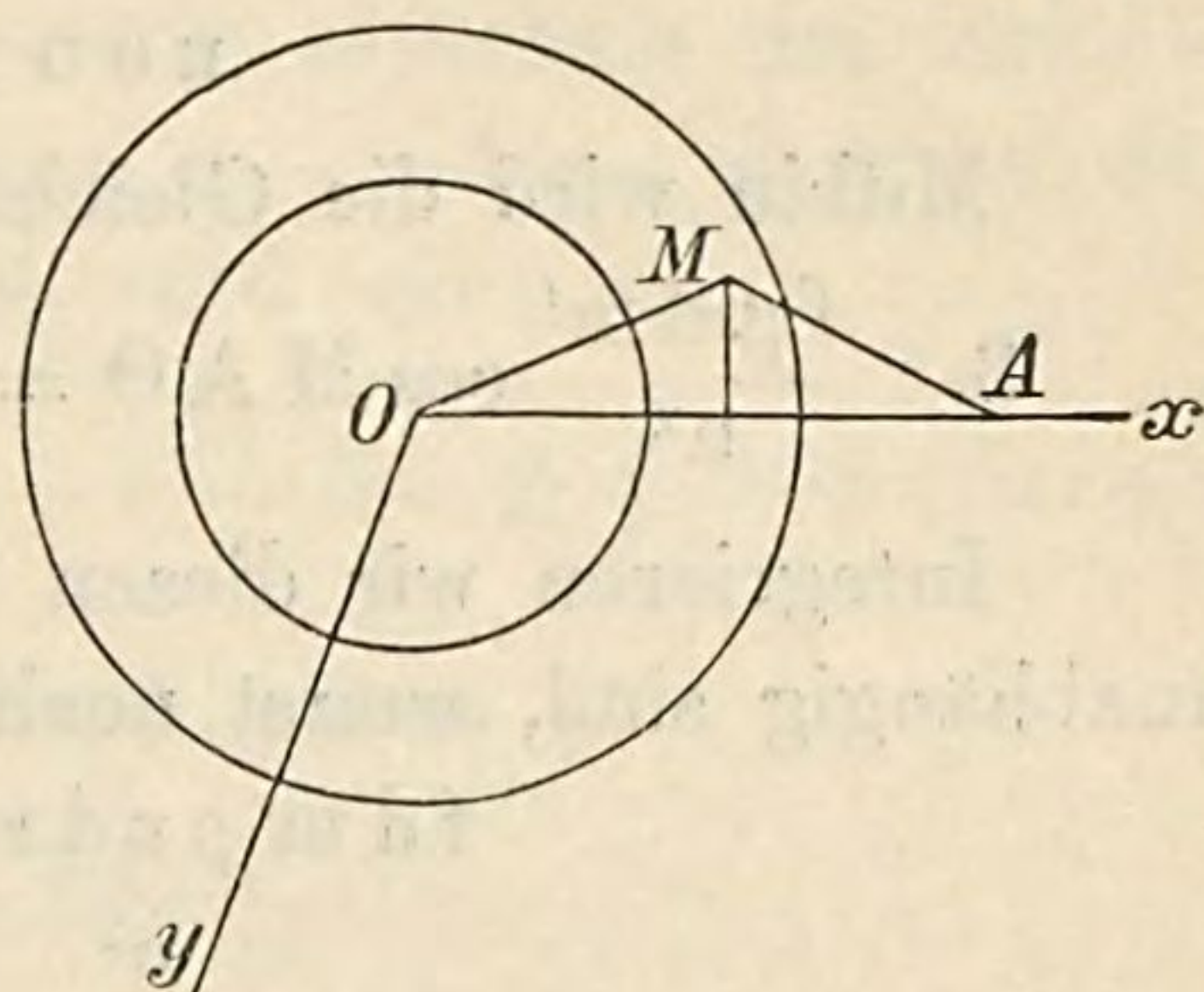
§ 291. Die anderen Punkte dieser Schicht werden für ihre Anziehungen, welche sie auf dm' ausüben, ähnliche Ausdrücke haben, und alle diese von den einzelnen Punkten ausgeübten Attractionen haben nothwendig eine Resultante, welche nach AO gerichtet sein muss, weil alles symmetrisch um diese Achse AO liegt. Man hat demnach, um die Intensität der von der ganzen Schicht auf dm' ausgeübte Attraction zu erhalten, nur die der Achse der Ox parallelen Componenten der Attraction aller einzelnen Punkte zu nehmen, und die Summe dieser Componenten wird die Intensität der ganzen Attraction geben, welche die Schicht auf den Punkt ausübt.

Dies sieht man auch daraus, da die den Achsen der y und der z parallelen Componenten aller Attraction sich wechselseitig zerstören, indem einer jeden positiven Componente irgend eines attractiven Punktes eine gleiche negative, im entgegengesetzten Sinne wirkende, von einem anderen symmetrisch gegenüber liegenden Punkte herrührende Componente entgegensteht.

Eine jede Componente der einzelnen Attractionen parallel nach der x -Achse hat aber zum Ausdrücke

$$\begin{aligned} 2. \quad \frac{f \mu \, dm'}{u^2} \cos MAO &= \frac{f \mu \, dm'}{u^2} \frac{c^2 + u^2 - r^2}{2cu} \\ &= f \, dm' \, \rho \, r^2 \sin \Theta \, dr \, d\Theta \, d\phi \cdot \frac{c^2 + u^2 - r^2}{2cu^3}. \end{aligned}$$

Fig. 74.



§ 292. Zunächst wollen wir das Differential als Function von u allein ausdrücken, und da hat man, indem

$$u^2 = c^2 + r^2 - 2cr \cos \Theta$$

ist, wenn man differenziert, die Gleichung zwischen u und Θ

$$u \, du = cr \sin \Theta \, d\Theta.$$

Mithin wird die Gleichung 2.

$$3. \quad \frac{f \mu \, dm'}{u^2} \cos M A \Theta = \frac{f \, dm' \rho \, r \, dr \, du \, d\phi}{2c^2} \left(1 + \frac{c^2 - r^2}{u^2} \right)$$

Integrieren wir diesen Ausdruck, in welchem u und r von ϕ unabhängig sind, zuerst noch ϕ von 0 bis 2π , so wird derselbe

$$\frac{f \, dm' \rho \, r \, dr \, du \pi}{c^2} \left(1 + \frac{c^2 - r^2}{u^2} \right),$$

und integriert man weiter nach r und u , so wird dieser Ausdruck

$$\frac{\pi f \rho \, dm'}{c^2} \int r \, dr \int \left(1 + \frac{c^2 - r^2}{u^2} \right) du.$$

Führt man die Integration nach u aus, so ergibt sich

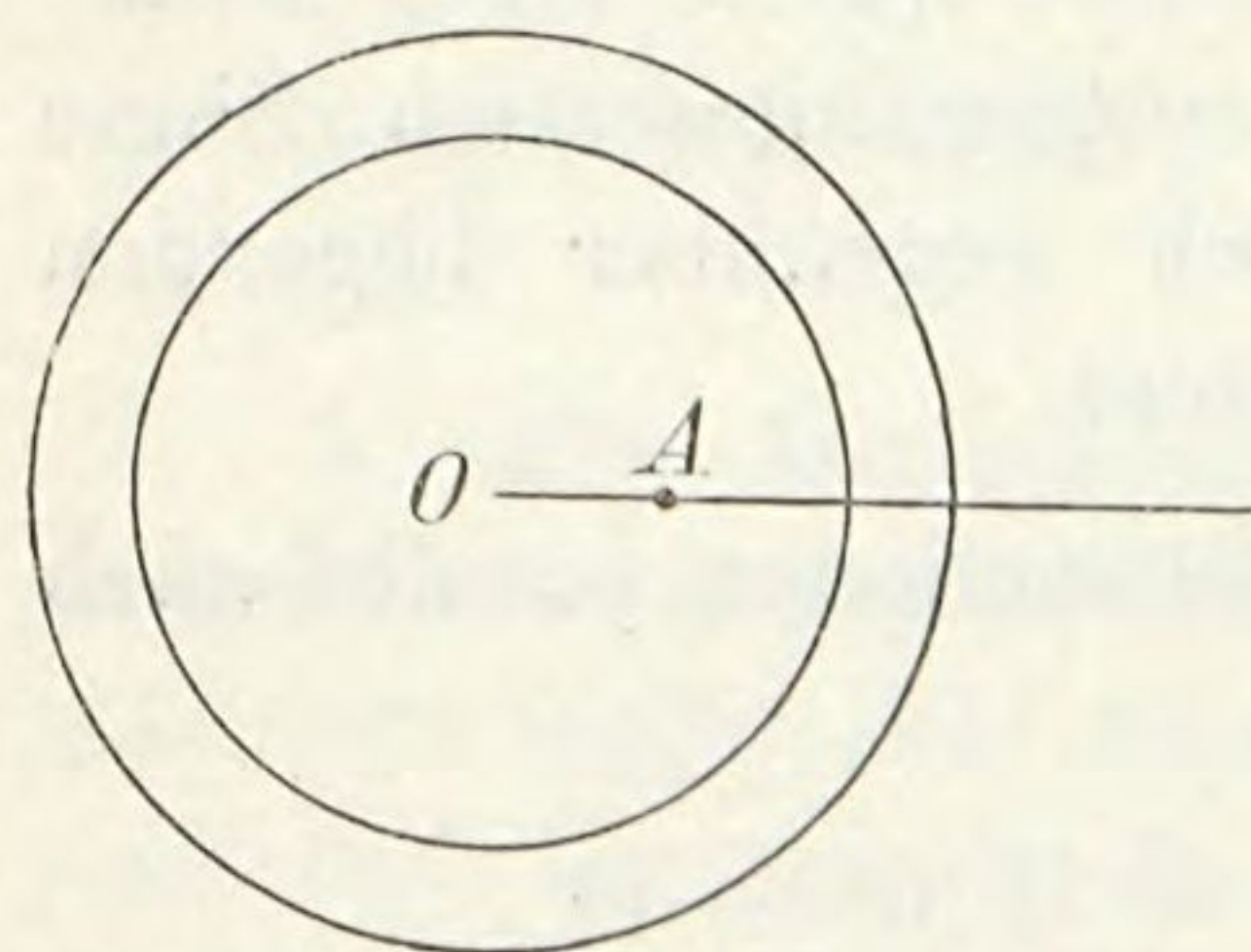
$$4. \quad \int \left(1 + \frac{c^2 - r^2}{u^2} \right) du = u + \frac{r^2 - c^2}{u} + e.$$

§ 293. Liegt nun das Element dm' zwischen dem Mittelpunkte und der Schicht, so muss das Integral 4., da $u = r^2 + c^2 - 2rc \cos \Theta$ stets positiv zu sein hat, und die Grenzen von Θ von 0 bis π sind, zwischen den Grenzen von $r - c$ + $r + c$ genommen werden. In diesen Grenzen ist aber das unbestimmte Integral 4.

$$\int_{r-c}^{r+c} \left(1 + \frac{c^2 - r^2}{u^2} \right) du = (r+c) - (r-c) + (r-c) - (r+c) = 0$$

multipliziert man daher dieses Integral mit $\frac{\pi f \, dm' \rho \, r \, dr}{c^2}$ und in-

Fig. 75.



tegriert nach r , so wird für das unbestimmte Integral eine Constante herauskommen und das bestimmte Integral wird $= 0$ sein.

Man hat demnach den Satz:

Die Resultante der Attraction aller materiellen Punkte einer homogenen sphärischen Schicht auf einen innerhalb des Hohlraumes liegenden materiellen Punkt ist gleich Null.

Dieses Resultat erstreckt sich auf mehrere sphärische, concentrierte Schichten, in welchen die Dichte ρ von Schicht zu Schicht

variiert, aber in derselben Schicht constant bleibt. Die Wirkungen der Attraction einer jeden Schicht auf ein im Innern des Hohlraumes liegendes Element, und mithin die Gesamtwirkung der Attraction aller Schichten auf dieses Element ist gleich Null.

§ 294. Liegt das angezogene Element außerhalb der Schicht (Fig. 74), wird man u in den Grenzen $c - r$ bis $c + r$ bei der Integration nehmen, und das Integral 4. wird sein:

$$\int_{c-r}^{c+r} \left(1 + \frac{r^2 - c^2}{u^2}\right) du = (r+c) - (c-r) + (r-c) + (r+c) = 4r.$$

Man wird daher für obigen Ausdruck haben

$$\int \frac{4\pi f d m' \rho r^2 dr}{c^2},$$

welches Integral, zwischen den Grenzen von a bis b genommen, gibt

$$\frac{4}{3} \rho \pi (b^3 - a^3) f d m'.$$

Bedenkt man, dass die Masse der Schicht gleich ist $\frac{4}{3} \rho \pi (b^3 - a^3)$, und bezeichnen wir diese mit M , so hat man für die Intensität der Attraction der ganzen Schicht auf das Element $d m'$, welches außerhalb der Schicht liegt,

$$5. \quad \frac{f M d m'}{c^2}.$$

§ 295. Man hat also folgendes Theoreme:

Die Anziehung einer homogen-sphärischen Schicht auf einen äußeren materiellen Punkt ist gleich derjenigen Intensität, die dieser Punkt erleiden würde, wenn die ganze Masse der Schicht in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Ist nun ein Körper aus homogenen concentrischen Schichten von verschiedener Dichte zusammengesetzt, so wird die Attraction einer jeden homogenen Schicht auf einen äußeren Punkt so wirken, als wäre ihre Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt, und wird daher die Intensität der Attraction des ganzen Körpers auf einen äußeren Punkt gleich sein der Summe der Wirkungen aller dieser Schichten, daher gleich sein, als wenn die gesammte Masse des Körpers in seinem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Das Volum einer Kugel vom Halbmesser R , ist $\frac{4}{3} \pi R^3$, und ist die Kugel von homogener Dichte ρ , so wird ihre Masse

sein $\frac{4}{3} \pi \rho R^3$, daher wird die Intensität ihrer Attraction auf einen in der Entfernung c von ihrem Mittelpunkte liegenden äußeren materiellen Punkte dm' sein

$$6. \quad \frac{\frac{4}{3} f \rho \pi R^3 dm'}{c^2}.$$

§ 296. Bildet der angezogene Punkt einen Theil der anziehenden Masse, wird man diese in zwei concentrische sphärische Theile zerlegen. Die Schichten außerhalb des Punktes üben auf den Punkt keine Wirkung aus, indem, wie wir gesehen, diese Attractionen sich wechselseitig zerstören und die Gesamtattraction in Beziehung auf diese Schichten, auf diesen inneren Punkt gleich Null ist. Auf den Punkt üben demnach nur diejenigen Attractionen eine Wirkung aus, welche von Punkten herrühren, die zwischen der inneren Begrenzungsfläche des Körpers und der durch den angezogenen Punkt gelegten concentrischen Kugelfläche sich befinden. Ist demnach die Kugel homogen bis zum Mittelpunkte mit Masse von der Dichte ρ gefüllt und liegt der angezogene Punkt dm' innerhalb der Kugel in der Distanz c vom Mittelpunkte, so werden nur die Attractionen eine Wirkung ausüben, welche von den Punkten herrühren, die vom Mittelpunkte angefangen bis zu der durch den angezogenen Punkt gelegten concentrischen Kugelfläche sich befinden, und die Gesamtattraction wird mithin sein

$$7. \quad \frac{4}{3} \pi \rho f \frac{dm' c^3}{c^2} = \frac{4}{3} \rho \pi f c dm'.$$

Die ganze Attraction einer Kugel, von welchem Halbmesser immer, auf einen inneren Punkt, hängt mithin nicht mehr von der Größe dieses Halbmessers ab, und ist der Entfernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkte proportional.

§ 297. Sind zwei homogene Kugeln, die eine von der Dichte ρ , die andere von der Dichte ρ' , und ist die Distanz der beiden Mittelpunkte $= c$, die Halbmesser der beiden Kugeln gleich a und b , so zieht jeder Punkt der einen Kugel jeden Punkt der zweiten Kugel an, und jede Masse ist so zu betrachten, als wenn deren Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Die Masse der einen Kugel ist gleich $\frac{4}{3} \rho \pi a^3$, die der anderen Kugel ist gleich $\frac{4}{3} \rho' \pi b^3$. Daher

wird die wechselseitige Anziehung der beiden Sphären sein

$$\frac{16}{9} \frac{\pi^2 \rho \rho' f a^3 b^3}{c^2}.$$

Homogene Sphären, oder aus homogenen Schichten zusammengesetzte Sphären ziehen sich wechselseitig an wie materielle, in den respectiven Mittelpunkten placierte Punkte, welche die respectiven Massen der beiden Kugeln in sich enthalten, mithin so, als wenn die Masse jeder Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

§ 298. Dass die Attractionen einer unendlich dünnen Schicht auf einen, in der Hohlkugel liegenden Punkt sich wechselseitig aufheben, ihre Gesamtattraction also gleich Null ist, kann geometrisch bewiesen werden.

Sei O der Mittelpunkt einer sphärischen Schichte von unendlich kleiner Dicke ε und A der angezogene Punkt.

Zerlegen wir die Schichte in unendlich kleine Elemente, ziehen durch A die Linien MM' , NN' , wo M und N unendlich nahe Punkte sind, benennen das Element, welches dem Punkte M entspricht ω , das dem Punkte M' correspondierende Element ω' . Die Producte $\varepsilon\omega$, $\rho\varepsilon\omega$, $\varepsilon\omega'$, $\rho\varepsilon\omega'$ werden die Volums-, respective Massenelemente dieser Schichte vorstellen, welche den Punkten M und M' entsprechen.

Bezeichnen wir AM mit r , AM' mit r' , so werden die Attractionen von M und M' auf A in den Richtungen MA , $M'A$ auszudrücken haben, wenn wir den Punkt A mit dm' bezeichnen,

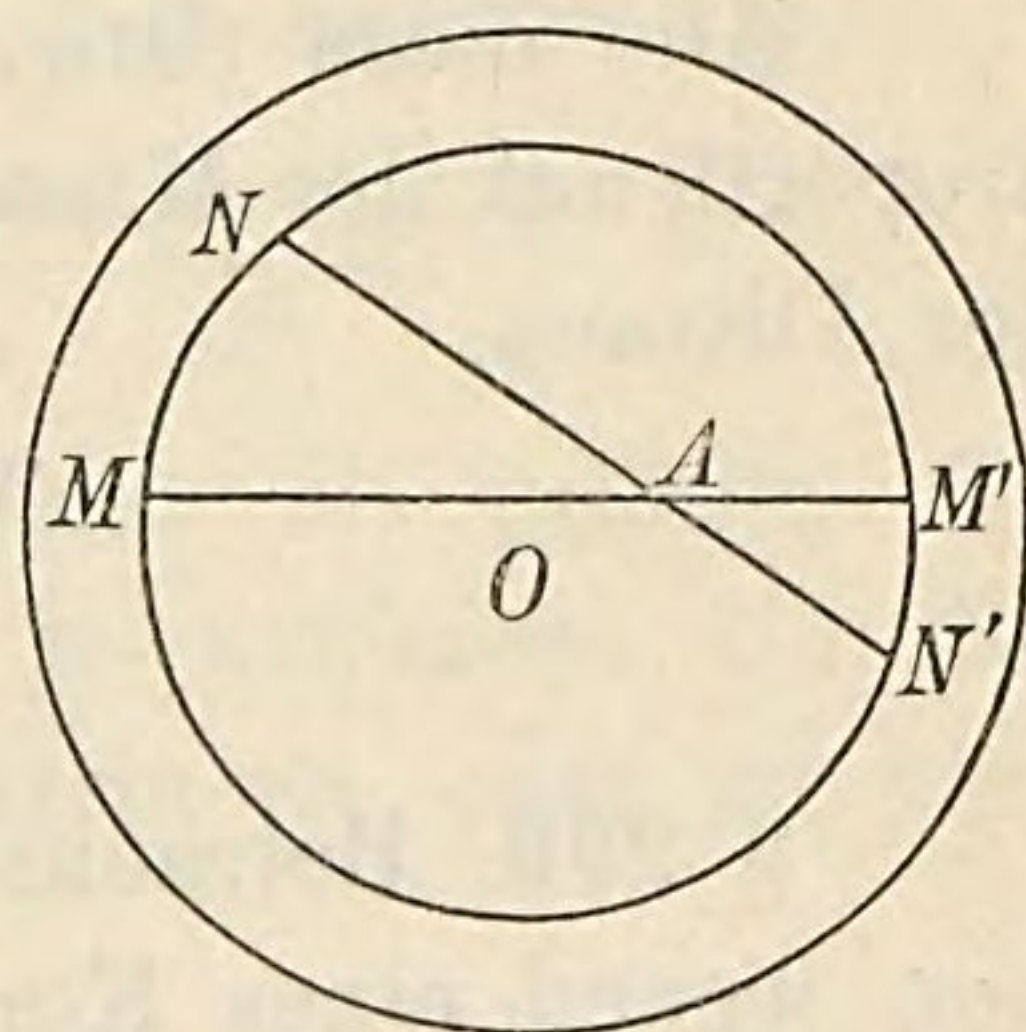
$$\frac{f\rho\varepsilon\omega dm'}{r^2}, \quad \frac{f\rho\varepsilon\omega' dm'}{r'^2}$$

Die beiden Größen der Attractionen der beiden Elemente auf A , welche den Punkten M und M' entsprechen, verhalten sich demnach wie $\frac{\omega}{r^2}$ zu $\frac{\omega'}{r'^2}$.

Nun sind aber diese Größen einander gleich. Denn wir können MAN und $M'AN'$ als Schnitte zweier Kegel mit der Basis ω , ω' mit einer durch ihre gemeinsame Spitze A gehende Ebene betrachten, und dann verhalten sich die ähnlichen Elemente ω und ω' wie die Quadrate ihrer homologen Linien MN und $M'N'$. Da ferner die Dreiecke MAN und $M'AN'$ ähnlich sind, so hat man

$$MN : M'N' = AM : AM' = r : r',$$

Fig. 76.



daher

$$\omega : \omega' = r^2 : r'^2,$$

mithin ist

$$\frac{\omega}{r^2} = \frac{\omega'}{r'^2}.$$

Diese beiden Attractionen sind aber von direct entgegengesetztem Sinne und zerstören sich. Dasselbe kann von jedem Elementenpaar behauptet werden und ergibt sich daraus, dass die totale Attraction einer sphärischen Schicht von unendlich kleiner Dicke auf einen im Innern des Hohlraumes befindlichen, von der Schicht umschlossenen Punkt gleich Null ist.

Dies ist auch der Fall bei einer homogenen Schicht oder bei einer aus homogenen Schichten zusammengesetzten Schicht von endlicher Dicke, da man sie in unendlich dünne Schichten decomponieren kann.

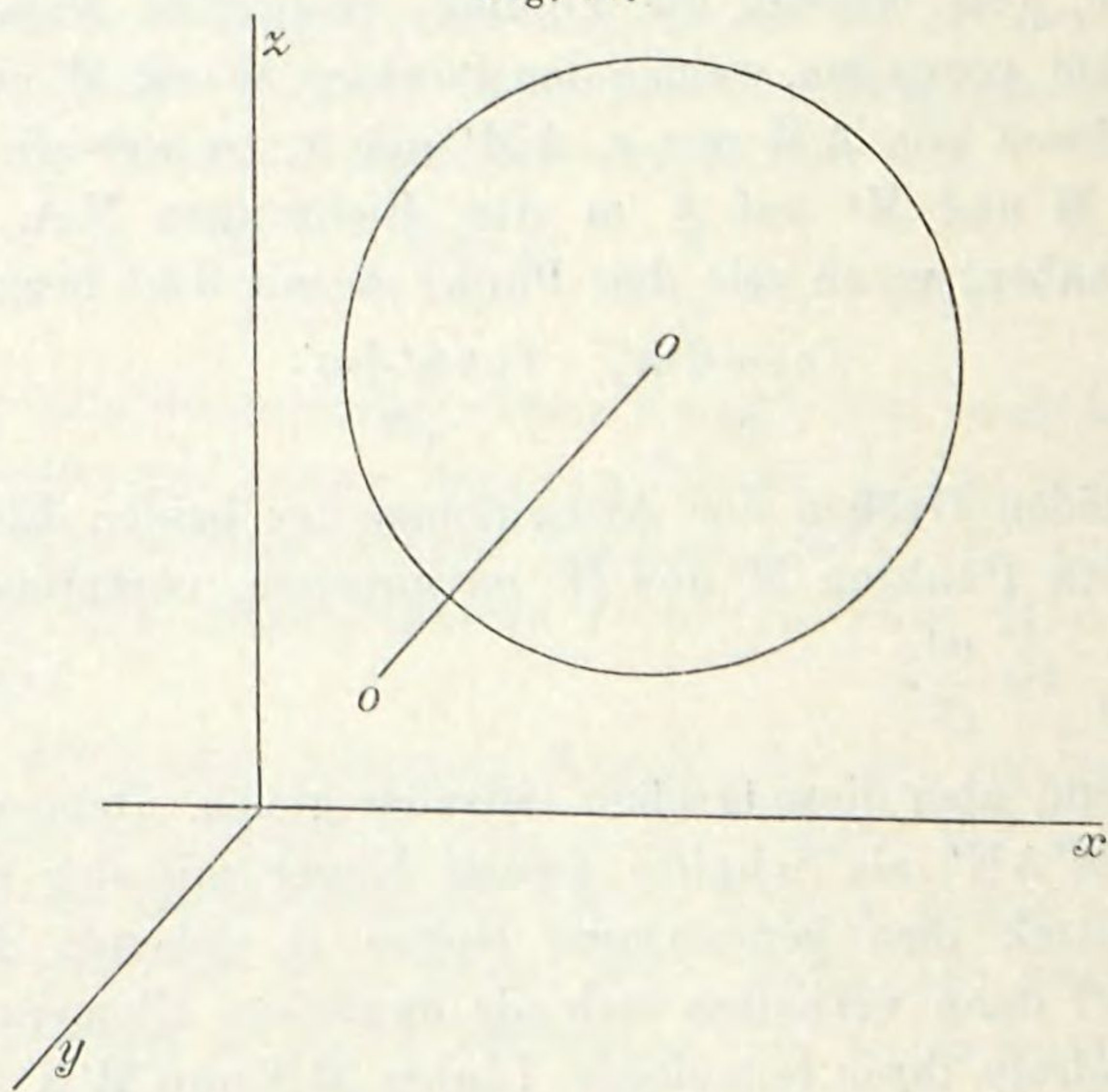
Alle diese Sätze gelten auch für eine Repulsivkraft, wenn sie proportional der Masse und umgekehrt proportional ist dem Quadrate der Distanz.

Vierzigstes Capitel.

Allgemeine Formeln.

§ 299. Betrachten wir jetzt den allgemeinen Fall der Attraction irgend eines Körpers auf einen materiellen Punkt,

Fig. 77.



Der angezogene Punkt, den wir μ nennen, befinde sich in O, dessen Coordinaten α, β, γ sind. Der Körper sei v , eines seiner Ele-

mente dm , dessen Coordinaten x, y, z sind, liege in der Distanz u von μ . Die Intensität des Elementes auf den angezogenen Punkt μ wird den Ausdruck haben

$$\frac{f \mu dm}{u^2},$$

und ist bekanntlich

$$dm = \rho dx dy dz,$$

wo unter ρ die Dichte des Elementes verstanden wird.

Die Cosinus der Winkel, welche u mit den Achsen einschließt, sind

$$1. \quad \frac{x - \alpha}{u}, \quad \frac{y - \beta}{u}, \quad \frac{z - \gamma}{u},$$

$$2. \quad u^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2.$$

Die Componenten der Attraction parallel den Achsen sind

$$3. \quad \frac{f \mu (\alpha - x) dm}{u^3}, \quad \frac{f \mu (\beta - y) dm}{u^3}, \quad \frac{f \mu (\gamma - z) dm}{u^3}.$$

Wir betrachten den Radius vector u immer als positiv, die Componenten aber als positiv oder negativ, je nachdem sie die Coordinaten des angezogenen Punktes zu verkleinern oder zu vergrößern streben.

Um nun die Componenten der Attraction für den ganzen Körper zu erlangen, wird man die Ausdrücke 3. integrieren, indem man für dm dessen obangegebenen Wert einsetzt.

Bezeichnen wir nun die Intensitäten der Attractionen der Componenten mit A, B, C , so hat man

$$4. \quad \begin{cases} A = f \mu \iiint \frac{(\alpha - x)}{u^3} \rho dx dy dz \\ B = f \mu \iiint \frac{(\beta - y)}{u^3} \rho dx dy dz \\ C = f \mu \iiint \frac{(\gamma - z)}{u^3} \rho dx dy dz. \end{cases}$$

§ 300. Man hat also, um die Intensitäten der Attractionen für die Componenten zu erhalten, dreifache Integrale durchzuführen, also die Summe der Componenten zu nehmen, erstreckt auf alle Elemente des Körpers.

Um alle Elemente zu erhalten, welche einem Parallelepiped entsprechen, das zwischen vier, den Ebenen der zx und der yx parallelen Ebenen eingeschlossen ist, wird man in Beziehung auf x integrieren, indem man y, z, dy, dz als constant betrachtet. Die

Grenzen von x wird man aus der Gleichung haben, da x eine Function von y und z ist. Dann wird man alle Componenten relativ den zwischen den zwei der Ebene der xz parallelen Ebenen eingeschlossenen Elementenfaden vereinigen, und zu dem Ende nach z integrieren, indem man y und dy als constant betrachtet. Die Grenzen dieser zweiten Integration sind Functionen von y und durch die Gleichung der Curve gegeben, auf welche der Körper sich in der Ebene der yz projiciert. Eine dritte Integration in Bezug auf y wird die Componente relativ der Summe der Schnitte geben, welche den Körper bilden, und diese Integration wird zwischen constanten Grenzen genommen, welche die äußersten Werte von y , entsprechend den der Ebene zx parallelen Ebenen, sind.

Man kann selbstverständlich die Ordnung der Integration umkehren und zuerst nach z , dann nach x , und endlich nach y integrieren. Die Größe ρ wird im allgemeinen Falle eine Function der Coordinaten, im Falle der Homogenität aber constant sein.

§ 301. Zur Erleichterung der Integration führen wir Polarcoordinaten ein, u, Θ, ϕ , setzen den Pol in O , wo sich der angezogene Punkt μ befindet, und bezeichnen die Winkel des Radius vector mit den Achsen mit g, h, k , welche die in (1.) angegebenen Werte haben und mit den Polarcoordinaten verbunden sind durch die Gleichungen

$$5. \quad \begin{cases} \cos g = \cos \Theta & = \frac{x - \alpha}{u} \\ \cos h = \sin \Theta \cos \phi & = \frac{y - \beta}{u} \\ \cos k = \sin \Theta \sin \phi & = \frac{z - \gamma}{u}. \end{cases}$$

Diese sind die allgemeinen Gleichungen der Transformation zum Uebergange von einem rechtwinkligen Coordinatensystem zu Polarcoordinaten, wenn man daselbst $u = 1$ setzt.

§ 302. Bei dieser Transformierung hat man

$$dm = \rho u^2 \sin \Theta d\Theta du d\phi,$$

und die Gleichungen 4. bekommen nachstehende Form

$$6. \quad \begin{cases} A = -f\mu \iiint \rho \cos g du \sin \Theta d\Theta d\phi \\ B = -f\mu \iiint \rho \cos h du \sin \Theta d\Theta d\phi \\ C = -f\mu \iiint \rho \cos k du \sin \Theta d\Theta d\phi. \end{cases}$$

Gehört der angezogene Punkt, der in O liegt, zur anziehenden Masse, und haben wir O zum Ursprunge der Polarcoordinaten genommen, so nehmen diese Ausdrücke andere Formen an.

Bezeichnet man nämlich das Element der Kugeloberfläche vom Halbmesser 1 mit $d\omega$, so hatten wir in einem früheren Capitel, wenn wie hier $d\tau$ das Volumenelement, dm das Körperelement des Körpers, u den Radius vector vorstellt,

$$d\omega = \sin \Theta \, d\Theta \, d\phi$$

$$d\tau = u^2 \, du \, d\omega$$

$$dm = \rho u^2 \, du \, d\omega,$$

und dann hat man

$$7. \quad \begin{cases} A = -f\mu \iiint \rho \cos g \, du \, d\omega \\ B = -f\mu \iiint \rho \cos h \, du \, d\omega \\ C = -f\mu \iiint \rho \cos k \, du \, d\omega. \end{cases}$$

Reduction der Integrale.

§ 303. Die Integrale 4., welche sich auf die ganze Masse des anziehenden Körpers erstrecken, können auf ein einziges Integral reducirt werden.

Differenzieren wir nämlich die Gleichung

$$u = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$

partiell nach α , β , γ , so erhält man

$$\frac{du}{d\alpha} = -\frac{(x-\alpha)}{u}, \quad \frac{du}{d\beta} = -\frac{(y-\beta)}{u}, \quad \frac{du}{d\gamma} = -\frac{(z-\gamma)}{u}.$$

Setzen wir nun, unter Beibehaltung der Integrationsgrenzen

$$U = \iiint \frac{dm}{u}$$

wo $dm = \rho \, dx \, dy \, dz$ ist, und differenziert man U nach α , β , γ , so kommt, da Differentiationen unter dem Integralzeichen ausgeführt werden können, indem die Grenzen von α , β , γ unabhängig sind,

$$8. \quad \begin{cases} \frac{dU}{d\alpha} = -\iiint \frac{(\alpha-x) \, dm}{u^3} \\ \frac{dU}{d\beta} = -\iiint \frac{(\beta-y) \, dm}{u^3} \\ \frac{dU}{d\gamma} = -\iiint \frac{(\gamma-z) \, dm}{u^3}. \end{cases}$$

Die Integrale 4. übergehen daher, wenn man $\rho \, dx \, dy \, dz$ durch dm ersetzt, in folgende

$$9. \quad \begin{cases} A = -f\mu \frac{dU}{d\alpha} \\ B = -f\mu \frac{dU}{d\beta} \\ C = -f\mu \frac{dU}{d\gamma} \end{cases}$$

so dass die Bestimmung der drei Componenten A, B, C von der Berechnung des einzigen Integrals U abhängt.

Definition und Eigenschaften des Potentials.

§ 304. Dem Integrale von $\frac{dm}{u}$, nämlich des Massenelementes eines Körpers dividiert durch die Distanz dieses Elementes von einem angezogenen Punkte μ , hat man in der Theorie der Attraction den Namen Potential beigelegt. Dabei unterscheidet man zwei Fälle.

Ist der angezogene Punkt μ ein äußerer, so kann das Differential $\frac{dm}{u}$ innerhalb der Grenzen der Integration nie unendlich werden, und kann man daher, wie wir bereits bemerkt, die Differentiation unter dem Zeichen der Integration ausführen.

Aus dem Integrale

$$U = \iiint \frac{dm}{u}$$

wird man demnach erhalten, wenn man zweimal nach α , β , γ differenziert und die Ausdrücke addiert,

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\beta^2} + \frac{d^2U}{d\gamma^2} = \iiint dm \left[\frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\beta^2} + \frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\gamma^2} \right].$$

Beobachtet man aber, dass

$$\frac{d \frac{1}{u}}{d\alpha} = \frac{x - \alpha}{u^3}, \quad \frac{d \frac{1}{u}}{d\beta} = \frac{y - \beta}{u^3}, \quad \frac{d \frac{1}{u}}{d\gamma} = \frac{z - \gamma}{u^3},$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\alpha^2} = \frac{3(x - \alpha)^2 - u^2}{u^5},$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\beta^2} = \frac{3(y - \beta)^2 - u^2}{u^5},$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\gamma^2} = \frac{3(z - \gamma)^2 - u^2}{u^5}$$

sind, so ergibt sich

$$10. \quad \frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\beta^2} + \frac{d^2 \frac{1}{u}}{d\gamma^2} = 0,$$

und mithin ist auch

$$11. \quad \frac{d^2 U}{d\alpha^2} + \frac{d^2 U}{d\beta^2} + \frac{d^2 U}{d\gamma^2} = 0.$$

§ 305. Bildet der angezogene Punkt einen Theil des abziehenden Körpers, so geht $\frac{dm}{u}$ durch das Unendliche hindurch, aber die Gleichungen 9. bestehen dennoch.

Denken wir uns den angezogenen Punkt in einer unendlich kleinen Kugel eingeschlossen, so kann man die Formeln 9. auf den ganzen Körper, mit Ausschluss dieser unendlich kleinen Kugel, richtig anwenden. Diese unendlich kleine Kugel kann man vernachlässigen, weil sie beim Zuschreiten zu den Grenzen verschwindet.

Denn das Element wird in Polarcoordinaten ausgedrückt durch

$$\rho u^2 du \sin \Theta d\Theta d\psi,$$

und wenn man es durch u dividirt und in der ganzen Ausdehnung der unendlich kleinen Kugel integriert, so erhält man eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung, die man vernachlässigen kann.

Die Function U kann also als ausgedehnt über den ganzen Körper betrachtet werden, und die Componenten sind es ebenfalls.

§ 306. Bildet ferner der angezogene Punkt einen Theil des anziehenden Körpers, so beschreiben wir, wie bereits erwähnt, um diesen Punkt eine unendlich kleine Kugel und theilen die Function U in zwei Theile $U_1 + U_2$.

U_1 wird den Potential bezüglich der unendlich kleinen Kugel, und U_2 den Potential bezüglich des ganzen Körpers, mit Ausschluss nur der ausgeschiedenen unendlich kleinen Kugel, vorstellen.

Bezüglich U_2 wird die Gleichung 11. bestehen

$$12. \quad \frac{d^2 U_2}{d\alpha^2} + \frac{d^2 U_2}{d\beta^2} + \frac{d^2 U_2}{d\gamma^2} = 0,$$

da der Punkt, dessen Coordinaten α, β, γ sind, nicht mehr einen Theil der Masse dieses anziehenden Körpers bildet.

Belangend U_1 , sei ρ die Dichte des Körpers im angezogenen Punkte, daher auch der unendlich kleinen Kugel, a, b, c seien die Coordinaten des Mittelpunktes derselben, so sind die Componenten der Anziehung der unendlich kleinen Kugel auf diesen Punkt, der in ihrem Innern sich befindet,

$$-\frac{4}{3}\pi\mu f\rho(\alpha-a), \quad -\frac{4}{3}\pi\mu f\rho(\beta-b), \quad -\frac{4}{3}\pi\mu f\rho(\gamma-c), \quad \S 296, 7.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Gleichungen 9., so ergibt sich daraus

$$13. \quad \begin{cases} \frac{dU_1}{d\alpha} = -\frac{4}{3}\pi\rho(\alpha-a) \\ \frac{dU_1}{d\beta} = -\frac{4}{3}\pi\rho(\beta-b) \\ \frac{dU_1}{d\gamma} = -\frac{4}{3}\pi\rho(\gamma-c), \end{cases}$$

und daher

$$14. \quad \frac{d^2U_1}{d\alpha^2} + \frac{d^2U_1}{d\beta^2} + \frac{d^2U_1}{d\gamma^2} = -4\pi\rho.$$

Mithin hat man für $U = U_1 + U_2$, wenn μ ein innerer Punkt ist,

$$15. \quad \frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\beta^2} + \frac{d^2U}{d\gamma^2} = -4\pi\rho.$$

Einundvierzigstes Capitel.

Attraction eines homogenen Ellipsoides auf einen inneren Punkt.

§ 307. Man kann vor allem beweisen, ähnlich wie bei einer Sphäre, dass eine homogene Schicht eines Ellipsoides, von welcher Dicke immer, begrenzt durch zwei placierte ellipsoidale Oberflächen, auf einen zwischen dem Mittelpunkte und der inneren Begrenzungsfläche liegenden Punkt gar keine Attraction ausübt, indem alle Attraktionen dieser Schicht auf diesen Punkt sich wechselseitig zerstören. Die wirkende Attraction geht demnach nur von den Punkten des Ellipsoides aus, welche zwischen dem Mittelpunkte und der durch den angezogenen Punkt gelegten concentrischen ellipsoidalen Oberfläche enthalten sind.

§ 308. Die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoides sei nun

$$1. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wenn dessen Mittelpunkt der Ursprung der Coordinaten und a, b, c dessen Achsen sind.

Die Coordinaten des angezogenen Punktes, der im Innern des Ellipsoides liegt, und den wir zum Ursprunge der Polarcoordinaten nehmen, seien α, β, γ .

Für einen beliebigen Punkt dieser Oberfläche hat man

$$2. \quad \begin{cases} x = \alpha + u \cos g \\ y = \beta + u \cos h \\ z = \gamma + u \cos k \end{cases}$$

indem mit u der Radius vector, und die Winkel, welche dieser mit den rechtwinkligen Achsen einschließt, mit g, h, k bezeichnet werden.

Dabei sind die Cosinus dieser Winkel

$$g = \frac{x - \alpha}{u}, \quad h = \frac{y - \beta}{u}, \quad k = \frac{z - \gamma}{u},$$

und hatten wir im vorigen Capitel in 7. drei Gleichungen in Polarcordinaten. Dabei ist in Beziehung auf u die Integration von $u = 0$ bis $u = r$ zu nehmen, wo r den Radius eines beliebigen Punktes der Oberfläche des anziehenden Körpers bedeutet.

Setzt man die Werte aus den Gleichungen 2. in die Gleichung 1. ein, so erhält man

$$3. \quad p u^2 + 2 q u = l,$$

indem man nämlich

$$4. \quad \begin{cases} p = \frac{\cos^2 g}{a^2} + \frac{\cos^2 h}{b^2} + \frac{\cos^2 k}{c^2} \\ q = \frac{\alpha \cos g}{a^2} + \frac{\beta \cos h}{b^2} + \frac{\gamma \cos k}{c^2} \\ l = 1 - \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) \end{cases}$$

setzt:

Daraus hat man

$$5. \quad u = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + pl}}{p}.$$

p ist eine positive GröÙe. Auch l ist positiv, da der angezogene Punkt, dessen Coordinaten α, β, γ sind, im Innern des Ellipsoides und höchstens auf dessen Oberfläche sich befindet. Man muss also die Wurzel in 5. positiv nehmen, indem u immer positiv ist.

Die Componenten 6. des § 302 werden demnach

$$A = f \mu \rho \iint \frac{q - \sqrt{q^2 + pl}}{p} \cos g \sin \Theta d\Theta d\phi$$

$$B = f \mu \rho \iint \frac{q - \sqrt{q^2 + pl}}{p} \cos h \sin \Theta d\Theta d\phi$$

$$C = f \mu \rho \iint \frac{q - \sqrt{q^2 + pl}}{p} \cos k \sin \Theta d\Theta d\phi.$$

§ 309. Man kann aber, da der angezogene Punkt ein innerer ist, die Größe unter dem Wurzelzeichen als in allen drei Componenten A, B, C verschwindend betrachten.

Denn durch Einsetzung dieses Wertes in die Gleichungen 7. des vorigen Capitels, würden wir für diesen Theil von A haben

$$f \pi \rho \iint \frac{\sqrt{q^2 + p l}}{p} \cos g \, d\omega.$$

Dieser Ausdruck ist aber gleich Null, da es immer zwei unendlich kleine Flächen $d\omega$ gibt, deren Radien einander genau entgegengesetzt sind, wo also die Cosinus der Winkel g, h, k von entgegengesetzten Zeichen sind, während die Größe $(q^2 + p l)$ und auch ρ unter dem Wurzelzeichen ungeändert bleibt, mithin die daraus sich ergebenden Attractionen sich wechselseitig zerstören.

Setzt man also den Wert von u aus 5. in die erste der Gleichungen 7. des vorigen Capitels ein, so hat man

$$A = f \mu \rho \left[\frac{\alpha}{a^2} \iint \frac{\cos^2 g}{p} \, d\omega + \frac{\beta}{b^2} \iint \frac{\cos g \cosh}{p} \, d\omega + \frac{\gamma}{c^2} \iint \frac{\cos g \cos k}{p} \, d\omega \right].$$

Die beiden letzten Integrale in dieser Klammer verschwinden ebenfalls, wenn man bedenkt, dass sie aus Elementen bestehen, die zu zwei gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen sind, und mithin sich gegenseitig zerstören. So bestehen diese Integrale aus Elementenpaaren, die denselben Werten von h und k , aber supplementären Werten von g entsprechen, und dabei der Nenner p ungeändert bleibt. Diese beiden Integrale kann man also weglassen, und indem ähnliche Reductionen auch bei den beiden anderen Componenten stattfinden, hat man

$$6. \quad \begin{cases} A = f \mu \rho \frac{\alpha}{a^2} \iint \frac{\cos^2 g \, d\omega}{p} \\ B = f \mu \rho \frac{\beta}{b^2} \iint \frac{\cos^2 h \, d\omega}{p} \\ C = f \mu \rho \frac{\gamma}{c^2} \iint \frac{\cos^2 k \, d\omega}{p} \end{cases}$$

§ 310. Ersetzt man $\cos g, \cosh, \cos k$ und $d\omega$ durch ihre Werte, so hat man

$$\begin{aligned} \cos g &= \cos \Theta \\ \cosh &= \sin \Theta \cos \phi \\ \cos k &= \sin \Theta \sin \phi \\ d\omega &= \sin \Theta \, d\Theta \, d\phi, \end{aligned}$$

und setzt man auch für p seinen Wert, so erhält man

$$7. \begin{cases} A = f \mu \rho \alpha \iint \frac{b^2 c^2 \cos^2 \Theta \sin \Theta d \Theta d \phi}{b^2 c^2 \cos^2 \Theta + a^2 c^2 \cos^2 \phi \sin^2 \Theta + a^2 b^2 \sin^2 \phi \sin^2 \Theta} \\ B = f \mu \rho \beta \iint \frac{a^2 c^2 \sin^3 \Theta \cos^2 \phi d \Theta d \phi}{b^2 c^2 \cos^2 \Theta + a^2 c^2 \cos^2 \phi \sin^2 \Theta + a^2 b^2 \sin^2 \phi \sin^2 \Theta} \\ C = f \mu \rho \gamma \iint \frac{a^2 b^2 \sin^3 \Theta \sin^2 \phi d \Theta d \phi}{b^2 c^2 \cos^2 \Theta + a^2 c^2 \cos^2 \phi \sin^2 \Theta + a^2 b^2 \sin^2 \phi \sin^2 \Theta} \end{cases}$$

Die Integrale werden in Bezug auf ϕ genommen zwischen $\phi = 0$ bis $\phi = 2\pi$, und in Bezug auf Θ von $\Theta = 0$ bis $\Theta = \pi$. Da aber der Coefficient von $d\Theta$ für Θ und $\pi - \Theta$ gleiche Werte hat, und der Coefficient von $d\phi$ für ϕ und $\pi \pm \phi$ gleiche Werte hat, so braucht man von Θ von $\Theta = 0$ bis $\Theta = \frac{\pi}{2}$ zu nehmen und das

Resultat zu verdoppeln, dann ϕ gleichfalls von $\phi = 0$ bis $\phi = \frac{\pi}{2}$ zu nehmen und das Resultat zu vervierfachen.

§ 311. Wir geben den Componenten eine zur Integration geeignetere Form, und zu dem Ende setzen wir A in nachstehender Form

$$A = f \mu \rho 8 b^2 c^2 \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \Theta \sin \Theta d \Theta \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \phi}{b^2 c^2 \cos^2 \Theta + a^2 c^2 \cos^2 \phi \sin^2 \Theta + a^2 b^2 \sin^2 \phi \sin^2 \Theta}.$$

Setzen wir nun $\tan \phi = s$, wo dann $\sin^2 \phi = \frac{s^2}{1+s^2}$, $\cos^2 \phi = \frac{1}{1+s^2}$ ist, so hat man nach der Formel

$$\int_a^{\infty} \frac{ds}{a^2 + b s^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \left(s \sqrt{\frac{b}{a}} \right),$$

wenn man den Nenner der Componenten in 7. mit τ bezeichnet und wir zuerst die Integration nach ϕ ausführen

$$\begin{aligned} & a^2 b^2 c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \phi}{\tau} = \\ & = a^2 b^2 c^2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{c^2 (b^2 \cos^2 \Theta + a^2 \sin^2 \Theta) + b^2 (a^2 \sin^2 \Theta + c^2 \cos^2 \Theta) s^2} = \\ & = \frac{\pi a^2 b c}{2 \sqrt{(c^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta) (a^2 \sin^2 \Theta + c^2 \cos^2 \Theta)}}. \end{aligned}$$

Die Componenten B und C kann man ohne Rechnung aus A herleiten, indem man für B die Coordinate β an die Stelle von α

setzt und die Buchstaben a und b vertauscht, und für C γ für α setzt und die Buchstaben a und c vertauscht.

In dieser Weise erhält man für die drei Componenten

$$8. \begin{cases} A = 4 \pi f \mu \rho b c \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \Theta \sin \Theta d \Theta}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)(a^2 \sin^2 \Theta + c^2 \cos^2 \Theta)}} \\ B = 4 \pi f \mu \rho a c \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \Theta \sin \Theta d \Theta}{\sqrt{(b^2 \sin^2 \Theta + a^2 \cos^2 \Theta)(b^2 \sin^2 \Theta + c^2 \cos^2 \Theta)}} \\ C = 4 \pi f \mu \rho a b \gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \Theta \sin \Theta d \Theta}{\sqrt{(c^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)(c^2 \sin^2 \Theta + a^2 \cos^2 \Theta)}} \end{cases}$$

Da diese Werte positiv sind, so sieht man daraus, dass sie den angezogenen Punkt dem Mittelpunkte des Ellipsoides zu nähern streben.

Beobachtet man ferner, dass die Masse des Ellipsoides, die wir mit M bezeichnen, gleich ist

$$\frac{4}{3} \pi \rho a b c,$$

so kann man die Formeln 8. auch schreiben

$$9. \begin{cases} A = \frac{3 M f \mu \alpha}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \Theta \sin \Theta d \Theta}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)(a^2 \sin^2 \Theta + c^2 \cos^2 \Theta)}} \\ B = \frac{3 M f \mu \beta}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \Theta \sin \Theta d \Theta}{\sqrt{(b^2 \sin^2 \Theta + a^2 \cos^2 \Theta)(b^2 \sin^2 \Theta + c^2 \cos^2 \Theta)}} \\ C = \frac{3 M f \mu \gamma}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \Theta \sin \Theta d \Theta}{\sqrt{(c^2 \sin^2 \Theta + b^2 \cos^2 \Theta)(c^2 \sin^2 \Theta + a^2 \cos^2 \Theta)}} \end{cases}$$

§ 312. In den Ausdrücken der Gleichungen 8. und 9. sind bloß die Verhältnisse der Achsen enthalten, so dass, wenn man statt a, b, c ma, mb, mc schreibt, A, B, C denselben Wert beibehalten. Wenn also das Ellipsoide mit einer Ellipsoidalschichte vermehrt wird, bleibt die Kraft der Attraction ungeändert und die hinzugekommene Schichte übt auf den inneren Punkt keinen Einfluss, was wir schon bewiesen. Die Attraction wird nur von der Masse ausgeübt, die bis zur concentrischen Ellipsoidalschichte reicht, auf deren Oberfläche sich der angezogene Punkt befindet.

Ferner hat man, wenn man die Gleichungen 6., nachdem die erste durch α , die zweite durch β , die dritte durch γ dividirt wird, zusammenlegt, indem vermöge 4.

$$\frac{\cos^2 g}{a^2} + \frac{\cos^2 h}{b^2} + \frac{\cos^2 k}{c^2} = p$$

gesetzt ist,

$$10. \quad \frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} + \frac{C}{\gamma} = f\mu\rho \iint d\omega = f\mu\rho 4\pi.$$

Aber auch wenn man die Gleichungen 6. nach α , β , γ differenziert und dann addiert, hat man

$$11. \quad \frac{dA}{d\alpha} + \frac{dB}{d\beta} + \frac{dC}{d\gamma} = f\mu\rho 4\pi.$$

Die Gleichung 11. ist ein besonderer Fall der Gleichung 15. des vorigen Capitels.

Endlich sieht man, dass alle Punkte, welche in demselben auf einer Achse senkrechten Schnitte liegen, gleichmäßig im Sinne dieser Achse angezogen werden, und dass daher die Componenten der Attraction proportional sind den Distanzen des angezogenen Punktes von den drei Hauptebenen des Ellipsoides. Jede Componente der Attraction nach einer der drei Achsen des Ellipsoides hängt nur von der dieser Achse parallelen Coordinate des angezogenen Punktes und ist dieser Coordinate proportional.

§ 313. Die Integration nach Θ ist in endlicher Form nicht ausführbar.

Man kann aber den Gleichungen 9. eine bessere Form geben, wenn man $\cos \Theta = t$, und $\frac{b^2 - a^2}{a^2} = \sigma^2$, $\frac{c^2 - a^2}{a^2} = \sigma'^2$ setzt.

Für $\cos \Theta = t$ ist $\sin \Theta d\Theta = -dt$, $\sin^2 \Theta = 1 - t^2$, die Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ werden 1 und 0. Vertauscht man nun die Grenzen und ändert gleichzeitig das Zeichen des Integrals, so hat man

$$12. \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{3M\mu f\alpha}{a^3} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1 + \sigma^2 t^2)(1 + \sigma'^2 t^2)}} \\ &= \frac{3M\mu f\alpha}{a^3} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1 + \sigma^2 t^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \sigma'^2 t^2)^{\frac{1}{2}}} \\ B &= \frac{3M\mu f\beta}{a^3} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1 + \sigma^2 t^2)^{\frac{3}{2}} (1 + \sigma'^2 t^2)^{\frac{1}{2}}} \\ C &= \frac{3M\mu f\gamma}{a^3} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1 + \sigma^2 t^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \sigma'^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right.$$

welche Größen durch elliptische Functionen erster und zweiter Art ausgedrückt werden können.

§ 314. Für ein Rotationsellipsoide um die kleine Achse $2a$, wo mithin $b = c$ und $\sigma = \sigma'$ sind, übergehen obige Formeln in nachstehende

$$13. \quad \begin{cases} A = \frac{3M\mu f\alpha}{a^3} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1 + \sigma^2 t^2} \\ B = \frac{3M\mu f\beta}{a^3} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1 + \sigma^2 t^2)^2} \\ C = \frac{3M\mu f\gamma}{a^3} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1 + \sigma^2 t^2)^2} \end{cases}$$

Nach bekannten Integralformeln sind

$$\int_0^t \frac{t^2 dt}{1 + \sigma^2 t^2} = \frac{1}{\sigma^3} \left[\sigma t - \arctan \sigma t \right]$$

$$\int_0^t \frac{t^2 dt}{(1 + \sigma^2 t^2)^2} = \frac{1}{2\sigma^3} \left[\arctan \sigma t - \frac{\sigma t}{1 + \sigma^2 t^2} \right].$$

Beobachtet man nun, dass bei einem inneren Punkte nur die Masse des Ellipsoides die Attraction ausübt, welche im confocalen Ellipsoide enthalten ist, das durch die Oberfläche begrenzt ist, worauf der angezogene Punkt liegt, nennt man die in der Richtung der x -Achse liegende Halbachse dieses confocalen Ellipsoides a' , so ist eigentlich nur a' und nur die Masse des confocalen Ellipsoides in Rechnung zu bringen. Da aber beim confocalen Ellipsoide, dessen Masse wir mit M' bezeichnen, $\frac{M'}{a'^3} = \frac{M}{a^3}$ ist, so kann in den Formeln

(12.) $\frac{M}{a^3}$ ungeändert bleiben, und man erhält noch immer die Componenten. Führt man also die Integrationen in den Formeln 13. durch, so erhält man folgende Ausdrücke für den Fall des abgeplatteten, durch Rotation um die $2a$ -Achse erzeugten Ellipsoides,

$$14. \quad \begin{cases} A = \frac{3M\mu f\alpha}{a^3} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1 + \sigma^2 t^2} = \frac{3M\mu f\alpha}{a^3 \sigma^3} \left[\sigma - \arctan \sigma \right] \\ B = \frac{3M\mu f\beta}{a^3} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1 + \sigma^2 t^2)^2} = \frac{3M\mu f\beta}{2a^3 \sigma^3} \left[\arctan \sigma - \frac{\sigma}{1 + \sigma^2} \right] \\ C = \frac{3M\mu f\gamma}{a^3} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1 + \sigma^2 t^2} = \frac{3M\mu f\gamma}{2a^3 \sigma^3} \left[\arctan \sigma - \frac{\sigma}{1 + \sigma^2} \right] \end{cases}$$

B und C verhalten sich wie β zu γ , also wie die Componenten des angezogenen Punktes. Daher wird die Resultante von B und C , die wir mit D bezeichnen, gerichtet sein nach der Senkrechten, die

vom angezogenen Punkte auf die Rotationsachse gefällt wird, und nennen wir diese δ , so hat man für die Resultante von B und C

$$15. \quad D = \frac{3 M \mu f \delta}{2 a^3 \sigma^3} \left[\text{arc tang } \sigma - \frac{\sigma}{1 + \sigma^2} \right].$$

§ 315. Sind alle drei Achsen $a = b = c$, so muss aus den Formeln 12. die Attraction für die Kugel hervorgehen. In der That ist in diesem Falle $\sigma = 0$, $\sigma' = 0$, und die Formeln 13. werden

$$16. \quad \begin{cases} A = \frac{3 M \mu f \alpha}{a^3} \int_0^1 t^2 dt = \frac{M \mu f \alpha}{a^3} = \frac{M \mu f}{a^2} \cdot \frac{\alpha}{a} \\ B = \frac{3 M \mu f \beta}{a^3} \int_0^1 t^2 dt = \frac{M \mu f \beta}{a^3} = \frac{M \mu f}{a^2} \cdot \frac{\beta}{a} \\ C = \frac{3 M \mu f \gamma}{a^3} \int_0^1 t^2 dt = \frac{M \mu f \gamma}{a^3} = \frac{M \mu f}{a^2} \cdot \frac{\gamma}{a} \end{cases}$$

Die Kraft der Attraction ist also bei der Sphäre

$$\frac{M \mu f}{a^2}$$

und die Componenten sind gleich dieser Kraft multipliciert mit den Cosinus der Winkel, die der Radius mit den Achsen einschließt, und die gleich sind

$$\frac{\alpha}{a}, \quad \frac{\beta}{a}, \quad \frac{\gamma}{a}.$$

Dabei ist, wie wir bereits früher bemerkt, bei der Kraft $\frac{M \mu f}{a^2}$ bloß die Masse bis zur concentrischen Fläche zu nehmen, auf welcher der angezogene Punkt μ sich befindet, welche wir mit M' bezeichnen, und auch den Halbmesser bis zu dieser concentrischen Fläche, welchen wir a' nennen, so dass die totale Kraft

$$\frac{M' \mu f}{a'^2}$$

ist. Setzt man für M' , als Masse einer Kugel vom Halbmesser a'^3 , den Wert $\frac{3}{4} \pi \rho a'^3$ ein, so hat man

$$\frac{M'}{a'^2} \mu f = \frac{4}{3} \pi \rho f \mu a',$$

also denselben Ausdruck, wie wir ihn für die Attraction einer Sphäre auf einen inneren Punkt bereits gefunden.

Zweiundvierzigstes Capitel.

Attraction eines homogenen Ellipsoides auf einen äußeren Punkt.

§ 316. Kehren wir zu den Gleichungen 6. des § 302 zurück, so hatten wir

$$A = -f\mu\rho \iiint \cos g \, du \sin \Theta \, d\psi.$$

Integriert man diesen Ausdruck zuerst nach u , so wird man von $u = r$ bis $u = r'$ nehmen, wo unter r und r' die Distanzen des angezogenen Punktes zu zwei Punkten verstanden werden, in welchen eine durch die Winkel Θ und ψ bestimmte Gerade die Oberfläche des Ellipsoides trifft.

Mit Rücksicht also auf den in 5., § 308, gefundenen Wert von u hat man, indem $\cos g = \cos \Theta$ ist,

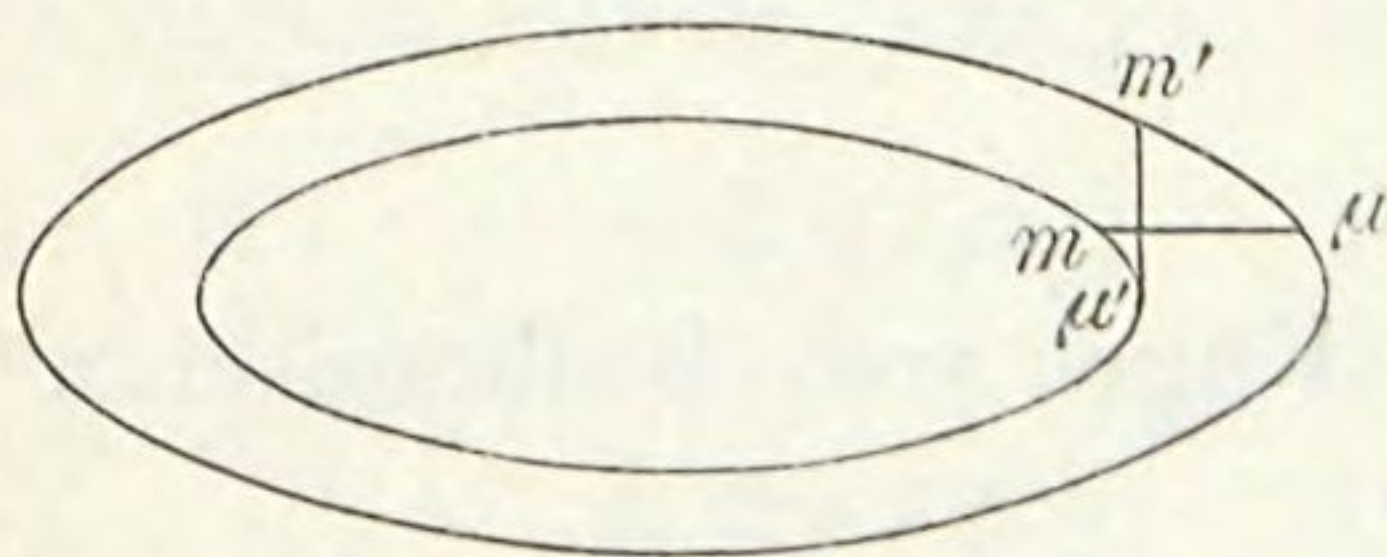
$$\begin{aligned} A &= f\mu\rho \iint (r' - r) \cos \Theta \sin \Theta \, d\Theta \, d\psi = \\ &= 2f\mu\rho \iint \frac{\sqrt{q^2 + p^2}}{p} \cos \Theta \sin \Theta \, d\Theta \, d\psi. \end{aligned}$$

Man muss dann diesen Ausdruck nach Θ und ψ integrieren, was schwieriger als bei einem inneren Punkte ist. Ivory stellte aber ein Theoreme auf, vermöge dessen die Attraction eines homogenen Ellipsoides auf einen äußeren Punkt, auf die Attraction auf einen inneren Punkt zurückgeführt werden kann.

Theoreme von Ivory.

§ 317. Stellen wir uns zwei Ellipsoide vor, von welchen die Achse des einen Ellipsoides a, b, c , die des andern a', b', c' seien, alle gerichtet nach denselben rechtwinkligen Achsen.

Fig. 78.



Setzen wir ferner voraus, dass die Hauptschnitte beider Ellipsoide dieselben Brennpunkte haben, dass man also hat

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + h, \quad c^2 = a^2 + k \\ b'^2 &= a'^2 + h, \quad c'^2 = a'^2 + k \\ a^2 - a'^2 &= b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2. \end{aligned}$$

Endlich nennen wir correspondierende zwei Punkte, deren Coordinaten proportional den Halbachsen sind, denen sie parallel sind.

Sind nun x, y, z die Coordinaten des einen Ellipsoides, x', y', z' die des anderen, so sind zwei Punkte x, y, z, x', y', z' correspondierend, wenn zwischen denselben die Verhältnisse stattfinden

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}, \quad \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'}.$$

Ist ein Punkt auf der Oberfläche des einen Ellipsoiden, so wird der correspondierende Punkt auf der Oberfläche des anderen Ellipsoides liegen.

§ 318. Nimmt man also auf den beiden Ellipsoiden zwei beliebige Punkte, $m(x, y, z)$ auf dem Ellipsoide, dessen Achsen a, b, c sind und μ auf dem Ellipsoide, dessen Achsen a', b', c' sind, und seien die Coordinaten von μ α, β, γ , und dann auch ihre correspondierenden Punkte $m'(x', y', z')$ und $\mu'(\alpha', \beta', \gamma')$, so sind die Distanzen $m\mu$ und $m'\mu'$ einander gleich

Denn man hat

$$m\mu^2 - m'\mu'^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 - (\alpha' - x')^2 - (\beta' - y')^2 - (\gamma' - z')^2.$$

Man kann dieser Gleichung eine andere Form geben, wenn man bedenkt, dass man bei den correspondierenden Punkten $\mu'(\alpha', \beta, \gamma')$ und $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ die Verhältnisse hat

$$\frac{\alpha'}{a} = \frac{\alpha}{a'}, \quad \frac{\beta'}{b} = \frac{\beta}{b'}, \quad \frac{\gamma'}{c} = \frac{\gamma}{c'},$$

dann bei m' und m

$$\frac{x'}{a'} = \frac{x}{a}, \quad \frac{y'}{b'} = \frac{y}{b}, \quad \frac{z'}{c'} = \frac{z}{c},$$

daher

$$\begin{aligned} m\mu^2 - m'\mu'^2 &= \\ &= \left(\frac{a'\alpha'}{a} - x\right)^2 + \left(\frac{b'\beta'}{b} - y\right)^2 + \left(\frac{c'\gamma'}{c} - z\right)^2 - \left(a' - \frac{a'}{a}x\right)^2 - \\ &\quad - \left(\beta' - \frac{b'}{b}y\right)^2 - \left(\gamma' - \frac{c'}{c}z\right)^2 = \\ &= \left(\frac{\alpha'^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)(a'^2 - a^2) + \left(\frac{\beta'^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)(b'^2 - b^2) + \\ &\quad + \left(\frac{\gamma'^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)(c'^2 - c^2). \end{aligned}$$

Daher, indem $a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2$ sind,

$$\begin{aligned} m\mu^2 - m'\mu'^2 &= \\ &= (a'^2 - a^2) \left[\left(\frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2} \right) \right] - \left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Jedes der zwei eingeklammerten Glieder ist gleich 1., daher

$$m\mu^2 - m'\mu'^2 = 0, \quad m\mu^2 = m'\mu'^2, \quad m\mu = m'\mu'.$$

§ 319. Wir hatten früher

$$A = f\mu\rho \iiint \frac{(\alpha - x)}{u^3} dx dy dz.$$

Betrachten wir nun x als die einzige Variable, so hat man

$$u du = -(\alpha - x) dx,$$

daher

$$\int \frac{(\alpha - x)}{u^3} dx = - \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u}.$$

Bezeichnet man die Werte von u an den Grenzen des Integrals, nämlich an den beiden Punkten, wo die Oberfläche des Ellipsoides durch eine der x -Achse parallele Linie getroffen wird, mit R und r , und nennen wir die Componenten des Ellipsoides (a' , b' , c') auf den inneren Punkt μ' A , B , C , so hat man, da die Coordinaten x' , y' , z' sind

$$A = f\mu\rho \iint \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) dy' dz'.$$

Nennen wir die Componenten der Attraction des zweiten Ellipsoides (a , b , c) auf den äußeren Punkt μ , welcher dem Punkte μ' correspondiert, A' , B' , C' und die Werte von u an den Grenzen R' und r' , so wird man hier haben

$$A' = f\mu\rho \iint \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{R'} \right) dy dz.$$

Nun ist aber $r = m'\mu'$, $r' = m\mu$, mithin

$$r = r'$$

und ebenso $R = R'$.

Ueberdies hat man $dy = \frac{b}{b'} dy'$, $dz = \frac{c}{c'} dz'$, folglich

$$A' = f\mu\rho \iint \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{R'} \right) dy dz = f\mu\rho \iint \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \frac{bc}{b'c'} dy' dz'$$

daher

$$A' = \frac{bc}{b'c'} A$$

$$B' = \frac{ac}{a'c'} B$$

$$C' = \frac{ab}{a'b'} C.$$

In dieser Weise ist also die Attraction eines Ellipsoides auf einen äußeren Punkt μ , reducirt auf die Attraction eines homofocalen Ellipsoides auf den correspondierenden Punkt μ' , und besteht dieses Theorem für jedes Attractionsgesetz.

§ 320. Um diese Reduction durchzuführen, muss man die Halbachsen des homofocalen Ellipsoides $a' b' c'$ berechnen, indem man die des ersten a, b, c , wie auch die Distanzen des Punktes $\mu, \alpha, \beta, \gamma$ kennt.

Man hat also

$$\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{b'^2} + \frac{\gamma^2}{c'^2} = 1.$$

Ferner hat man

$$b'^2 - a'^2 = b^2 - a^2 = h, \quad c'^2 - a'^2 = c^2 - a^2 = k,$$

$$b'^2 = a'^2 + h, \quad c'^2 = a'^2 + k,$$

folglich

$$\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{a'^2 + h} + \frac{\gamma^2}{a'^2 + k} = 1.$$

Diese Gleichung dritten Grades muss bekanntlich eine reelle Wurzel sein. Dies sieht man daraus, dass für $a'^2 = 0$ das linke Glied unendlich, also größer als 1, für a'^2 unendlich, kleiner als 1, wird, daher eine positive Wurzel zwischen 0 und ∞ liegt. Da ferner das linke Glied mit dem Wachsen von a'^2 continuierlich abnimmt, so kann die Gleichung nur eine reelle Wurzel haben. Daher existiert nur ein confocales Ellipsoide, welches durch einen gegebenen Punkt geht.

Hat man a' , so ist

$$b'^2 = a'^2 + h, \quad c'^2 = a'^2 + k.$$

IV. Theil.

DYNAMIK

des materiellen Punktes.

Dreiundvierzigstes Capitel.

Gleichungen der geradlinigen Bewegung.

§ 321. Die Dynamik befasst sich mit den Relationen zwischen einer Bewegung und den Kräften, die solche erzeugen. Während also die Kinematik ihre Forschungen auf die Bewegungen, unabhängig von den wirkenden Kräften und deren Zusammensetzungen, richtet, zieht die Dynamik die treibenden Kräfte in die Sphäre ihrer Betrachtungen. Sie maßt sich nicht an, das Geheimnis des Wirkens dieser Kräfte, die unsichtbare Triebfeder ihres Waltens aufzudecken, wohl aber unternimmt sie es, die Kräfte zu messen und die Gesetze ihrer Wirksamkeit zu ergründen. So hat Kepler durch mühevollen rastlosen Arbeit Thatfachen von Bewegungen festgesetzt, und der größte Denker aller Zeiten, Newton, war es, der das unveränderliche, fatalistische Naturgesetz ergründet, nach welchem die blindtreibenden Kräfte diese Bewegungen hervorbringen.

Wir beginnen mit der Bewegung eines materiellen Punktes.

§ 322. Die Gleichung für die gleichförmig geradlinige Bewegung kennen wir aus der Kinematik. Sie ist

$$1. \quad x = vt + a,$$

wo man unter a den Abstand von einem fixen Punkte versteht, den wir zum Coordinatenanfang nehmen, oder von welchem aus wir den durch das Mobile zurückgelegten Weg messen. Wir setzen dabei voraus, der Punkt habe sich zur Zeit $t = 0$ in der Distanz a vom Ursprunge O befunden.

v ist die Geschwindigkeit, das ist der Weg, den das Mobile in der Zeiteinheit beschreibt. x ist der Abstand vom Ursprunge, an dessen Endpunkte sich das Mobile am Ende der Zeit t befindet.

Die Zeit zählen wir von dem Augenblicke an, an welchem sich das Mobile in der Distanz a vom fixen Punkte O befunden.

Alle auf die gleichförmige geradlinige Bewegung sich beziehende Fragen können durch diese Gleichung 1. gelöst werden.

Wir wiederholen, was schon in der Kinematik hervorgehoben wurde, dass, so oft ein Mobile von einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung belebt ist, das Mobile nothwenig von keiner Kraft sollicitiert ist.

Geradlinige, gleichförmig variirte Bewegung.

§ 323. Wird der Punkt von Kräften sollicitiert, und ist seine Bewegung eine geradlinige, gleichförmig variirte, so sind, wie aus der Kinematik zu ersehen, die Gleichungen der Bewegung

$$2. \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{dx}{dt} \\ \varphi = \frac{dv}{dt} \\ \varphi = \frac{d^2x}{dt^2}, \end{array} \right.$$

wo unter x , wie bei der gleichförmigen Bewegung, der vom Mobile durchlaufene Weg, gerechnet von einem festen Punkte O , verstanden wird.

v stellt die Geschwindigkeit des Mobile zur Zeit t , und φ die Acceleration, respective die Kraft vor, welche, auf die Masseinheit wirkend, diese Bewegung erzeugt.

§ 324. Dieselben Gleichungen gelten auch für eine geradlinige ungleichförmig variirte Bewegung. Ferner gelten sie auch für einen in geradliniger Bewegung begriffenen soliden Körper von beliebiger Größe, die Bewegung möge gleichförmig oder ungleichförmig variirt sein, dessen sämtliche Punkte von einer und derselben gemeinsamen geradlinigen Bewegung belebt sind. φ wird hier dieselbe Bedeutung haben, und die erzeugende Kraft wird hier repräsentiert durch das Product von φ , multipliciert mit seiner Masse M , ist also gleich $M\varphi$.

φ ist positiv oder negativ, je nachdem die Acceleration im Sinne der dem Punkte oder dem Körper ertheilten Geschwindigkeit v oder im entgegengesetzten Sinne wirkt.

φ hat zwei Ausdrücke, sie ist erste Derivierte der Geschwindigkeit v und zweite Derivierte des vom Mobile beschriebenen Weges.

§ 325. Aus einer gegebenen Acceleration kann man durch Integration der Gleichungen 2. die Werte von x und v als Functionen der Zeit bestimmen, wobei man aber, da die Integration zwei Constanten enthalten wird, die Anfangswerte von x und v kennen muss, und dann ist alles gelöst.

Bei der geradlinigen, gleichförmig variirten Bewegung ist die Acceleration, der Zuwachs der Geschwindigkeit, in jeder Zeiteinheit constant, und wir haben schon in der Kinematik die Ausdrücke der Integration gefunden

$$3. \quad \begin{cases} v = v_0 + \varphi t \\ x = c + v_0 t + \frac{\varphi t^2}{2}. \end{cases}$$

Die Gleichung für v findet man, wenn die zweite der Gleichungen 2. integriert und die Constante v_0 beigelegt wird, und bedeutet v_0 die Geschwindigkeit des Mobile zur Zeit $t = 0$.

Die zweite Gleichung für x erhält man, wenn die dritte der Gleichungen 2. zweimal integriert und zwei willkürliche Constanten beigelegt werden, und ist c die Distanz des Mobile von einem fixen Punkte O zur Zeit $t = 0$.

Zählt man die Zeit und den beschriebenen Weg vom Anfange der Bewegung des Mobile, so dass zur Zeit $t = 0$, $v_0 = 0$ und $c = 0$ waren, so werden obige Ausdrücke

$$4. \quad \begin{cases} v = \varphi t \\ x = \varphi \frac{t^2}{2}. \end{cases}$$

Bewegung eines schweren Punktes im leeren Raume.

§ 326. Wir haben bereits gesehen, dass Körper, die nur von der Kraft der Schwere sollicitiert werden, in verticaler Richtung zur Oberfläche der Erde sich bewegen.

Die Kraft der Schwere, welche den Punkt oder Körper in verticaler Richtung von oben nach unten bewegt, ist eine constante Kraft, unter deren Einfluss dem Punkte oder dem Körper in jeder Zeiteinheit ein Zuwachs an Geschwindigkeit, also eine Acceleration ertheilt wird, die man bei der Schwere mit g bezeichnet.

Die sollicitierende Kraft P , welche auf einen Körper von der Masse M wirkt, hat demnach zum Ausdrucke Mg .

Bewegt sich nun ein Massepunkt, sollicitiert nur von der Kraft der Schwere, so ist seine Bewegungsgleichung im leeren Raume

$$5. \quad \begin{cases} g = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \\ \text{und daraus} \\ v = \frac{dx}{dt} = a + gt \\ x = b + at + g \frac{t^2}{2}. \end{cases}$$

Dabei sind a und b die willkürlichen Constanten, die in den Gleichungen 3. als v_0 und c vorkommen, und haben hier dieselbe Bedeutung wie diese dort. Setzen wir voraus, dass zur Zeit $t = 0$, $x = 0$ und $v = 0$ waren, mithin $a = 0$, $b = 0$ sind, alsdann hat man

$$6. \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = g \\ \frac{dx}{dt} = v = gt \\ x = \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Durch Verbindungen dieser Gleichungen findet man leicht

$$7. \quad \begin{cases} x = \frac{v^2}{2g} = \frac{gt^2}{2} \\ v^2 = 2gx \\ v = \sqrt{2gx} \\ v dv = \frac{dx}{dt} \cdot g dt = g dx \\ t = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2x}{g}}. \end{cases}$$

Von allen diesen Formeln werden wir bei Dynamik Gebrauch machen.

Insbesondere nennt man das Product $\sqrt{2gx}$ die der Höhe x zugehörige Geschwindigkeit und $\frac{v^2}{2g}$ die der Geschwindigkeit v zugehörige Höhe.

§ 327. Wird ein schwerer Punkt im leeren Raume von unten nach oben in verticaler Richtung mit einer anfänglichen Geschwindigkeit $= a$ geworfen, so ist die Acceleration g negativ zu nehmen, da sie in entgegengesetztem Sinne der Geschwindigkeit wirkt, von welcher der Punkt belebt wurde, und man hat daher, wenn der beschriebene Weg von einem Punkte gerechnet wird, in welchem

das Mobile zur Zeit $t = 0$ sich befand, wo also die Constante b in den Gleichungen 5. gleich Null ist,

$$8. \quad \begin{cases} v = a - g t \\ x = a t - \frac{g t^2}{2}. \end{cases}$$

Der Punkt wird bis zu einer Höhe steigen, an deren Endpunkte die anfangs dem Mobile ertheilte Geschwindigkeit a durch die mit der Zeit gehäuften negativen Accelerationen zerstört wird.

Der Zeitpunkt, wann dieses eintritt, und die Höhe, die das Mobile erreicht, sind aus den Gleichungen 8. zu entnehmen.

Setzt man nämlich in der ersten Gleichung $v = 0$, bezeichnet die erreichte Höhe mit h , und die zur Erreichung dieser Höhe erforderlich gewesene Zeit mit t' , so hat man

$$9. \quad \begin{cases} t' = \frac{a}{g} \\ h = \frac{a^2}{g} - \frac{a^2}{2g} = \frac{a^2}{2g}. \end{cases}$$

Die Werte von t' und h erscheinen also ganz bestimmt. Nachdem das Mobile bis zum Endpunkte dieser Höhe gelangt ist, wird es dann, unter dem Einflusse der Kraft der Schwere, in gerader, vertical absteigender Richtung sich bewegen, und die Höhe $h = \frac{a^2}{2g}$ beschreiben.

Setzt man diesen Wert in die zweite der Gleichungen 7. ein, so wird

$$10. \quad v^2 = 2 g x = 2 g \cdot \frac{a^2}{2g} = a^2, \quad v = a.$$

Das Mobile wird demnach, nach Rücklegung der Höhe $\frac{a^2}{2g}$, nachdem es zum Punkte zurückgelangt ist, von dem aus es seine Bewegung begonnen, die ihm ursprünglich ertheilte Geschwindigkeit zurückerlangen.

Die Zeit, die das Mobile braucht, um die Höhe h abwärts zurückzulegen, kann ebenfalls aus den Gleichungen 7. entnommen werden.

Setzt man nämlich in der letzten Gleichung der Gleichungen 7. $v = a$, nämlich die Geschwindigkeit, die das Mobile, nachdem es die Höhe $h = \frac{a^2}{2g}$ herabgefallen, erlangt hat, so kommt

$$11. \quad t = \frac{a}{g}.$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem Ausdrucke $t' = \frac{a}{g}$, so ergibt sich

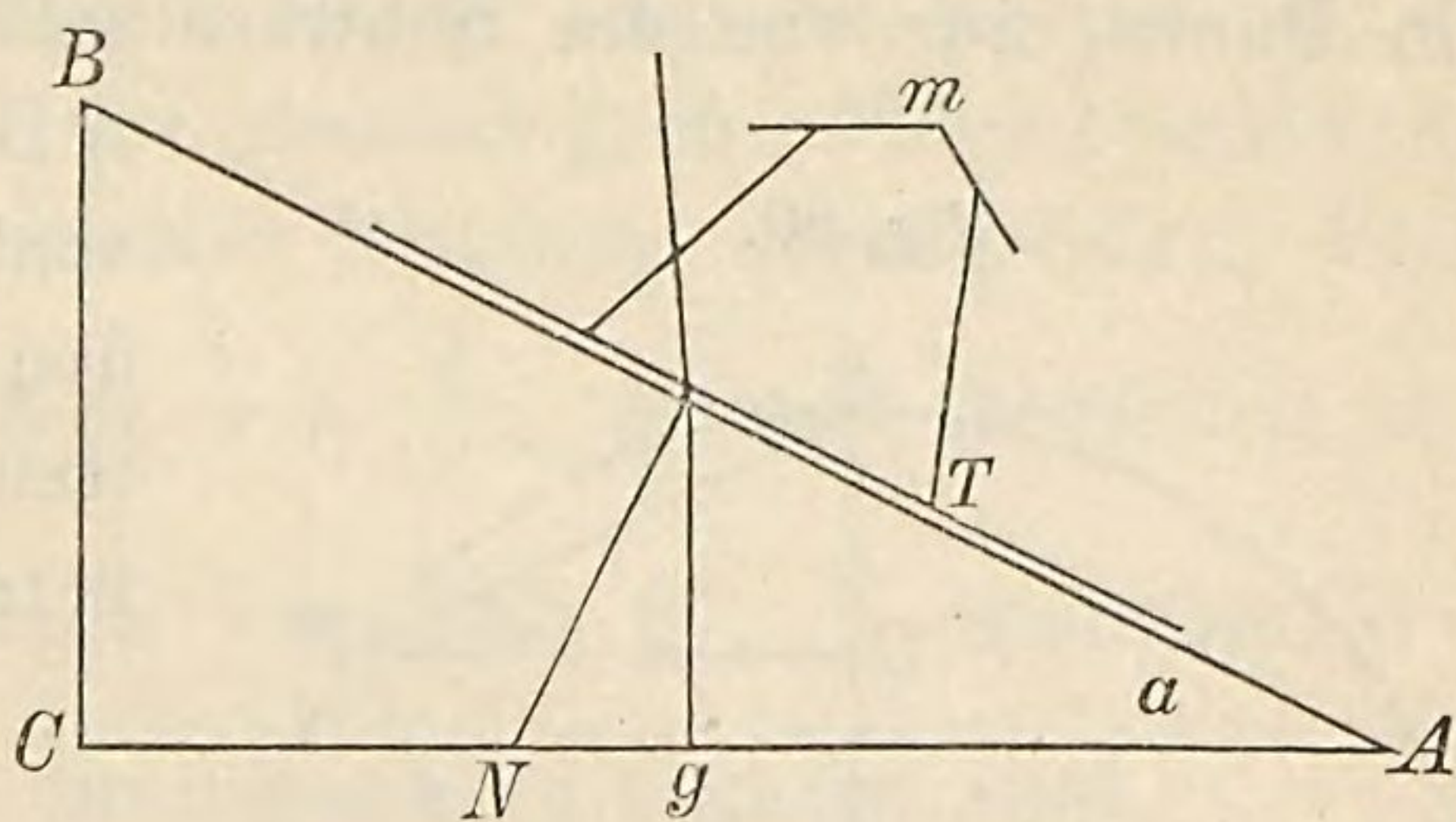
$$t = t',$$

das heißt, dass das Mobile zum Aufsteigen wie zum Herabfallen dieselbe Zeit braucht. Mit anderen Worten: Ein schwerer Punkt oder schwerer Körper, der im leeren Raume mit einer Geschwindigkeit a vertical aufwärts im leeren Raume geworfen wird, steigt bis zu derselben Höhe, von der er herabfallen müsste, um die Geschwindigkeit a zu erlangen.

Bewegung eines schweren Punktes auf einer schiefen Ebene.

§ 328. Es sei die schiefe Ebene $A B C$, worauf sich ein Massepunkt m , nur von der Kraft der Schwere sollicitiert, bewegt. Die vertical wirkende Acceleration g zerlegen wir in zwei Kräfte, die eine gerichtet nach der Länge $B A$, die andere darauf senkrecht. Die senkrechte Componente wird durch den Widerstand der Ebene zerstört. Die der Länge $B A$ parallel wirkende Componente von g ist die alleinige acceleratorische Kraft, welche den Punkt m bewegt.

Fig. 79.



Die beiden Componenten von g sind, wenn wir die senkrechte mit N und die nach der Länge $B A$ wirkende mit φ bezeichnen, und den Winkel $B A C$ der schiefen Ebene a nennen,

$$N = g \cos a$$

$$\varphi = g \sin a;$$

die bewegende Kraft ist hier nur $\varphi = g \sin a$, während die Componente N durch die Fläche $A B$ aufgehoben wurde.

Setzt man den Wert von φ in die Gleichungen 4. ein, so kommt

$$12. \quad \begin{cases} v = g \sin a t \\ x = g \sin a \frac{t^2}{2} \\ v^2 = 2 g \sin a x. \end{cases}$$

Das Mobile bewegt sich also, als wenn es in verticaler Richtung herabgefallen, und dabei nicht von einer acceleratorischen Kraft g , sondern von einer acceleratorischen Kraft $\varphi = g \sin a$ sollicitiert wäre.

Ist die Länge $AB = x'$, die Höhe $BC = x$, so ist

$$x = x' \sin a.$$

Durchläuft nun der Punkt, nur von der Schwere sollicitiert, vertical die Höhe BC , so erlangt er am Ende der Zeit t , vermöge der Gleichungen 7., eine Geschwindigkeit, bestimmt durch die Gleichung

$$v^2 = 2 g x = 2 g x' \sin a.$$

Die Geschwindigkeit, die das Mobile erlangt, wenn es die Länge AB unter dem Einflusse der Kraft $g \sin a$ durchläuft, ist

$$v^2 = 2 g \sin a x'.$$

Die vom Mobile, nachdem es die Länge AB durchlaufen, erlangte Geschwindigkeit ist also gleich derjenigen, die es erlangt hätte, wenn es von der Höhe BC vertical herabgefallen wäre.

§ 329. ABD sei ein verticaler Kreis vom Durchmesser AD . Ein Punkt, nur von der Schwere sollicitiert, durchlaufe die Strecke

$AB = x$. Wir ziehen die Linie BC senkrecht zur AD und nennen den Winkel $ABC = a$, so kommt, wenn wir ABC als schiefe Ebene betrachten,

$$x = g \sin a \frac{t^2}{2},$$

$AB = x$ ist aber $= AD \sin a$, mithin

$$AD \sin a = g \sin a \frac{t^2}{2}, \quad AD = g \frac{t^2}{2},$$

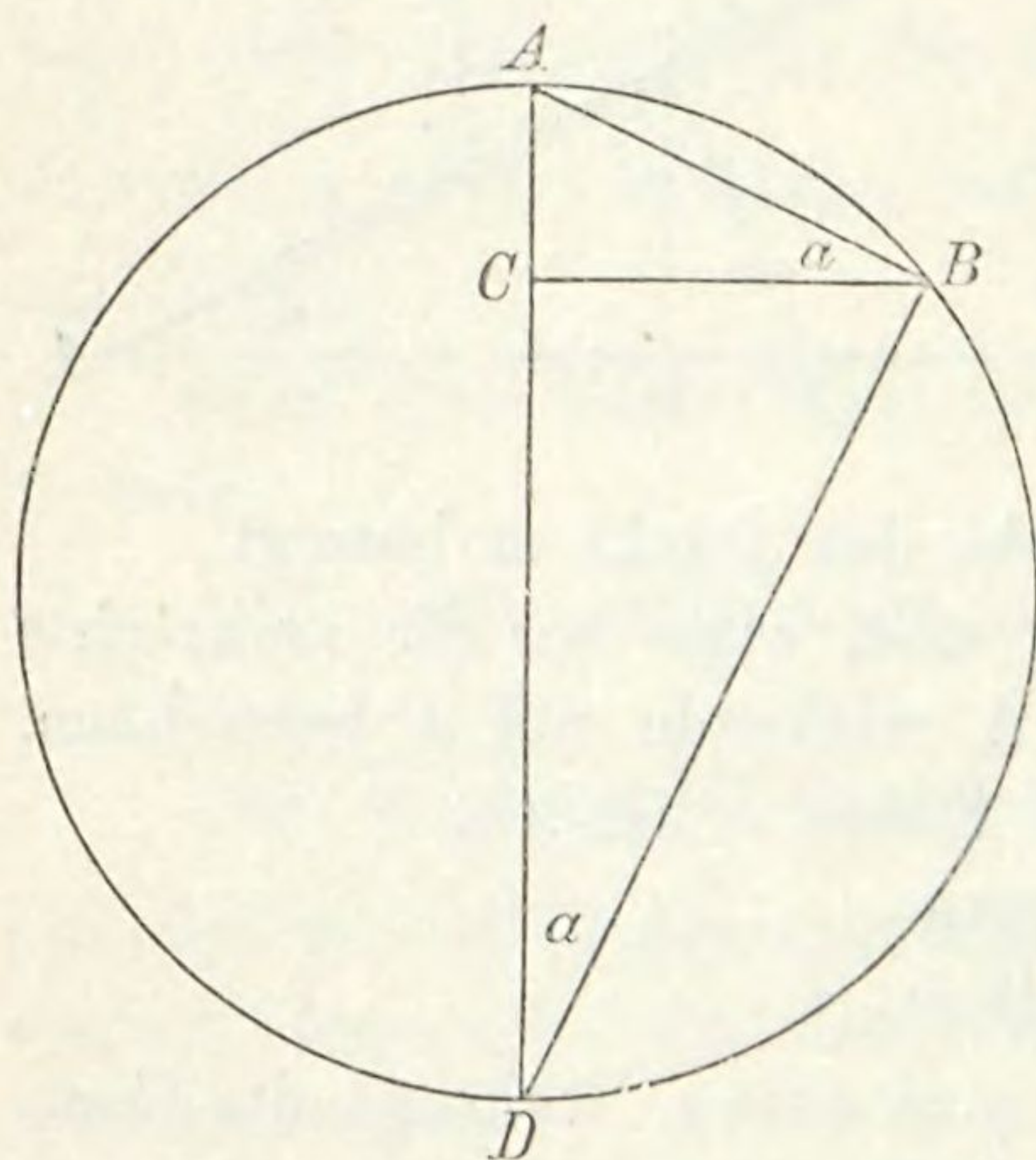
daher

$$13. \quad t = \sqrt{\frac{2 AD}{g}},$$

das heißt, die Zeit, die das Mobile braucht, um AB zu durchlaufen, ist dieselbe, die es benöthigt hätte, um den verticalen Durchmesser zu laufen, wie dieses aus der letzten der Gleichungen 7. zu ersehen, wenn man darin $x = AD$ setzt.

Ein ähnliches Resultat wird man haben, wenn das Mobile die Sehne BD durchläuft. Alle Sehnen des verticalen Kreises werden

Fig. 80.



also in einer und derselben Zeit durchlaufen, und die Zeit ist von der Länge der Sehne unabhängig.

Bestimmung der Größe g .

§ 330. Aus der Gleichung $x = g \frac{t^2}{2}$ sieht man, dass die vom Mobile beschriebenen Fallräume wie die Quadrate der Zeiten wachsen.

Setzt man in dieser Gleichung $t = 1$, so wird $x = \frac{g}{2}$. Der Punkt oder der Körper durchläuft also, vertical herabfallend, vom Zustande der Ruhe beginnend, in der ersten Zeiteinheit, das ist, wenn wir als solche die Secunde wählen, in der ersten Secunde, einen Weg, welcher der Hälfte der Acceleration g gleichkommt, und g ist gleich dem doppelten Wege, den der Körper oder der Punkt in der ersten Secunde vertical zurücklegt.

Stellt man sich nun vor, ein Punkt oder ein Körper sei, vom Zustande der Ruhe beginnend, von ziemlich großer Höhe h unter dem Einflusse der Schwere in verticaler Richtung herabgefallen, so hat er in einer Secunde einen Weg von $\frac{g}{2}$, in zwei Secunden einen Weg $= \frac{4g}{2}$, also in einer Reihe von 1, 2, 3 . . . Secunden Wege in geometrischer Progression durchlaufen, die gleich sind

$$\frac{g}{2}, \frac{4g}{2}, \frac{9g}{2} \dots$$

Ferner hat der Punkt oder Körper in der ersten Secunde $\frac{g}{2}$, in der zweiten $\frac{3g}{2}$, in der dritten $\frac{5g}{2}$, also Wege beschrieben, die in der arithmetischen Reihe

$$\frac{g}{2}, \frac{3g}{2}, \frac{5g}{2} \dots$$

ausgedrückt sind.

Hat also der Punkt oder Körper die Höhe h in t Secunden beschrieben, so ist $g = \frac{2h}{t^2}$, und man könnte in dieser Weise den Wert von g bestimmen.

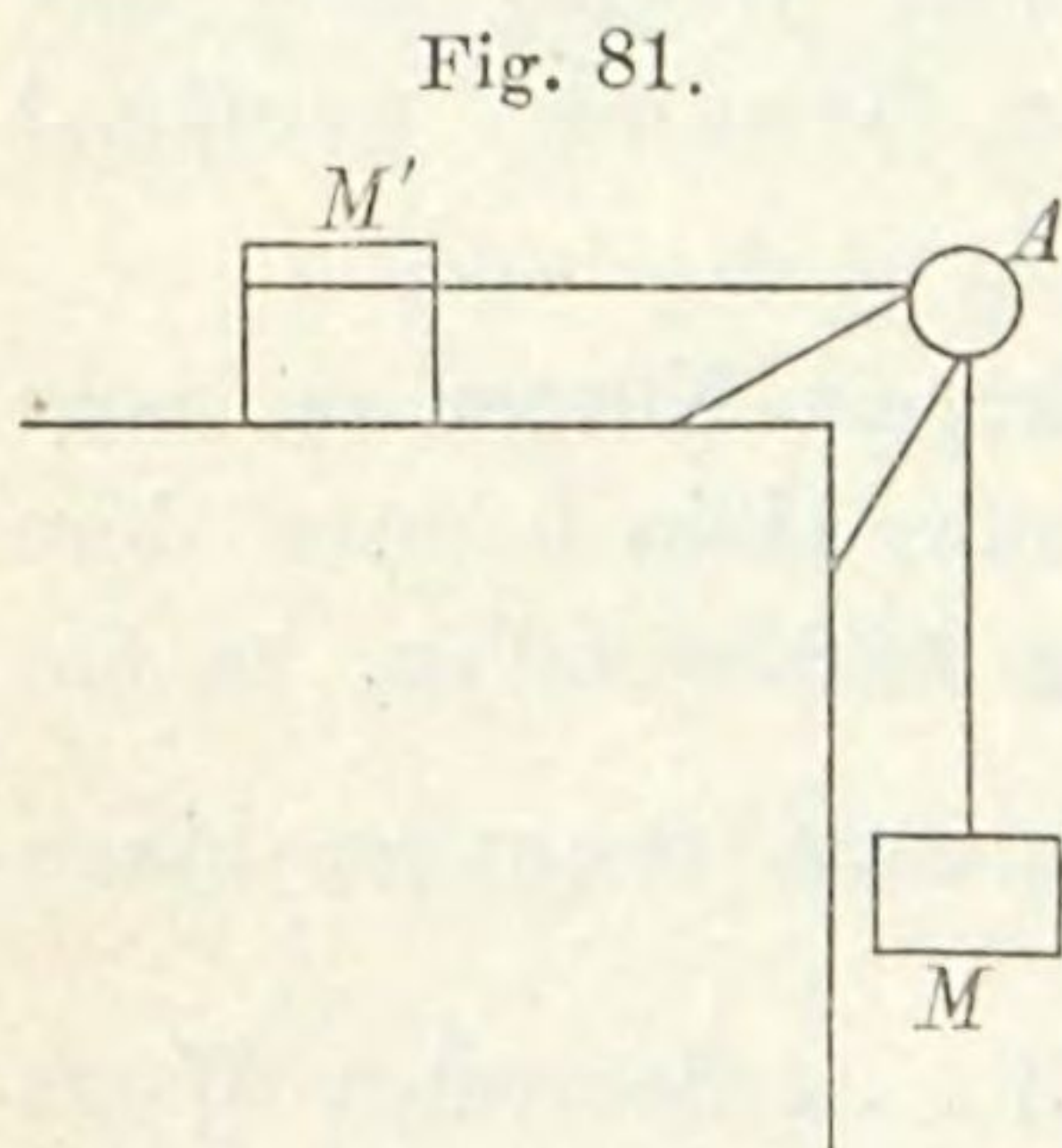
§ 331. Jedoch wegen des schnellen Falles der Körper von verticaler Höhe konnte man weder das darin herrschende Naturgesetz noch die Größe der Acceleration g bestimmen.

Man war also bedacht, das Gesetz der Schwere und die Größe von g bei kleiner Fallgeschwindigkeit zu erforschen und bediente sich hiebei verschiedener Mittel.

Galilei war es, der die schiefe Ebene angewendet, wo die Acceleration $g \sin a$ geworden und der Winkel a beliebig klein genommen werden kann.

§ 332. Es gibt noch andere Mittel, um die Fallgeschwindigkeit zu vermindern.

Der Körper von der Masse M' befinde sich auf der horizontalen Ebene $M'A$ und sei durch einen Faden gezogen, welcher durch



den Schwerpunkt des Körpers geht. An den Faden, der über eine Rolle gezogen ist, lassen wir einen Körper von der Masse M in verticaler Richtung den Körper von der Masse M' angreifen. Die bewegende Kraft ist hier das Gewicht des Körpers von der Masse $M = Mg$, und diese Kraft bewegt zwei Körper, den einen von der Masse M' im Gewichte $M'g$ und seinen eigenen von der Masse M , im Gewichte Mg .

Die acceleratorische Kraft des Körpers von der Masse M , welche beide Massen $M' + M$ in Bewegung setzt, ist demnach, wie bei der schiefen Ebene, in diesem Verhältnisse kleiner, und gleich $\frac{g \cdot M}{M' + M}$ geworden. Das Bewegungsgesetz ist hier ganz dasselbe, wie bei einem freien Körper, nur ist die Acceleration vermindert worden, und haben wir es in unserer Macht, sie nach Belieben mehr zu verkleinern, je mehr wir M' im Verhältnisse zu M vergrößern.

§ 333. Derselbe Gedanke liegt auch der Maschine von Atwood zugrunde, welche in ihrer einfachsten Form aus einem verticalen Rade besteht, in dessen Peripherie ein aufgerollter Faden sich befindet und an dessen beiden Enden zwei Gewichte von den Massen M und M' wirken.

Nehmen wir an, M sei größer als M' . Die bewegende Kraft ist $Mg - M'g$ und bewegt werden zwei Massen, $M' + M$. Die

Acceleration ist $\frac{g(M - M')}{M' + M}$, und also kleiner als beim Fallen von verticaler Höhe.

Wir werden später ein schärferes Mittel zur Bestimmung der Größe g kennen lernen und auch erfahren, dass die Kraft der Schwere durch die Rotation der Erde um ihre Achse vermindert ist, und dass dieselbe nicht bloß mit der Höhe, sondern auch mit der geographischen Breite des Ortes, wo sich der Körper befindet, sich ändert. Durch genaue Versuche hat man gefunden, dass ein unter dem Einflusse der Schwere von geringer verticaler Höhe fallender Körper, in der Breite von Paris, in der ersten Secunde 4.9044 Meter durchläuft, und dass daher

$$g = 9.8088 \text{ Meter ist.}$$

§ 334. Wir hatten oben

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad dx = v dt.$$

In der Kinematik haben wir gesehen, dass wir diese Ausdrücke nur dadurch erlangt, dass wir unendlich kleine Größen höherer Ordnung vernachlässigt haben, und dass in der That der vom Mobile in dem, nach Verlauf der Zeit t , folgenden Zeitelemente dt zurückgelegte Weg dx zum Ausdrucke hat

$$dx = v dx + \varepsilon,$$

wo unter ε der Weg verstanden wird, den das Mobile, während des Zeitelementes dt , unabhängig von der bereits erlangten Geschwindigkeit und, als wenn diese nicht vorhanden wäre, nur infolge des Weiterwirkens der Kraft beschrieben hat, welchen Weg wir aber als unendlich kleine Größe höherer Ordnung vernachlässigt haben.

Um nun diese Größe ε zu bestimmen, haben wir nach dem Taylor'schen Theoreme, wenn wir den vom Mobile zur Zeit $t + dt$ beschriebenen Weg mit x' bezeichnen,

$$x' - x = \frac{dx}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} dt^2 + \dots$$

als vollständigen Wert des während des Zeitelementes dt vom Mobile beschriebenen Weges.

Das erste Glied auf der rechten Seite $\frac{dx}{dt} dt = v dt$ ist der Theil des Weges, welchen das Mobile infolge der bereits erlangten Geschwindigkeit v , während des Zeitelementes dt , zurückgelegt.

Der vom Mobile infolge Fortwirkens der Kraft, unabhängig von v , beschriebene Weg ε hat demnach, wenn wir unendlich kleine Größen dritter Ordnung vernachlässigen, zum Ausdrucke

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} dv dt.$$

Betrachtet man, dass die motorische Kraft während des Zeitelementes dt die Geschwindigkeit dv erzeugt, und wäre diese Geschwindigkeit dv am Anfange der Bewegung vorhanden, so wäre vom Mobile während des Zeitelementes dt ein Weg $dv dt$ beschrieben, während ε bloß der Hälfte dieses Weges $\frac{1}{2} dv dt$ gleich ist. Dieses kommt also daher, weil thatsächlich die Geschwindigkeit dv nicht gleich im Beginne des Zeitelementes dt , sondern bis zu dessen Verlaufe von der Kraft erzeugt wurde, und deshalb so betrachtet wird, als wenn der Weg mit der mittleren Geschwindigkeit $\frac{1}{2} dv$ beschrieben worden wäre.

Aus diesem Grunde ist auch der vom Mobile, vom Zustande der Ruhe beginnend und vertical herabfallend, in der ersten Secunde beschriebene Weg gleich $\frac{g}{2}$, weil die anfängliche Geschwindigkeit gleich Null war, und das Mobile erst bis Ende der ersten Secunde die Acceleration gleich g erworben.

Vierundvierzigstes Capitel.

Bewegung eines Punktes in einem widerstehenden Mittel.

§ 335. Bewegt sich ein Punkt in der Luft oder in einer Flüssigkeit, so übt er auf die Molecüle dieser Flüssigkeit eine gewisse Wirkung, einen Druck aus. Diese reagieren auf das Mobile im entgegengesetzten Sinne, und die Größe der Bewegung wird dadurch vermindert. Diese Reaction wird die Kraft des Widerstandes der Flüssigkeit genannt. Nehmen wir also an, dass der Punkt, der sich in diesem Mittel bewegt, von einer constanten Kraft sollicitiert wird, und die Kraft des Widerstandes, die wir mit R bezeichnen, dem Quadrate der Geschwindigkeit v proportional sei, welche Bewegung fast die eines Körpers ist, der in der Luft zur Erde fällt, so wird der Widerstand des Mittels einen Ausdruck in der Form haben

$$R = mg \frac{v^2}{k^2},$$

indem m die Masse des Punktes bedeutet und mit k eine Geschwindigkeit bezeichnet wird, welche das Mobile haben müsste, damit der Widerstand der Luft genau gleich dem Gewichte des Mobile wäre. Setzt man die Masse des Punktes m gleich 1, so wird die Kraft des Widerstandes ausgedrückt durch

$$1. \quad R = g \frac{v^2}{k^2}.$$

R ist negativ, da diese Kraft im entgegengesetzten Sinne der Bewegung wirkt.

§ 336. Betrachten wir also den Fall, wo das Mobile unter dem Einflusse der Schwere, vom Zustande der Ruhe beginnend, in diesem widerstehenden Mittel in verticaler Richtung sich abwärts bewegt und am Ende der Zeit t den Weg x beschreibt, so ist die bewegende Kraft

$$\varphi = g - g \frac{v^2}{k^2} = g \left(1 - \frac{v^2}{k^2} \right) = g \left(\frac{k^2 - v^2}{k^2} \right).$$

Wir werden also haben, da die Acceleration zum Ausdruck hat $\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{d v}{d t}$,

$$2. \quad \frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{d v}{d t} = g \left(\frac{k^2 - v^2}{k^2} \right),$$

und daraus

$$3. \quad \frac{2 k^2 d v}{k^2 - v^2} = 2 g d t$$

oder

$$k d v \left[\frac{1}{k + v} + \frac{1}{k - v} \right] = 2 g d t.$$

Integriert man zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = t$, indem zur Zeit $t = 0$ auch $v = 0$ war, so hat man

$$4. \quad k l \frac{k + v}{k - v} = 2 g t,$$

und daraus

$$\frac{k + v}{k - v} = e^{\frac{2 g t}{k}},$$

daher

$$5. \quad v = k \frac{e^{\frac{2 g t}{k}} - 1}{e^{\frac{2 g t}{k}} + 1},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner durch $e^{\frac{g t}{k}}$ dividiert,

$$6. \quad v = \frac{dx}{dt} = k \frac{e^{\frac{g t}{k}} - e^{-\frac{g t}{k}}}{e^{\frac{g t}{k}} + e^{-\frac{g t}{k}}}.$$

Integriert man von $t = 0$ anfangen, so hat man

$$7. \quad x = \frac{k^2}{g} \ln \frac{1}{2} \left(e^{\frac{g t}{k}} + e^{-\frac{g t}{k}} \right),$$

wobei eine Constante nicht beizusetzen ist, da nach der Voraussetzung für $t = 0$ auch $x = 0$ ist.

§ 337. Wir hatten ferner

$$v dv = g dx,$$

und da hier statt g die Größe $\varphi = g - \frac{g v^2}{k^2}$ zu setzen ist, so hat man

$$v dv = g \left(\frac{k^2 - v^2}{k^2} \right) dx$$

daher

$$dx = \frac{k^2}{2g} \cdot \frac{2v dv}{k^2 - v^2}.$$

Integriert man, indem $x = 0$ für $v = 0$ ist, so kommt

$$8. \quad x = \frac{k^2}{2g} \ln \frac{k^2}{k^2 - v^2}.$$

§ 338. Nimmt man an, dass, wenn t sehr groß wird, $e^{-\frac{g t}{k}}$ sehr klein wird, so dass man diese Größe vernachlässigen kann, so hat man aus den Gleichungen 6. und 7.

$$v = k, \quad x = k t - \frac{k^2}{g} \ln 2.$$

In diesem Falle wird also, am Ende einer sehr langen Zeit, die Bewegung merklich gleichförmig, und die acceleratorische Kraft $= g - g \frac{v^2}{k^2} = g - g = 0$, also nahezu Null, was man auch leicht einsieht. Die Kraft der Schwere ist eine constante Kraft, die Kraft des Widerstandes R aber eine variable Kraft, die mit dem Wachsen der Zeit und der Geschwindigkeit des Mobile sich vergrößert, so dass sie nahezu dem Gewichte des Körpers gleichkommt. v wird aber $= k$ erst mit $t = \infty$, so dass strenge die Bewegung nie gleichförmig wird. Dieser Fall wird schließlich desto später eintreten, je größer k ist.

Ist die Dichte des Mittels sehr gering, und mithin k sehr groß, damit $R = g \frac{v^2}{k^2}$ fast gleich Null wird, so muss man in obigen Gleichungen die Ausdrücke für das Fallen des Punktes im leeren Raume wiederfinden.

In der That, ersetzt man die Größen $e^{\frac{g t}{k}}$ und $e^{-\frac{g t}{k}}$ durch ihre Reihen, so hat man

$$e^{\frac{g t}{k}} = 1 + \frac{g t}{k} + \frac{g^2 t^2}{2 k^2} + \frac{g^3 t^3}{6 k^3} + \dots$$

$$e^{-\frac{g t}{k}} = 1 - \frac{g t}{k} + \frac{g^2 t^2}{2 k^2} - \frac{g^3 t^3}{6 k^3} + \dots$$

und daraus

$$\frac{1}{2} \left(e^{\frac{g t}{k}} - e^{-\frac{g t}{k}} \right) = \frac{g t}{k} + \frac{g^3 t^3}{6 k^3} + \dots$$

$$\frac{1}{2} \left(e^{\frac{g t}{k}} + e^{-\frac{g t}{k}} \right) = 1 + \frac{g^2 t^2}{2 k^2} + \dots$$

ferner

$$1 \frac{1}{2} \left(e^{\frac{g t}{k}} + e^{-\frac{g t}{k}} \right) = \frac{g^2 t^2}{2 k^2} - \frac{g^4 t^4}{12 k^4} + \dots$$

Setzt man diese Werte in 6. und 7. ein, und macht $k = \infty$, so findet man

$$v = g t$$

$$x = \frac{g t^2}{2},$$

also die Werte für das verticale Fallen des Mobile im leeren Raume.

Es wird noch bemerkt, dass die motorische Kraft hier

$$\varphi = g - \frac{g v^2}{k^2}$$

nicht mehr eine constante, sondern eine variable Kraft ist, da der Theil $g \frac{v^2}{k^2}$ mit dem Wachsen der Geschwindigkeit des Mobile sich vergrößert, R ist eine variable Kraft, und daher auch $\varphi = g - R$.

Fünfundvierzigstes Capitel.

Aufwärts in einem widerstehenden Mittel sich bewogender Punkt.

§ 339. Ist ein schwerer Punkt aufwärts in verticaler Richtung mit einer Geschwindigkeit $= a$ in einem widerstehenden Mittel ge-

trieben, so ist, unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Capitels, und insbesondere unter der Voraussetzung, dass die Kraft des Widerstandes gleich ist $g \frac{v^2}{k^2}$, die motorische Kraft, da hier auch g negativ zu nehmen ist,

$$\varphi = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -g - g \frac{v^2}{k^2} = -g \left(1 + \frac{v^2}{k^2} \right) = -g \left(\frac{k^2 + v^2}{k^2} \right)$$

also

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{k^2} (k^2 + v^2)$$

oder

$$1. \quad \frac{k dv}{k^2 + v^2} = -\frac{g dt}{k}.$$

Integriert man diese Gleichung von $t = 0$ an, und beobachtet, dass die anfängliche Geschwindigkeit des Mobile zur Zeit $t = 0$ die Größe $= a$ hatte, so kommt

$$2. \quad \frac{gt}{k} = \text{arc tang } \frac{a}{k} - \text{arc tang } \frac{v}{k}.$$

§ 340. Setzt man

$$\text{arc tang } \frac{a}{k} = y, \quad \text{arc tang } \frac{v}{k} = z,$$

so ist bekanntlich

$$\begin{aligned} \text{tang } (y - z) &= \frac{\text{tang } y - \text{tang } z}{1 + \text{tang } y \text{ tang } z} \\ &= \frac{\frac{a}{k} - \frac{v}{k}}{1 + \frac{av}{k^2}}. \end{aligned}$$

Nimmt man also in 2. die Tangenten beider Glieder, so ist

$$\text{tang } \frac{gt}{k} = \text{tang } (y - z) = \frac{\frac{a}{k} - \frac{v}{k}}{1 + \frac{av}{k^2}}$$

oder

$$\frac{\sin \frac{gt}{k}}{\cos \frac{gt}{k}} = \frac{\frac{a}{k} - \frac{v}{k}}{1 + \frac{av}{k^2}},$$

und daraus

$$3. \quad v = \frac{dx}{dt} = k \cdot \frac{a \cos \frac{gt}{k} - k \sin \frac{gt}{k}}{k \cos \frac{gt}{k} + a \sin \frac{gt}{k}}.$$

Integriert man und bestimmt die Constante durch die Bestimmung, dass man für $t=0$ auch $x=0$ hat, so ergibt sich, wenn man erwägt, dass der Zähler, bis auf den Factor $\frac{k^2}{g}$, die Derivierte des Nenners ist, und die Constante $= -1k$ ist,

$$4. \quad x = \frac{k^2}{g} \log \left(k \cos \frac{gt}{k} + a \sin \frac{gt}{k} \right) - \frac{k^2}{g} \log k = \\ = + \frac{k^2}{g} \log \left(\frac{a}{k} \sin \frac{gt}{k} + \cos \frac{gt}{k} \right).$$

Um x als Function von v auszudrücken, wird man sich der Gleichung

$$v dv = \varphi dx$$

bedienen, den Wert von φ durch $-g \left(1 + \frac{v^2}{k^2} \right)$ darin ersetzen, und dann hat man

$$5. \quad -\frac{k^2 \cdot 2v dv}{k^2 + v^2} = 2g dx.$$

Integriert man und bestimmt die Constante durch die Bedingung, dass man für $x=0$ $v=a$ hat, so wird

$$6. \quad x = \frac{k^2}{2g} \log \frac{k^2 + a^2}{k^2 + v^2}.$$

§ 341. Der Punkt wird bis zu einer Höhe steigen, an deren Endpunkte die dem Punkte ertheilte ursprüngliche Geschwindigkeit a erlischt.

Es sei nun x' diese Höhe und t' die Zeit, die der Punkt benötigte, um diese Höhe zu erreichen, so ergibt sich aus 6., wenn darin $v=0$ gesetzt wird, ferner aus 2.

$$7. \quad \begin{cases} x' = \frac{k^2}{2g} \log \frac{k^2 + a^2}{k^2} \\ \text{tang} \frac{gt'}{k} = \frac{a}{k}, \quad \frac{gt'}{k} = \text{arc tang} \cdot \frac{a}{k} \\ t' = \frac{k}{g} \text{arc tang} \cdot \frac{a}{k}. \end{cases}$$

Hat der Punkt diese Höhe erreicht, dann wird er unter dem Einflusse der Schwere vertical abwärts herabfallen, und kommen alsdann die Formeln 6. und 8. des vorigen Capitels zur Anwendung.

Setzt man in 8. $x = x'$, $v = a'$, das ist die Geschwindigkeit, die das Mobile erlangt, wenn es zum Punkte rückgelangt, von dem es ausgegangen ist, so kommt

$$x' = \frac{k^2}{2g} \ln \frac{k^2}{k^2 - a'^2}.$$

Da aber vermöge 7.

$$x' = \frac{k^2}{2g} \ln \frac{k^2 + a^2}{k^2},$$

so hat man

$$\frac{k^2}{k^2 - a'^2} = \frac{k^2 + a^2}{k^2}$$

und daraus

$$8. \quad a' = \frac{ak}{\sqrt{k^2 + a^2}}.$$

a' ist also immer kleiner als die anfängliche Geschwindigkeit a .

Um die Zeit zu bestimmen, die das Mobile benöthigt, die Höhe x' herabsteigend zu durchlaufen, so nennen wir diese Zeit t'' , setzen in der Formel 4. des vorigen Capitels für t die Zeit t'' und für v die Größe a' ein, so hat man

$$2gt'' = k \ln \frac{k + a'}{k - a'},$$

daher

$$t'' = \frac{k}{2g} \ln \frac{k + a'}{k - a'} = \frac{k}{g} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{k + a'}{k - a'} = \frac{k}{g} \ln \sqrt{\frac{k + a'}{k - a'}},$$

und für a' seinen Wert $a' = \frac{ak}{\sqrt{k^2 + a^2}}$ einsetzend,

$$9. \quad t'' = \frac{k}{g} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + k^2}}{k}.$$

Die Fallzeit ist also von der Zeit des Aufsteigens verschieden.

Nennen wir Θ die totale Zeit des Aufsteigens und des Fallens, so hat man

$$10. \quad \Theta = t' + t'' = \frac{k}{g} \left[\arctan \frac{a}{k} + \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + k^2}}{k} \right].$$

a und g wird als bekannt vorausgesetzt, und findet man Θ durch Versuche, so kann man daraus für ein gegebenes Mobile die Größe k finden.

Auch hier ist die motorische Kraft variabel.

Bewegung eines Punktes in einem Mittel, dessen Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist.

§ 342. Wenn bei der herabsteigenden Bewegung eines schweren Punktes in einem Mittel, dessen Widerstand nur der Geschwindigkeit des Mobile proportional ist, was nach Versuchen dort eintritt, wo die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt begabt ist, sehr gering ist, so ist die motorische Kraft

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{v}{k}\right)$$

oder

$$\frac{g dt}{k} = \frac{dv}{k - v}.$$

Integriert man und bestimmt die Constante, dass für $t = 0$ auch $v = 0$, so hat man

$$11. \quad \frac{gt}{k} = 1 - \frac{k}{k - v}$$

und daraus

$$12. \quad v = \frac{dx}{dt} = k - k e^{-\frac{gt}{k}}.$$

Integriert man neuerdings, so kommt

$$13. \quad x = kt - \frac{k^2}{g} \left(1 - e^{-\frac{gt}{k}}\right),$$

indem man die Constante in der Weise bestimmt, dass für $t = 0$ $x = 0$ wird.

Bewegung eines schweren Punktes im leeren Raume von einer großen Höhe.

§ 343. Auch hier ist die acceleratorische Kraft nicht constant, da, wie wir wissen, diese im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Distanz des Mobile vom Mittelpunkte sich vermindert.

Sei r der Halbmesser der Erde. Der Ausgangspunkt des Mobile sei A, in der Höhe $AO = a$ über den Mittelpunkt der Erde O, und befindet sich das Mobile, welches unter dem Einflusse der Schwere diese Höhe AO vertical herabfällt, zur Zeit t in einem Punkte dieser

Verticalen B, A B bezeichnen wir mit x . Die motorische Kraft in diesem Punkte ist $m\varphi$, wenn daselbst die Acceleration mit φ bezeichnet wird, und wenn m als Masseeinheit genommen wird, $= \varphi$.

Auf der Oberfläche der Erde, also in der Distanz r vom Mittelpunkte der Erde ist die acceleratorische Kraft $= g$, und mithin ist diese im Punkte B, infolge des Verhältnisses

$$\varphi : g = r^2 : (a - x)^2$$

$$14. \quad \varphi = \frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{g r^2}{(a - x)^2}.$$

Multipliziert man beide Glieder mit $2 dx$, so kommt

$$\frac{2 dx d^2 x}{d t^2} = \frac{2 g r^2 dx}{(a - x)^2},$$

und daraus, wenn man integriert,

$$15. \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = \frac{2 g r^2}{a - x} + c.$$

Ist der Punkt vom Zustande der Ruhe ausgegangen, so dass man für $x = 0$, $v = 0$ hat, so ist

$$16. \quad v^2 = \frac{2 g r^2}{a - x} - \frac{2 g r^2}{a} =$$

$$= \frac{2 g r^2}{a} \frac{x}{a - x}.$$

§ 344. Ersetzt man v^2 durch $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, multipliciert die Gleichung mit dt , so hat man

$$\sqrt{\frac{2 g r^2}{a}} dt = \sqrt{\frac{(a - x) dx}{x}} = \frac{(a - x) dx}{\sqrt{(a - x) x}},$$

wobei das positive Zeichen genommen wird, da die Geschwindigkeit hier positiv ist.

Integriert man, indem die Costante durch die Bedingung bestimmt wird, dass die anfängliche Geschwindigkeit gleich Null war, also das Mobile die Bewegung vom Zustande der Ruhe begonnen, so hat man

$$17. \quad \sqrt{\frac{2 g r^2}{a}} t = \sqrt{a x - x^2} + \frac{a}{2} \arccos \frac{a - 2x}{a}.$$

Aus 16. ist zu ersehen, dass die Geschwindigkeit mit x wächst, das ist, je mehr das Mobile sich der Oberfläche der Erde nähert.

Für $x = a - r$, das ist, wenn der Punkt an der Erdoberfläche sich befindet, ist

$$v^2 = \frac{2gr^2}{a} \cdot \frac{a-r}{r} = \frac{2gr}{a} \cdot a - r = \frac{2gr \cdot (a-r)}{a}.$$

Setzt man $a - r = h$, so wird

$$18. \quad v = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{r}{a}}.$$

Wäre der Punkt die Höhe $AO - r = h$ mit der Acceleration g vertical herabgefallen, so wäre dessen Geschwindigkeit an der Erdoberfläche $= \sqrt{2gh}$. In unserem Falle ist sie kleiner, da r kleiner als a , und die $\sqrt{\frac{r}{a}}$ kleiner als 1 ist.

Für $x = a$ ist die Geschwindigkeit $= \infty$. Wenn also die ganze Masse der Erde im Mittelpunkte vereinigt und der Punkt an den Mittelpunkt der Erde gelangen würde, wäre seine Geschwindigkeit gleich unendlich.

Sechsvierzigstes Capitel.

Allgemeine Bewegungsgleichungen, insbesondere krummlinige Bewegungen.

§ 345. Ist ein Punkt von Kräften sollicitiert, so wissen wir, dass eine Kraft zum Maße hat das Product der totalen Acceleration des in Bewegung begriffenen Punktes, multipliciert mit seiner Masse. Ferner haben wir gesehen, dass die Richtung der Kraft in die der totalen Acceleration fällt. Die analytischen Ausdrücke dieser Sätze führen uns zu den Bewegungsgleichungen. Seien x, y, z die Coordinaten des Punktes m , bezogen auf die drei rechtwinkeligen Achsen, X, Y, Z die den Achsen parallelen Componenten der Resultante R der Kräfte $P, P', P'' \dots$, welche den Punkt m sollicitieren, oder, was dasselbe ist, die Projectionen der Resultante oder die Summe der Projectionen der Kräfte auf die Achsen, so ist die algebraische Summe der Projectionen der Kräfte, oder die Projectionen der Resultante auf diese Achsen gleich den respectiven Projectionen der Acceleration auf dieselben Achsen, multipliciert mit der Masse des Punktes.

§ 346. Belangend ferner die Projectionen der Acceleration auf die Achsen, so haben sie, wie wir in der Kinematik gesehen, zu ihren Ausdrücken

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

wo dt das Element der Zeit bedeutet. Daher sind die allgemeinen Gleichungen der Bewegung

$$1. \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = X \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z. \end{cases}$$

Kennt man die Bewegung des Punktes m , so kann man aus 1. die Summe der Projectionen X, Y, Z der Kräfte auf die Achsen, und mithin die Resultante R der Kräfte, welche den Punkt m angreifen, bestimmen.

Sind umgekehrt die Projectionen der Kräfte, und daher auch die sollicitierenden Kräfte bekannt, so kann man aus 1. die Coordinaten als Functionen der Zeit bestimmen.

Die Bewegungsgleichungen sind simultan und von zweiter Ordnung, und im allgemeinen nicht integrierbar. Es sind aber zahlreiche Fälle, wo die Integration ganz oder zum Theile in endlicher Form oder durch Reihen effectuirt werden kann. Wir werden solche bald kennen lernen.

Bewegung eines Punktes, der gezwungen ist, auf einer Oberfläche zu bleiben.

§ 347. Ist der Punkt genöthigt, auf einer Oberfläche zu bleiben, so kann, wie wir bereits in der Statik gesehen, die Fläche durch eine Kraft N ersetzt und der Punkt als ganz frei betrachtet werden. Entwickelt die Oberfläche keine Reibung, so wird N , wie im Falle des Gleichgewichtes, nothwendig normal zur Fläche wirken, dem Drucke des Mobile auf die Fläche direct entgegengesetzt. Denn wäre sie nicht normal, so könnte sie in zwei Kräfte, eine zur Fläche normale und eine tangentielle zerlegt werden, wo dann die tangentielle Componente den Punkt von der Fläche fortbewegen würde.

Man wird also zu den Gleichungen 1. noch die den Achsen parallelen Componenten der Kraft N hinzufügen. Wir haben alsdann vier Unbekannte x, y, z, N , zu deren Bestimmung wir die Gleichungen 1. und die Gleichung der Fläche, welche, je nachdem sie von der Zeit unabhängig oder abhängig ist, die Form hat

$$2. \quad f(x, y, z) = 0,$$

wenn die Oberfläche fix ist, und

$$3. \quad f(x, y, z, t) = 0,$$

wenn die Fläche fähig ist, sich mit der Zeit zu deformieren.

§ 348. Behalten wir die früheren Bezeichnungen bei, und nennen die Winkel der Kraft N mit den Achsen λ , μ , ν , deren Cosinus, wie man weiß, zu Ausdrücken haben

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}}} \\ \cos \mu &= \frac{\frac{df}{dy}}{\sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}}} \\ \cos \nu &= \frac{\frac{df}{dz}}{\sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}}} \end{aligned}$$

so hat man die Gleichungen

$$4. \quad \begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = X + N \cos \lambda \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N \cos \mu \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N \cos \nu \end{cases}$$

und dazu die Gleichung der Fläche.

§ 349. Wird der Punkt, der gezwungen ist, auf einer Fläche zu bleiben, von keiner Kraft sollicitiert, alsdann hat man $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, und die Bewegungsgleichungen sind

$$5. \quad \begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = N \cos \lambda \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = N \cos \mu \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = N \cos \nu. \end{cases}$$

Setzt man für $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ die obangegebenen Werte, lässt deren gemeinschaftlichen Nenner, wie auch den Factor m weg, und eliminiert die GröÙe N , so hat man

$$6. \quad \frac{d^2x}{dt^2} : \frac{df}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2} : \frac{df}{dy} = \frac{d^2z}{dt^2} : \frac{df}{dz}.$$

Multipliziert man jede der Gleichungen 4. respective mit $2dx$, $2dy$, $2dz$, und addiert dieselben, beobachtend, dass man aus 2. hat

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = 0, \text{ so ergibt sich,}$$

$$\text{wenn } \sqrt{\frac{df^2}{dx^2} + \frac{df^2}{dy^2} + \frac{df^2}{dz^2}} = h \text{ gesetzt wird,}$$

$$m \left[\frac{d^2x \cdot 2dx + d^2y \cdot 2dy + d^2z \cdot 2dz}{dt^2} \right] =$$

$$= 2 \frac{N}{h} \left(\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz \right)$$

$$md \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) = 0.$$

$$m \frac{dv}{dt} = 0, \quad mv = \text{Constante.}$$

Die Geschwindigkeit ist daher für diesen Fall constant. Daraus ist aber auch zu ersehen, dass ds und dt proportional sind.

Man kann also für diesen Fall in den Gleichungen 6. dt durch ds ersetzen, und man hat alsdann

$$7. \quad \frac{d^2x}{ds^2} : \frac{df}{dx} = \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{df}{dy} = \frac{d^2z}{ds^2} : \frac{df}{dz}.$$

Wie wir aber in einem früheren Capitel gefunden, drücken diese Gleichungen aus, dass die Hauptnormale der vom Punkte beschriebenen Bahn in jedem Punkte senkrecht steht auf der Tangentialebene der Fläche $f=0$, eine Eigenschaft, welche der geodesischen Linie zukommt.

Ist daher der Punkt gezwungen, auf einer Fläche zu bleiben, und wird er von keinen Kräften sollicitiert, so ist die Geschwindigkeit constant, seine Bewegung ist gleichförmig, und der Punkt beschreibt auf der Oberfläche eine geodesische Linie.

Bewegung eines Punktes, der gezwungen ist, auf einer Curve zu bleiben.

§ 350. Ist ein Punkt bei seiner Bewegung genöthigt, auf einer Curve zu bleiben, so wird dieser Fall fast wie der frühere Fall behandelt, wo der Punkt auf einer Fläche zu bleiben hat, und ist

auch hier eine Unbekannte mehr, nämlich die Richtung der Action der Curve. Auch diese wird durch eine Kraft N ersetzt, und ist keine Reibung vorhanden, so muss diese Kraft normal zur Curve stehen. Nennt man auch hier die Winkel zwischen der Richtung dieser Kraft und den rechtwinkligen Achsen λ , μ , ν , so sind die Bewegungsgleichungen

$$8. \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + N \cos \lambda \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + N \cos \mu \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N \cos \nu. \end{cases}$$

Zu diesen Gleichungen sind hinzuzufügen die Gleichungen der Curve, ferner die Relation

$$9. \quad \cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1,$$

dann die Gleichung

$$10. \quad \begin{cases} \frac{dx}{ds} \cos \lambda + \frac{dy}{ds} \cos \mu + \frac{dz}{ds} \cos \nu = 0 \\ dx \cos \lambda + dy \cos \mu + dz \cos \nu = 0. \end{cases}$$

Durch diese Gleichung wird ausgedrückt, dass die Action der Kraft N , welche an die Stelle der Curve getreten, normal zur Curve steht, und dass daher der Cosinus des Winkels zwischen der Richtung der Kraft und der Tangente der Curve gleich Null ist.

Ist bei der Fläche oder Curve Reibung vorhanden, dann ist möglich, dass die Wirkung der Fläche oder der Curve nicht mehr normal steht. Dann theilt man die Kraft N , welche die Wirkung der Fläche oder der Curve ersetzen und an deren Stelle treten soll, in eine normale und in eine tangentielle Componente. Die tangentielle Componente ist die Reibung. Man nimmt allgemein an, dass die Reibung proportional der normalen Action der Curve und im entgegengesetzten Sinne der Bewegung gerichtet ist. Die Formeln 4. und 8. werden alsdann modificiert, indem man die Componenten der Reibung hinzufügt, welche, wie eben erwähnt, proportional den Componenten von N sind.

Kraft der Trägheit.

§ 351. Man nennt Kraft der Trägheit eines in Bewegung begriffenen Punktes eine Kraft, die derjenigen direct entgegengesetzt ist, welche die Bewegung des Punktes erzeugt.

Sei nun m ein Massepunkt, x, y, z dessen Coordinaten auf drei rechtwinkelige Achsen bezogen, so sind

$$m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2}$$

die den Achsen parallelen Componenten der Kraft, welche die Bewegung erzeugen würde.

Die Componenten der Kraft der Trägheit sind demnach

$$- m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad - m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad - m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Die totale Acceleration wird decomponiert in eine normale und eine tangentielle Acceleration. Ebenso kann die Kraft, welche einen Punkt sollicitiert, in eine normale Kraft, die längs des Krümmungshalbmessers der Trajectorie des diese beschreibenden Punktes, und eine tangentielle Kraft zerlegt werden. Die normale Componente nennt man centripetale Kraft.

Diese beide Componenten sind gleich den respectiven Componenten der Acceleration, multipliciert mit der Masse des Mobile.

Da nun die Componenten der Acceleration, wie wir in der Kinematik gesehen, zu Ausdrücken haben

$$\frac{v^2}{\rho} \text{ und } \frac{dv}{dt},$$

so sind die Componenten der Kraft,

$$m \frac{v^2}{\rho} \text{ und } m \frac{dv}{dt},$$

und dabei bedeuten v die Geschwindigkeit und ρ den Krümmungshalbmesser der Trajectorie des sich bewegenden Mobile.

In dieser Weise kann man auch die Kraft der Trägheit in zwei andere zerlegen, eine zur Trajectorie normale und eine tangentielle, welche jenen beiden Componenten der agierenden Kraft gleich und direct entgegengesetzt sind. Erstere nennt man centrifugale Kraft, letztere die tangentielle Kraft der Trägheit.

Die Kraft der Trägheit und deren Componenten, die centrifugale und tangentielle sind in der That keine Kräfte, sie sollicitieren keinen materiellen Punkt und sind bloß abgekürzte Ausdrücke, welche die Aufstellung gewisser Probleme erleichtern. Soviel zur Verhütung von Irrthümern.

Siebenundvierzigstes Capitel.

Princip der lebendigen Kräfte.

§ 352. Gehen wir auf die Gleichungen 1. des vorigen Capitels zurück und behalten die früheren Bezeichnungen bei,

$$1. \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = X \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z. \end{cases}$$

Diese Bewegungsgleichungen sind die eines ganz freien Punktes.

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $2 dx$, die zweite mit $2 dy$, die dritte mit $2 dz$, und addiert dieselben, so hat man

$$m \left[2 \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dy}{dt} + 2 \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{dz}{dt} \right] dt = 2 [X dx + Y dy + Z dz].$$

Man hat aber

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}$$

$$dv^2 = 2v dv = \left[2 \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dy}{dt} + 2 \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{dz}{dt} \right] dt.$$

Daher

$$2. \quad m dv^2 = d m v^2 = 2 [X dx + Y dy + Z dz].$$

Das Product $m v^2$, das ist das Product der Masse eines Mobile, multipliciert mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, nennt man die lebendige Kraft des Mobile.

Das Product $[X dx + Y dy + Z dz]$ ist die Arbeit der Kraft, deren Componenten X, Y, Z sind, während eines Zeitelementes dt , also die durch die Kraft während des Zeitelementes dt effectuierte reelle Deplacierung (dx, dy, dz) des Mobile. Man nennt dieses Product die elementare Arbeit dieser Kraft.

Die GröÙe $\int_{t_0}^t (X dx + Y dy + Z dz)$ nennt man die totale Arbeit derselben Kraft, effectuiert während der Zeit von t_0 bis t .

§ 353. Dieselbe Gleichung besteht auch dann, wenn der Punkt genöthigt ist, auf einer Fläche oder Curve zu bleiben, wenn keine Reibung vorhanden ist.

Denn die Bewegungsgleichungen für diesen Fall sind, wie aus § 348 und § 350 zu ersehen,

$$3. \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + N \cos \lambda \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + N \cos \mu \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N \cos \nu. \end{cases}$$

Verfährt man hier wie mit der Gleichung 1., so kommt

$$4. \quad dm v^2 = 2 [X dx + Y dy + Z dz] + 2 N [\cos \lambda dx + \cos \mu dy + \cos \nu dz].$$

Da aber, wenn keine Reibung vorhanden ist, die Kraft N normal zur Fläche oder Curve steht, so ist das zweite Glied rechter Hand, wenn man es durch ds dividiert, der Cosinus des Winkels, welchen die normale Kraft N mit der Tangente bildet, und ist also gleich Null in jedem Punkte der Trajectorie.

Man hat daher auch hier wie bei einem freien Punkte

$$5. \quad dm v^2 = 2 (X dx + Y dy + Z dz).$$

Andere Formen des Punktes $X dx + Y dy + Z dz$.

§. 354. Der Punkt m beschreibe die Curve AMB und befinde sich zur Zeit t in M , die Tangente an diesem Punkte sei MT , der

Winkel zwischen der Kraft P und der Tangente PMT sei $= w$, so ist, da die Cosinus der Winkel zwischen P und den Achsen

$$\frac{X}{P}, \quad \frac{Y}{P}, \quad \frac{Z}{P}$$

sind, wenn nämlich die Componenten der Kraft mit X, Y, Z bezeichnet werden, ferner die Cosinus der Tangente mit den Achsen

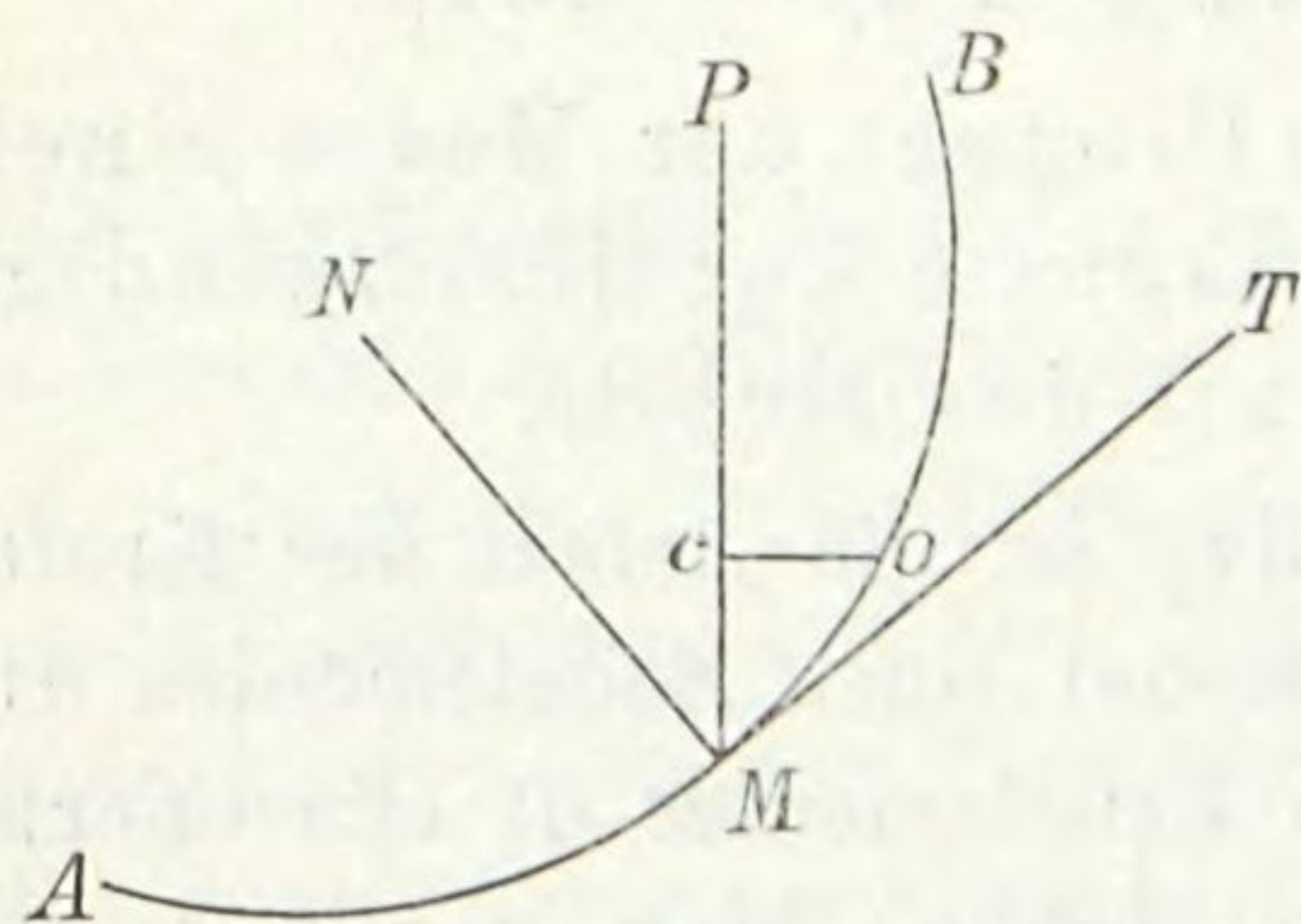
$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

sind, wo unter ds das Element der Trajectorie verstanden wird,

$$6. \quad \cos w = \frac{X}{P} \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P} \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P} \frac{dz}{ds}.$$

$$7. \quad P ds \cos w = X dx + Y dy + Z dz.$$

Fig. 82.



Projiciert man P auf die Tangente MT , oder, mit anderen Worten, decomponiert man P in eine tangentielle Componente $= T$ und eine darauf senkrechte Componente $= N$, alsdann ist

$$T = P \cos w,$$

und die Gleichung 7. wird

$$8. \quad Tds = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Bezeichnet man ferner Mc , das ist die Projection des Bogenelementes $MO = ds$ auf die Richtung der Kraft P mit dp , so ist

$$ds \cos w = dp,$$

und mithin wird die Gleichung 7.

$$9. \quad Pdp = Xdx + Ydy + Zdz.$$

§ 355. Der Ausdruck $Xdx + Ydy + Zdz$, also die elementare Arbeit einer Kraft ist demnach gleich:

a) Dem Producte der sollicitierenden Kraft P , multipliciert mit dem Elemente der Trajectorie und dem Cosinus des Winkels, den die Kraft mit der Tangente einschließt;

b) dem Producte der Projection der Kraft auf die Tangente, multipliciert mit dem Bogenelemente. Auch das Product Tds wird die elementare Arbeit der Kraft genannt;

c) dem Producte der sollicitierenden Kraft, multipliciert mit der Projection des Bogenelementes der Trajectorie, das ist der Projection des vom Mobile während des Zeitelementes dt beschriebenen Weges ds , auf die Richtung der Kraft.

Das Product Tds , das ist das Product der tangentiellen Componente T der Kraft P , multipliciert mit dem vom Mobile während des Zeitelementes dt beschriebenen Wege ds , welches Product gleich ist $Xdx + Ydy + Zdz$, nennt man, wie erwähnt, ebenfalls die elementare Arbeit dieser Kraft.

Sie wird als positiv betrachtet, wenn T im Sinne der Bewegung agiert, als negativ im entgegengesetzten Falle, oder, was dasselbe ist, je nachdem der Winkel w spitz oder stumpf ist. Im Ausdrucke $Pds \cos w$ für die elementare Arbeit ist das Zeichen ebenfalls durch $\cos w$ gegeben, indem P und ds als positiv genommen werden. In allen Fällen ist die Projection der Resultante auf irgend eine Gerade gleich der algebraischen Summe der Projectionen ihrer Componenten auf dieselbe Gerade. Die elementare Arbeit der Resultante mehrerer Kräfte ist also gleich der algebraischen Summe der elementaren Arbeiten dieser Kräfte.

§ 356. Integriert man die Gleichung 2. des § 352 für die Zeit von $t = t_0$ bis $t = t$, so ist, wenn die Geschwindigkeiten zur Zeit t_0 mit v_0 und zur Zeit t mit v , die beschriebenen Bogen der Trajectorie mit s_0 und s bezeichnet werden,

$$10. \quad 2 \int_{t_0}^t (x dx + Y dy + Z dz) = 2 \int_{s_0}^s T ds = m v^2 - m v_0^2.$$

Das Integral $\int_{t_0}^t (X dx + Y dy + Z dz)$ nennt man die totale Arbeit der Kraft für eine bestimmte Zeit zwischen den Grenzen t_0 bis t , und ebenso das Integral $\int_{s_0}^s T ds$, die effectuierte totale Arbeit der Kraft, zwischen den Grenzen genommen, welche den Extremitäten des vom Mobile beschriebenen Weges entsprechen.

Diese Gleichung 10. spricht den Satz aus:

Die Variation, oder, was dasselbe ist, der Zuwachs der lebendigen Kraft eines Mobile, während welcher Zeit immer, wenn es von einer Position zu einer anderen übergeht, ist gleich der doppelten Quantität der, während derselben Zeit, durch die das Mobile sollicitierende Kraft effectuierten totalen Arbeit.

Dieses Princip nennt man das Princip der lebendigen Kräfte.

Man sieht, dass die Kräfte, welche normal zur Trajectorie wirken, indem sie die tangentielle Componente nicht beeinflussen, auch keinen Einfluss auf die totale Arbeit der Kraft haben, welche ja durch $\int T ds$ vorgestellt ist, worin T die tangentielle Componente bedeutet. Auch ist dieses aus § 353 zu ersehen.

Ferner sehen wir, dass die elementare Arbeit $P ds \cos w$ mit dem Ausdrücke der virtuellen Arbeit beim Principe der virtuellen Deplacierung $P \delta s \cos w$ ähnlich ist. Nur wird dort keine durch sollicitierende Kräfte erzeugte reelle Bewegung des Systems vorausgesetzt, und wird die virtuelle Deplacierung durch δs statt ds ausgedrückt.

§ 357. Als Beispiel der totalen Arbeit betrachten wir die Bewegung eines Punktes, der nur von der Kraft der Schwere sollicitiert wird, der Punkt möge ganz frei oder genöthigt sein, auf einer Curve zu bleiben.

Wir nehmen hiezu die Gleichung 7., also den Ausdruck $P ds \cos w$. Dieser wird, wenn man die Projection von ds auf die

verticale Bewegungsrichtung mit dz bezeichnet, gleich sein Pdz . Die totale Arbeit wird demnach sein

$$\int Pds \cos w = \int Pdz = Pz.$$

Bewegt sich der Punkt steigend, so wird die totale Arbeit gleich sein $-Pdz$.

Dieses ergibt sich auch aus dem Ausdrucke

$$\int (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Die Componenten X und Y der verticalen Kraft der Schwere sind gleich Null, die Componente Z ist $= P$, daher ist die totale Arbeit $= \int Pdz = Pz$.

War der Punkt genöthigt, bei der Bewegung auf einer Curve zu bleiben, wo keine Reibung vorhanden ist, so ist diese von keinem Einflusse, indem die die Curve vertretende normale Kraft N die totale Arbeit der Kraft nicht beeinflusst.

Ist P die Resultante mehrerer Kräfte $P', P'', P''' \dots$, so werden die tangentiellen Componenten $T', T'', T''' \dots$ und $T = T' + T'' + T''' + \dots$ sein. Daher

$$\int Tds = \int T'ds + \int T''ds + \dots,$$

folglich

$$11. \quad mv^2 - mv_0^2 = \int Tds = 2 \int (T'ds + T''ds + T'''ds + \dots)$$

Nennt man bewegende Kräfte die, welche mit der Tangente einen spitzen Winkel einschließen, und widerstehende Kräfte die, welche mit der Tangente stumpfe Winkel bilden, so hat man auch den Satz:

Der Zuwachs der lebendigen Kraft eines Mobile, wenn es von einer Position in eine andere übergeht, ist gleich der doppelten Quantität des Übermaßes der Arbeit der bewegenden Kräfte über die Arbeit der widerstrebenden Kräfte.

Folgerungen des Principes der lebendigen Kräfte.

§ 358. Wird der Punkt von keiner Kraft sollicitiert, dann wird, wie wir gesehen,

$$mv^2 = 2 \int (Xdx + Ydy + Zdz) = \text{Constante (§ 349)}.$$

Die Geschwindigkeit des Mobile ist in diesem Falle constant. Angenommen ferner der Ausdruck

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

sei das exacte Differential einer Function $f(x, y, z)$, welche drei

Coordinaten als unabhängige Variable enthält. Dieses erfordert, dass man hat

$$\begin{aligned} X &= \frac{df}{dx} \\ Y &= \frac{df}{dy} \\ Z &= \frac{df}{dz}. \end{aligned}$$

Dann hat man, x, y, z als Functionen der Zeit betrachtet,

$$Xdx + Ydy + Zdz = Tds = df(x, y, z),$$

daher

$$mv^2 = 2f(x, y, z) + c.$$

Bezeichnet man die Werte von x, y, z mit x_0, y_0, z_0 für die Zeit $= t_0$, zu welcher Zeit $v = v_0$ war, so hat man

$$12. \quad mv^2 - mv_0^2 = 2f(x, y, z) - 2f(x_0, y_0, z_0),$$

Diese Gleichung spricht das Theoreme aus: Ist der Ausdruck $Xdx + Ydy + Zdz$ das exacte Differential einer Function $f(x, y, z)$, alsdann ist der Zuwachs der lebendigen Kraft, beim Übergange des Mobile von einer Position (x_0, y_0, z_0) zur anderen (x, y, z) weder von der während des Zeitintervalles durchlaufenen Trajectorie, noch von der Zeit, welche zwischen beiden Lagen verstrichen, sondern einzig und allein von den Coordinaten der beiden Lagen abhängig.

§ 359. Dieser Satz kann allgemeiner gefasst werden. Trifft das Mobile während seiner Bewegung zwei Flächen

$$13. \quad \begin{cases} f(x, y, z) = c \\ f(x, y, z) = c', \end{cases}$$

die erste mit der Geschwindigkeit v_0 im Punkte x_0, y_0, z_0 , die zweite mit der Geschwindigkeit v im Punkte x, y, z , alsdann wird man haben

$$mv^2 - mv_0^2 = 2c - 2c'.$$

Der Zuwachs der lebendigen Kraft ist also constant und unabhängig von der Form der Trajectorie zwischen beiden Flächen, von den Punkten, wo diese Curve die beiden Flächen schneidet, wie auch von der verflossenen Zeit.

Dieses ist ein Fall, den wir früher besprochen, nämlich bei Bewegung eines Punktes, der nur von der Schwere sollicitiert wird.

Ist die z -Achse vertical und im Sinne der Schwere gerichtet, so ist $X = 0$, $Y = 0$, $Z = mg$, dann hat man

$$dmv^2 = 2mgdz.$$

Hier ist die Fläche mgz , also die beiden Flächen

$$f(x, y, z) = c, \quad f(y, x, z) = c'$$

zwei horizontale Flächen

$$mgz = c, \quad mgz = c'.$$

Man sieht daher, dass der Zuwachs der lebendigen Kraft unabhängig sein wird von der Trajectorie AA' , auf welcher der Punkt während seiner Bewegung bleiben müsste.

In dem allgemeinen Falle sei AB die Bahn des Mobile, und die Gleichung $f(x, y, z) = c$ wird eine Schar von Flächen repräsentieren, welche durch die Trajectorie passieren. Der Punkt, welcher

Fig. 83.

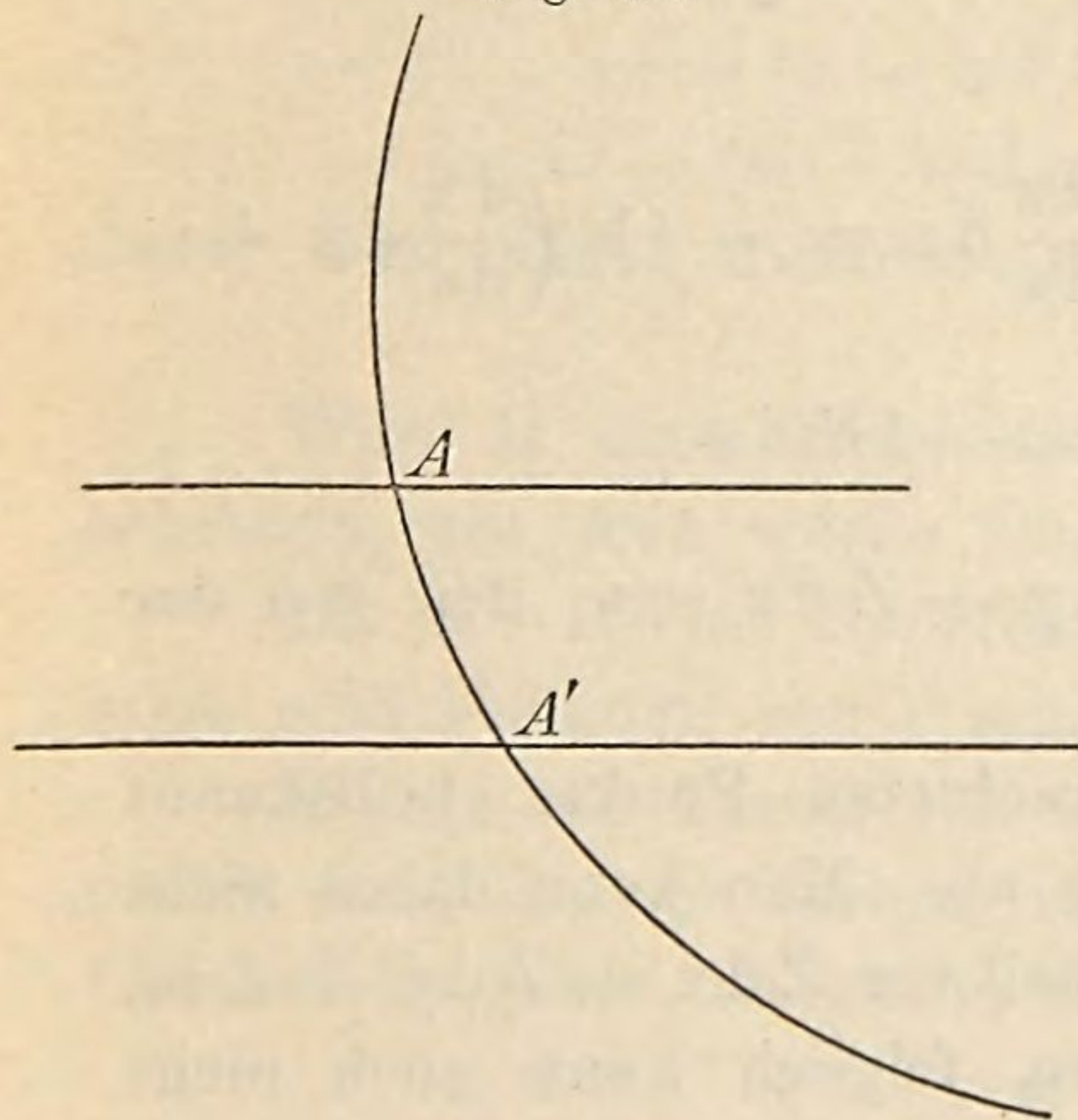
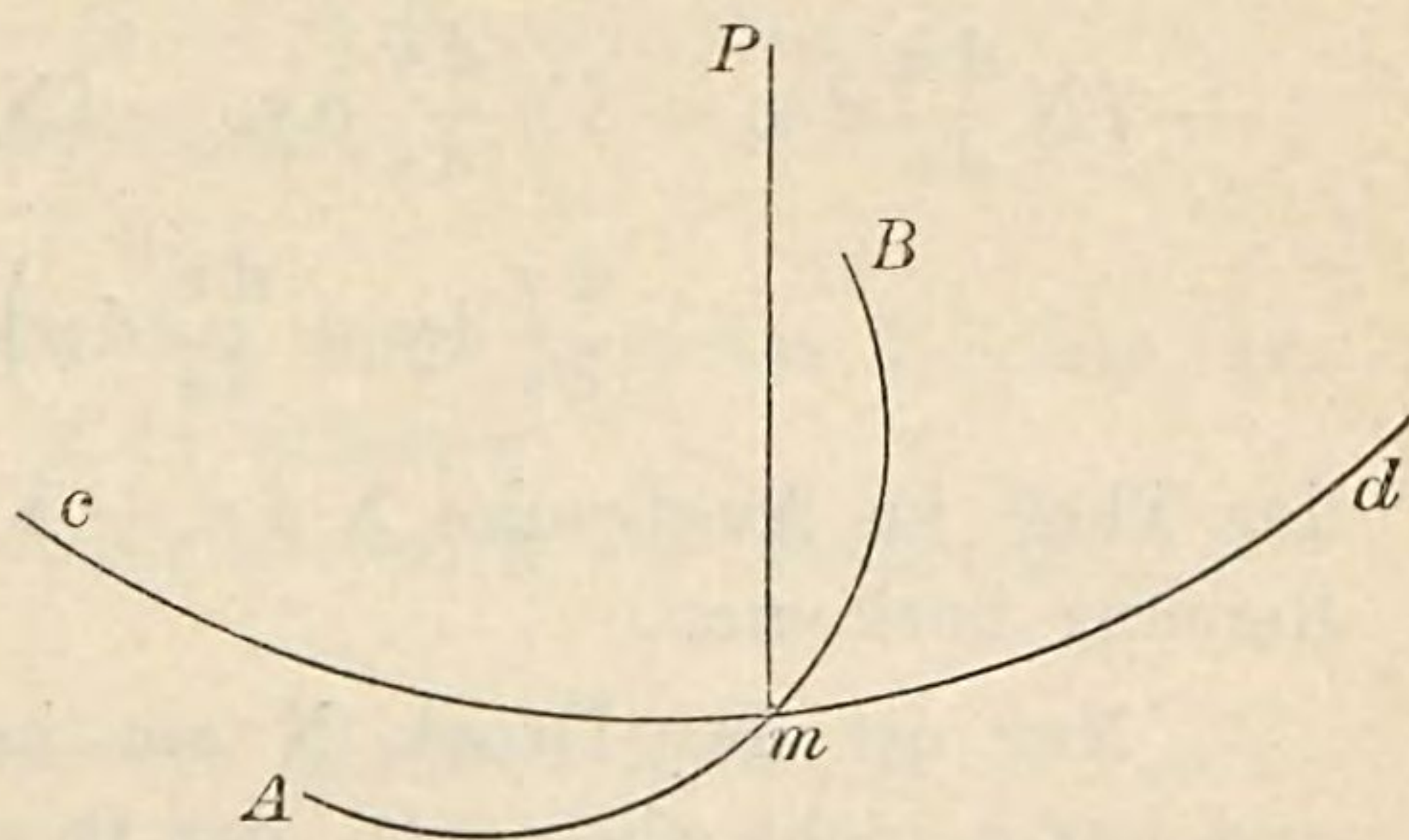


Fig. 84.



nur von der Kraft der Schwere sollicitiert wird, ist gezwungen, auf der Bahn AB zu bleiben. Ist nun CD eine von diesen Flächen, welche die Trajectorie passiert, alsdann wird P nothwendig auf dieser Fläche im Punkte m normal stehen.

Denn die Normale der Fläche CmD schließt mit den Achsen Winkel ein, die den Größen $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$ proportional sind. Diese Größen sind aber, wie wir im § 358 gesehen, proportional den Componenten X , Y , Z , also proportional den Cosinus der Winkel zwischen der Kraft P und den Achsen, mithin ist P senkrecht auf die Fläche CmD . In der That haben wir oben gesehen, dass P senkrecht steht auf der horizontalen Ebene.

Fälle, wenn Reibung vorhanden oder die Bewegung in einem widerstehenden Mittel effectuirt wird.

§ 360. Im Falle Reibung vorhanden oder der Punkt sich in einem widerstehenden Mittel bewegt, ist der Ausdruck nicht mehr exactes Differential einer Function von x, y, z .

Die Reibung ist nach der Tangente der Trajectorie gerichtet, und dies im entgegengesetzten Sinne der Bewegung des Mobile. Solche ist proportional dem Normaldrucke N des Mobile auf die Curve, die es beschreibt. Die Reibung wird daher ausgedrückt sein durch $-fN$, wo f eine durch Versuche für das Mobile festgestellte Größe ist.

Die Componenten dieser Kraft parallel den Achsen werden demnach sein

$$-fN \frac{dx}{ds}, -fN \frac{dy}{ds}, -fN \frac{dz}{ds}.$$

Demnach wird

$$\begin{aligned} -fN \frac{dx}{ds} dx, -fN \frac{dy}{ds} dy, -fN \frac{dz}{ds} dz = -fN \left(\frac{dx}{ds} dx + \right. \\ \left. + \frac{dy}{ds} dy + \frac{dz}{ds} dz \right) = -fN ds \end{aligned}$$

der Theil im Ausdrücke $X dx + Y dy + Z dz$ sein, der von der Reibung herkommt.

Nun ist der Druck N am betrachteten Punkte unbekannt und hängt nicht allein von der Curve ab. Man kann daher nicht behaupten, dass $-fN$, welcher einen Theil von $X dx + Y dy + Z dz$ ausmacht, ein exactes Differential wäre, folglich kann auch nicht $X dx + Y dy + Z dz$ ein exactes Differential sein.

Bei der Bewegung in einem widerstehenden Mittel ist der Widerstand eine Function von v , hat also den Ausdruck $-f(v) ds$, welcher nicht von x, y, z abhängt. Dieser Widerstand, und mithin auch der Ausdruck $X dx + Y dy + Z dz$, von welchem jener einen Theil bildet, können daher nicht exacte Differentiale sein.

Wenn der Punkt durch Kräfte getrieben wird, die gegen feste Mittelpunkte gerichtet sind.

§ 361. Ist der Punkt nur von Kräften sollicitirt, die von festen Centren ausgehen, und sind die Intensitäten dieser Kräfte Functionen der Distanzen des Mobile von seinen verschiedenen

Mittelpunkten, alsdann ist $X dx + Y dy + Z dz$ immer ein exactes Differential.

Sei die Kraft R ausgehend vom festen Centrum O , dessen Coordinaten, bezogen auf drei rechtwinkelige Achsen, a, b, c sind, R übe auf den Punkt m , dessen Coordinaten x, y, z sind, eine Attraction aus, und sei sie eine Function der Distanz $mO = r$ des Punktes m vom Centrum $O = f(r)$.

Die Componenten der Kraft R parallel den Achsen werden sein

$$R \frac{(a - x)}{r}, R \frac{(b - y)}{r}, R \frac{(c - z)}{r},$$

mithin ist der Theil des Ausdruckes $X dx + Y dy + Z dz$, welcher von der Kraft R herrührt,

$$\frac{R}{r} [(a - x) dx + (b - y) dy + (c - z) dz].$$

Man hat aber

$$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$$

$$r dr = -(a - x) dx - (b - y) dy - (c - z) dz,$$

daher wird obiger Ausdruck übergehen in

$$- R dr.$$

Wäre R eine Repulsivkraft, hat man nur das Zeichen zu wechseln, und man würde dann $R dr$ erhalten.

Da nun R eine Function von r ist, wird der Ausdruck $R dr$ auch eine Function von r sein.

Würde ein Punkt von mehreren Kräften $R, R', R'' \dots$ sollicitiert sein, die von festen, vom Mobile um $r, r', r'' \dots$ entfernten Centren ausgehen, so würde man haben

$$14. \quad d m v^2 = 2 [\pm R dr \mp R' dr \mp R'' dr'' \dots],$$

und alsdann wird jedes Glied rechter Hand, mithin die ganze Summe ein exactes Differential sein.

Achtundvierzigstes Capitel.

Princip der Flächenräume.

§ 362. Kommen wir auf die Gleichungen

$$1. \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = X \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z \end{cases}$$

zurück, wo die früher gebrauchten Bezeichnungen beibehalten werden.

Ist also der Punkt m von Kräften sollicitiert, die von festen Centren ausgehen, so nehmen wir diesen Punkt, durch welchen die Kraft passiert, zum Ursprunge der rechtwinkligen Coordinaten, stellen die Kraft, welche auf den materiellen Punkt, ihrer Intensität und Richtung nach durch eine Strecke auf dem Radius vector vor, so wird die Diagonale des zu errichtenden Parallelepipedes die Kraft, und die Seiten desselben die Componenten vorstellen. Die drei Componenten der Kraft sind dann den Längen dieser drei Seiten proportional, so dass wir haben

$$X : Y : Z = x : y : z.$$

Multipliziert man die erste der Gleichungen 1. mit y , die zweite mit x , zieht jene von dieser ab, dann die erste mit z , die dritte mit x , und zieht letztere von der ersten ab, endlich die dritte mit y und die zweite mit z und zieht letztere von der frühern ab, so hat man drei neue Gleichungen.

$$2. \quad \begin{cases} m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = Y x - X y \\ m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = X z - Z x \\ m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = Z y - Y z. \end{cases}$$

Da aber die Kraft (X, Y, Z) durch den Ursprung geht, die drei Coordinaten x, y, z den Componenten der Kraft proportional sind, so hat man, wie erwähnt

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

mithin sind die Glieder rechter Hand in den Gleichungen 2. gleich Null, so dass man hat

$$3. \quad \begin{cases} m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0 \\ m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = 0 \\ m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0. \end{cases}$$

Integriert man diese Gleichungen, nennt die Constanten c', c'', c''' , so hat man

$$4. \quad \begin{cases} m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = c', & m (x dy - y dx) = c' dt \\ m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = c'', & m (z dx - x dz) = c'' dt \\ m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = c''', & m (y dz - z dy) = c''' dt. \end{cases}$$

Integriert man die Gleichungen 4., beobachtet, dass hier eine Constante nicht beizusetzen ist, da für $t = 0$ die Ausdrücke Null zu sein haben, so wird

$$5. \quad \begin{cases} \int m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = c' t \\ \int m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = c'' t \\ \int m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = c''' t. \end{cases}$$

Setzen wir ferner in der ersten der Gleichungen 4., um die rechtwinkligen Coordinaten in Polarcoordinaten umzuwandeln,

$$x = r \cos \Theta$$

$$y = r \sin \Theta$$

und daraus

$$dx = \cos \Theta dr - r \sin \Theta d\Theta$$

$$dy = \sin \Theta dr + r \cos \Theta d\Theta.$$

Dadurch geht die erste der Gleichungen 4. über in

$$\frac{r^2 d\Theta}{dt} = \frac{x dy - y dx}{dt} = c'.$$

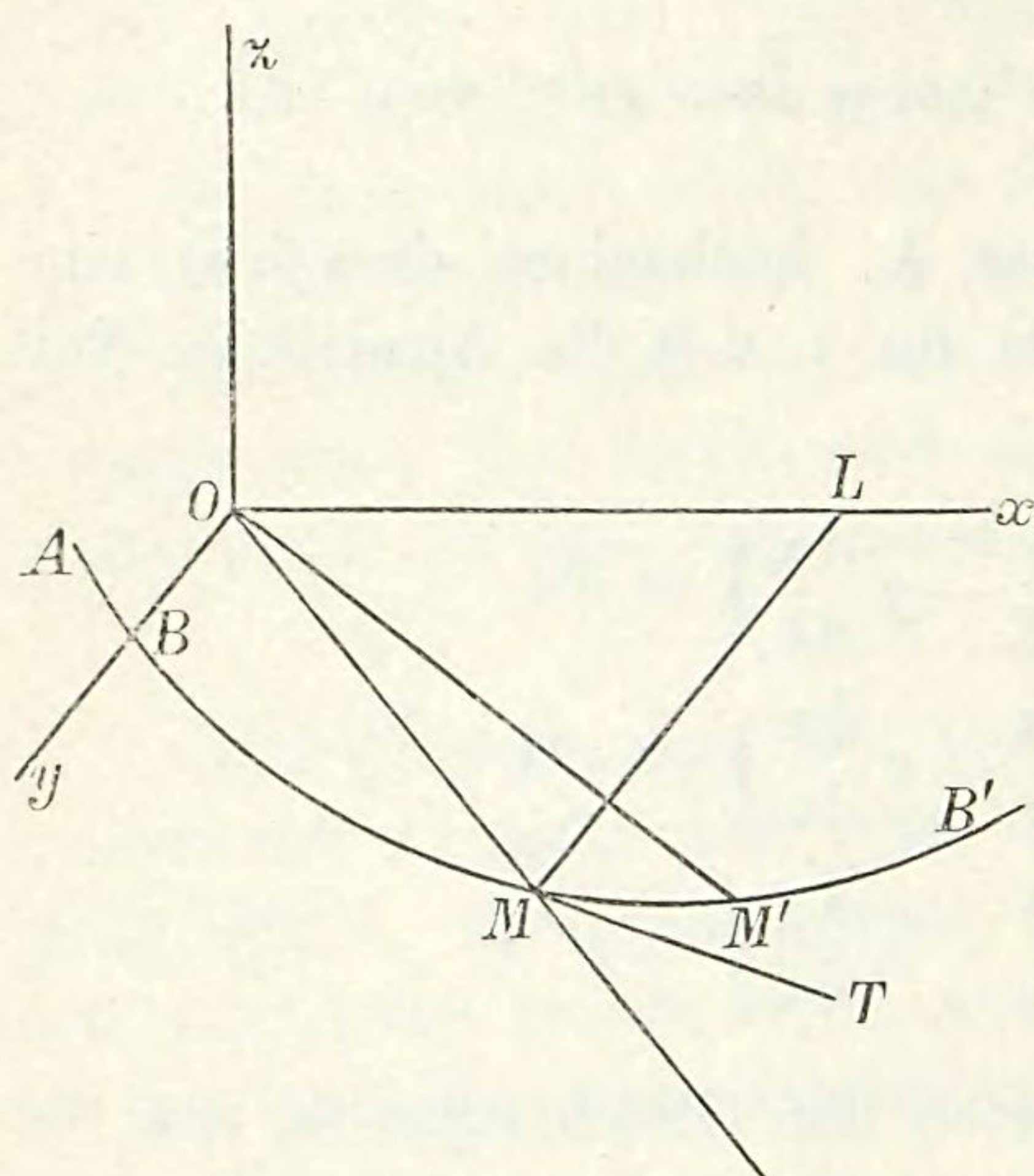
Die Glieder rechter Hand der Gleichung 4. sind also, wie man aus der Kinematik weiß, nichts Anderes als die doppelte Quantität der Flächengeschwindigkeit der respectiven Projectionen des sich bewegenden Punktes auf die Coordinatenebenen.

§ 363. Man kann aber dieses Resultat direct finden.

Während der Punkt $m(x, y, z)$ seine Trajectorie beschreibt, durchläuft seine Projection auf die Ebene der xyM in dieser Ebene die Bahn ABM , und zur Zeit t sei M die Projection des mobilen Punktes, ML , OL die Coordinaten von M . Sei ferner B der Punkt, in welchem diese Curve die y -Achse trifft, OBM der Sector der Bahn der Projection M , welcher gleich ist der Fläche $OBML$ — der Fläche OLM .

Ist ferner M' die Projection des mobilen Punktes m auf die Ebene der xy zur Zeit $t + dt$, so ist MOM' die Fläche, welche

Fig. 85.



die Projection des Radius vectors des mobilen Punktes auf die Ebene der xy , nämlich der Radius vector der Projection M in dieser Ebene, während des Zeitelementes dt beschreibt. Die Fläche MOM' ist also das Differential des Sectors OBM . Bezeichnet man die Fläche $OBML$ mit q , das Dreieck OML mit p , den Sector OBM mit s , so ist $MOM' = ds$, und hat man

$$p = \frac{1}{2} xy$$

$$s = q - p$$

$$dq = ydx$$

$$dp = \frac{1}{2} xdy + \frac{1}{2} ydx$$

$$ds = ydx - \frac{1}{2} (xdy + ydx) = \frac{1}{2} (ydx - xdy) = \frac{1}{2} c' dt.$$

Die erste der Gleichungen 4. spricht also aus, dass die von der Projection des Radius vectors des Punktes m , in der Ebene der xy , während des Zeitelementes dt beschriebene Fläche MOM' constant und gleich ist $\frac{1}{2} c' dt$. Es ist daher die während der Zeit t be-

schriebene Fläche gleich $\frac{1}{2} c' t$, also der Zeit t proportional.

§ 364. Die anderen zwei Gleichungen 4. sprechen denselben Satz bezüglich der Projectionen des Radius vectors des Punktes m auf die Ebenen der xz und der yz aus.

Die Größen c' , c'' , c''' repräsentieren also das Verhältniss der doppelten Quantität der in einem Zeitelemente dt von der Projection des Radius vectors des Punktes m auf eine Coordinatenebene beschriebenen Fläche, dividiert durch die Zeit, die nöthig war, um diese Fläche zu beschreiben, und überhaupt das Verhältniss zwischen dem Zweifachen der vom Radius vector beschriebenen Fläche und der

zu ihrer Beschreibung verwendeten Zeit, und die Gleichungen 4. und 5. sprechen das Theoreme aus:

Wenn ein materieller Punkt unter dem Einflusse einer Kraft sich bewegt, welche constant nach einem festen Centrum gerichtet ist, alsdann beschreibt die Projection des Radius vectors des mobilen Punktes auf eine durch das Centrum gehende Coordinatenebene, daher auch auf eine beliebige, durch das Centrum gehende Ebene, Flächen in dieser Ebene, welche den dazu verwendeten Zeiten proportional sind.

Dieses Theoreme nennt man das Princip der Flächen.

§ 365. Multipliciert man die Gleichungen 4. bezüglich mit z , y , x , und addiert dieselben, so hat man

$$6. c'z + c''y + c'''x = 0,$$

welche Gleichung beweist, dass die Trajectorie eben ist.

Man kann diese Ebene zur Coordinatenebene der $x y$ geben, und man sieht alsdann, dass auch die vom Radius vector des mobilen Punktes in der Ebene seiner Trajectorie beschriebene Fläche der Zeit proportional ist, und mithin muss die Fläche, welche die Projection des Radius vectors des mobilen Punktes auf irgend eine Ebene in dieser Ebene beschreibt, der Zeit proportional sein, da diese beschriebene Fläche mit der auf der Ebene der Trajectorie beschriebenen Fläche bekanntlich in einem constanten Verhältnisse stehen.

Trifft umgekehrt, bei der Bewegung eines Punktes, die Eigenthümlichkeit des Flächenprincipes ein, für drei auf einander senkrechte, durch das Centrum der Flächen gelegte Ebenen, so kann man daraus den Schluss ziehen, dass das Mobile von einer constanten, gegen das fixe Centrum gerichteten Kraft sollicitiert wird.

Sind nämlich die Gleichungen 4. gegeben, so erhält man daraus durch Differentiation die Gleichungen 3., und daraus erhält man aus den allgemein giltigen Gleichungen 2.

$$X y = Y x$$

$$Z x = X z$$

$$Y z = Z y.$$

Daraus sieht man aber, dass die Kraft oder die Resultante der Kräfte durch den Ursprung der Coordinaten geht und constant gegen das fixe Centrum gerichtet ist, da sich die Componenten X , Y , Z wie die Coordinaten des Mobile verhalten.

$$2. \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g$$

zu betrachten.

Die erste der Gleichungen gibt, wenn man integriert und bedenkt, dass die Projection der dem Mobile zur Zeit $t = 0$ ertheilten Geschwindigkeit v_0 auf die x -Achse gleich $v_0 \cos a$ ist, das Projectile sich ferner zur Zeit $t = 0$ am Ursprunge befand, dessen Coordinaten $x = 0$, $y = 0$ sind,

$$3. \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos a$$

$$4. \quad x = v_0 t \cos a.$$

Integriert man die Gleichung 2., erwägt, dass die Projection der Geschwindigkeit v_0 auf die y -Achse gleich ist $v_0 \sin a$, und dass $\frac{dy}{dt}$ zur Zeit $t = 0$, gleich ist $v_0 \sin a$, so ergibt sich

$$5. \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin a$$

$$6. \quad y = -\frac{gt^2}{2} + tv_0 \sin a.$$

Quadriert und addiert man die Gleichungen 3. und 5., so hat man, da $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}$ ist,

$$7. \quad \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = v^2 = v_0^2 \cos^2 a + (v_0 \sin a - gt)^2 = \\ = v_0^2 - 2gy.$$

Der numerische Wert der Geschwindigkeit des Mobile in seiner Trajectorie ist in jedem Zeitpunkte derselbe, als wenn das Mobile in verticaler Richtung, ohne Anfangsgeschwindigkeit, von einem Punkte gefallen wäre, dessen Höhe über dem Ausgangspunkt $\frac{v_0^2}{2g}$ ist.

Denn der Ausdruck für die von einem Mobile, welches im leeren Raume in verticaler Richtung von der Höhe h herabgefallen, am Ende des beschriebenen Weges erlangte Geschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Setzt man darin für h die Größe $\frac{v_0^2}{2g} - y$, so kommt

$$v = \sqrt{2g \frac{v_0^2}{2g} - 2gy}.$$

§ 368. Eliminiert man aus den Gleichungen 4. und 6. die Zeit, so hat man die Gleichung der Trajectorie des Mobile

$$8. \quad y = \frac{-g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 a} + x \tan a.$$

Es ist die einer Parabel, welche die concave Seite der x -Achse zuwendet, und deren verticale Achse nach unten gerichtet ist, da der Coefficient von x^2 , nämlich $\frac{-g}{2 v_0^2 \cos^2 a}$, negativ ist. Der Parameter der Parabel ist $\frac{v_0^2 \cos^2 a}{g}$.

Wäre a negativ, so würde $\frac{dy}{dt}$ nach 5. immer negativ sein, y würde constant abnehmen, und das Mobile würde nie durch den Scheitel der Parabel gehen. Angenommen also, a sei > 0 , so beginnt $\frac{dy}{dt}$ mit einem positiven Werte und das Mobile steigt. Es steigt bis zu einem Höhepunkte, wo $\frac{dy}{dt}$ sich annulliert, und trifft ein am Ende einer Zeit, welche durch die Gleichung 5. gegeben ist, wenn man darin $t = t'$ und $\frac{dy}{dt} = 0$ setzt, also

$$-g t' + v_0 \sin a = 0$$

$$t' = \frac{v_0 \sin a}{g}.$$

§ 369. Hat das Mobile seine Maximalhöhe erreicht, so wird seine Geschwindigkeit, kraft der Gleichung 7., minima sein. Die Coordinaten des höchsten Punktes s , des Scheitels der Parabel, welche wir mit x' und y' bezeichnen, sind, wenn man in 4. und 6. für t die Zeit t' einsetzt,

$$9. \quad \begin{cases} x' = v_0 t' \cos a = \frac{v_0^2 \sin 2a}{2g} \\ y' = -g \frac{t'^2}{g} + v_0 t' \sin a = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 a. \end{cases}$$

Nach diesem Zeitpunkte wird $\frac{dy}{dt}$ negativ, und das Mobile fällt. Repassiert es zu einer Höhe, wo es früher war, so hat es dieselbe numerische Geschwindigkeit, die es beim Aufsteigen hatte, und insbesondere gelangt es zum Punkte A , welcher im Niveau des

Ausgangspunktes O liegt, mit der Geschwindigkeit v_0 an, was alles 7. zu ersehen ist.

Die horizontale Weite OA ist das Doppelte der Abscisse x' des Scheitels, was sich ergibt, wenn in der Gleichung 8. $y = 0$ gesetzt wird, indem man dann erhält

$$10. \quad OA = \frac{v_0^2 \sin 2a}{g}.$$

Um die größte Weite zu erzielen, das ist, damit bei einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit OA die möglichst größte Weite werde, muss $\sin 2a$ ein Maximum werden, also $a = \frac{\pi}{4}$ sein.

Gesetzt also, man suche einen Punkt B der Ox zu erreichen, dessen Abscisse kleiner sei als $\frac{v_0^2}{g}$, wird die Neigung des Wurfes gegeben sein durch

$$\sin 2a = \frac{g \cdot OB}{v_0^2}.$$

Man hat also zwei Auflösungen, welche gleich weit von $\frac{\pi}{4}$ abstehen, und gelangt zum Punkte im Wege zweier Parabeln. Die untere Parabel beschreibt das Mobile in kürzerer Zeit.

§ 370. Man kann die Lage der einem gegebenen Winkel a entsprechenden Parabel geometrisch bestimmen.

Zu dem Ende wird vor allem festgesetzt, dass alle Parabeln, welche infolge der Variirung des Winkels a entstehen, eine Directrice D haben, welche, parallel der x -Achse, die y -Achse in der Höhe

$$y = \frac{v_0^2}{2g}$$

trifft.

Denn der Parameter der vom Mobile beschriebenen Parabel ist

$$p = \frac{v_0^2 \cos^2 a}{g}.$$

Die Ordinate des Scheitels ist

$$y' = \frac{v_0^2 \sin^2 a}{2g},$$

folglich ist die Gleichung der Directrice, wenn man ihre Distanz vom Ursprunge mit h bezeichnet,

$$11. \quad h = y' + \frac{p}{2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Die Directrice D liegt also in einer Höhe, die das Mobile erreichen würde, wenn es mit der Geschwindigkeit v_0 in verticaler Höhe lanciert worden wäre.

Zieht man nun eine Tangente am Ursprunge $O v_0$, so muss sich der Brennpunkt auf einer Linie OF befinden, die so gezogen ist, dass die Tangente $O v_0$ den Winkel FOD halbiert.

Der Brennpunkt wird aber auf dem Kreise liegen, der von O mit dem Halbmesser OD gezogen ist. Der Brennpunkt F liegt also auf dem Schnitte beider.

Man sieht daher, dass der Ort aller Brennpunkte der infolge der Variirung des Winkels α entstehenden Parabeln ein Kreis ist, dessen Centrum der Ursprung O und dessen Halbmesser OD ist.

§ 371. Wollen wir nun den Winkel α suchen, unter welchem ein Projectile lanciert werden müsste, um einen gegebenen Punkt M_1 (x_1, y_1) in der Verticalebene xy zu erreichen.

Setzt man $\tan \alpha = u$, und mithin $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + u^2}$ ist, so wird die Gleichung 8. der Trajectorie

$$y = \frac{-g x^2}{2 v_0^2} (1 + u^2) + u x.$$

Die Parabel hat durch den Punkt $x_1 y_1$ zu gehen, und man hat daher

$$12. \quad y_1 = \frac{-g x_1^2}{2 v_0^2} (1 + u^2) + u x_1.$$

Damit die Wurzeln dieser Gleichung reell sind, muss sein, indem die Gleichung 12. den Wert von u gibt,

$$u = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2 v_0^2 g y - g^2 x^2}}{g x},$$

dass man hat

$$13. \quad v_0^4 - 2 v_0^2 g y_1 - g^2 x_1^2 \geq 0,$$

oder dass

$$14. \quad \frac{v_0^2}{2g} - y_1 - \frac{g x_1^2}{2 v_0^2} \geq 0.$$

§ 372. Betrachten wir nun eine Parabel, welche die Gleichung hat

$$15. \quad \frac{v_0^2}{2g} - y - \frac{g x^2}{2 v_0^2}.$$

Diese Parabel hat zum Parameter $\frac{v_0^2}{g}$, zum Scheitel einen Punkt, dessen Coordinaten $x = 0, y = \frac{v_0^2}{2g}$, also den Punkt D, und

den Brennpunkt, dessen Entfernung vom Scheitel $\frac{p}{2}$ ist, nothwendig im Ursprunge 0.

Die Bedingung der Realität 14. drückt also aus, dass der Punkt M_1 sich innerhalb höchstens auf dieser Parabel sich befinde. Diese Parabel nennt man Parabel der Sicherheit.

Liegt der Punkt innerhalb der Parabel der Sicherheit 15., alsdann gibt die Gleichung 12. zwei verschiedene Werte von u , und wird es zwei Arten geben, um den Punkt M_1 zu erreichen, indem man das Projectile unter zwei verschiedenen Winkeln lanciert (Fig. 86). Befindet sich der Punkt M_1 auf der Parabel der Sicherheit, alsdann hat die Gleichung 12. zwei gleiche Wurzeln und der Punkt M_1 kann nur in einer einzigen Art erreicht werden. Im Falle u zwei verschiedene Wurzeln hat, gibt es zwei Trajectorien, die durch den Punkt M_1 gehen, entsprechend zwei Werten a' , a'' des Winkels a . Die Zeiten, die vom Mobile aufgewendet wurden, um M_1 zu erreichen, sind respective

$$t' = \frac{x_1}{v_0 \cos a'_1}, \quad t'' = \frac{x_1}{v_0 \cos a''}$$

welche Werte aus 4. zu entnehmen sind. Die kürzere Zeit entspricht dem kleineren Winkel.

§ 373. Die Parabel der Sicherheit ist die einhüllende Curve aller Trajectorien, die man erhält, indem man den Winkel a , also u , variieren lässt.

In der That, um die einhüllende Curve der Curven, welche durch die Gleichung 12. repräsentiert sind, in welcher u ein variabler Parameter ist, reicht es hin auszudrücken, dass diese Gleichung, als Gleichung von u , zwei gleiche Wurzeln hat, und eben das haben wir gemacht, um die Parabel der Sicherheit zu erhalten.

Man weiß auch, dass man die einhüllende Curve erlangt, wenn man zwischen der Gleichung 8. und deren Derivierten a eliminiert, oder zwischen der Gleichung 12. und deren Derivierten u eliminiert. Effectuiert man diese Elimination, so kommt man auf die Gleichung 15., das ist die Parabel der Sicherheit.

§ 374. Man kann der Gleichung 8. eine bequemere Gestalt geben, wenn man darin den Wert von h aus 11. einführt.

Man hat daraus

$$v_0^2 = h 2g.$$

Führen wir also diesen Wert von v_0^2 in 8. ein, so hat man

$$4h \cos^2 a y - 4hx \sin a \cos a + x^2 = 0$$

oder

$$(x - 2h \sin a \cos a)^2 = 4h \cos^2 a (h \sin^2 a - y).$$

Setzt man

$$h \sin^2 a - y = y'$$

$$x - 2h \sin a \cos a = x',$$

so wird die Gleichung der Parabel

$$16. \quad x'^2 = 4h \cos^2 a y'.$$

Durch diese Operation haben wir den Ursprung in den Scheitel der Parabel versetzt. Die Tangente am Scheitel ist die x -Achse, und die Achse der Parabel die y -Achse, was sich aus 9. ergibt, wenn darin statt v_0^2 die Größe $2gh$ gesetzt wird, indem man dann hat $x_1 = h \sin 2a = 2h \sin a \cos a$, $y_1 = h \sin^2 a$ als Coordinaten des Scheitels.

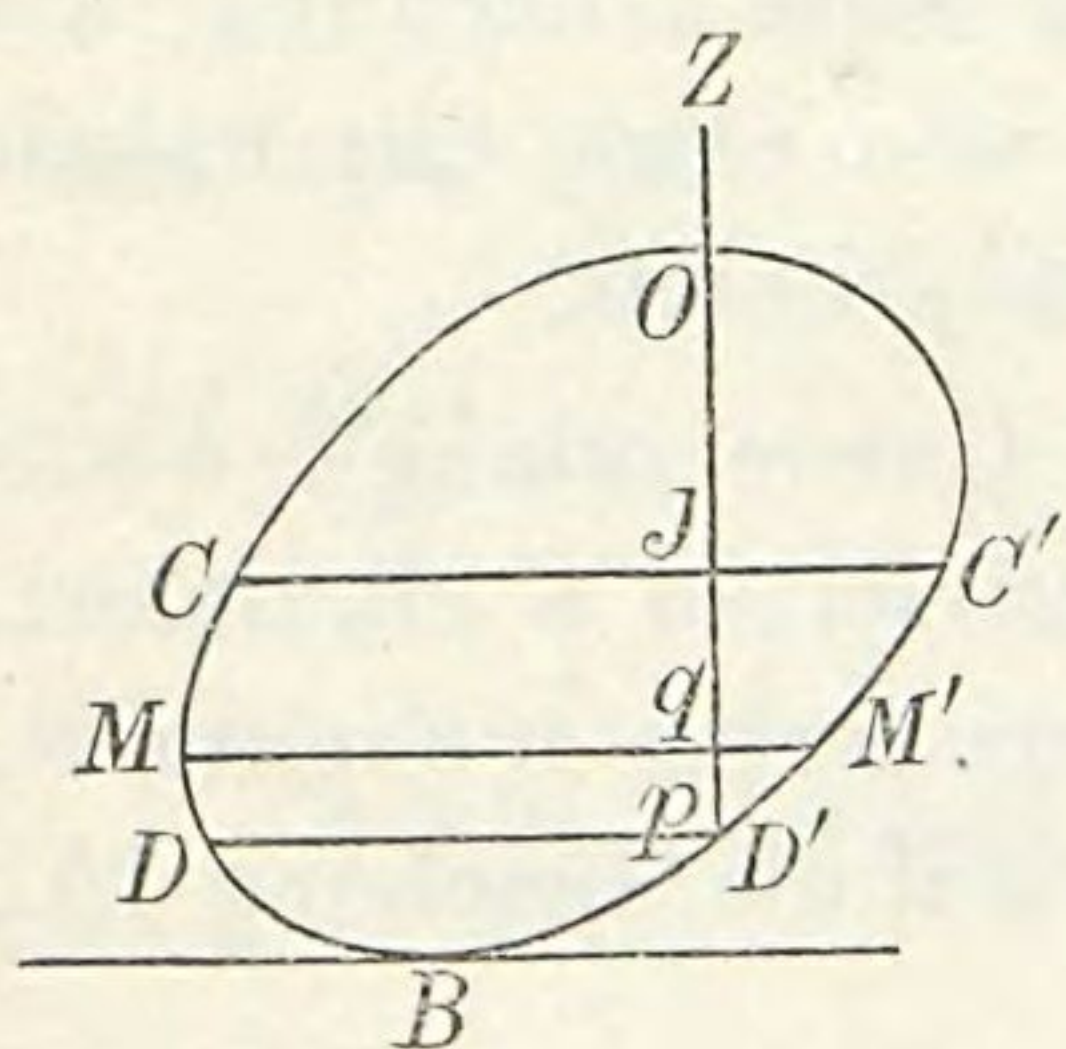
Die Bewegungen eines Projectiles in einem widerstehenden Mittel werden wir bei der Dynamik eines Körpers behandeln.

Fünzigstes Capitel.

Bewegung eines Punktes, der genöthigt ist, auf einer Curve zu bleiben, im leeren Raume.

§ 375. Bewegt sich ein schwerer Punkt im leeren Raume, auf einer gegebenen verticalen Curve, nur von der Schwere sollicitiert,

Fig. 87.



und nehmen wir an, B sei der tiefste, O der höchste Punkt, so ist die Arbeit dieser Kraft, wie wir aus dem früheren wissen, indem $X = 0$, $Y = 0$ sind, wenn wir die z -Achse im Sinne der Schwere richten, mgz , und das Princip der lebendigen Kräfte gibt uns

$$1. \quad v^2 - v_0^2 = 2g(z - h).$$

Den Ursprung der Coordinate der z setzen wir in O, und das Mobile sei von M ausgegangen, dessen Coordinate $z = Oq = h$ und die Geschwindigkeit daselbst $= v_0$ ist.

Ist $v_0 = 0$, so ist die Gleichung

$$2. \quad v^2 = 2g(z - h).$$

Hat das Mobile den Weg MD beschrieben, wo $z = Op$ ist, indem es von M ohne Anfangsgeschwindigkeit ausgegangen, so wird man haben, da

$$z - h = qp$$

ist,

$$v^2 = 2g \cdot qp.$$

Das Mobile wird demnach eine Geschwindigkeit erlangt haben, als wenn es frei die Höhe qp herabgefallen wäre.

Ist B der tiefste Punkt, so wird das Mobile hier seine größte Geschwindigkeit erlangt haben, da hier z seinen größten Wert hat, und kraft dieser Geschwindigkeit wird es seine Bahn fortsetzen, und sich, den Curventheil BM' mit abnehmender Geschwindigkeit durchlaufend, bis zu einem Punkte M' erheben, der im Niveau des Ausgangspunktes M liegt, wo also $z = h$ und v , vermöge der Gleichung 2., gleich Null wird.

Von M' wird das Mobile unter dem Einflusse der Schwere eine vertical absteigende Bewegung nehmen, wiederum in B seine größte Geschwindigkeit erlangen, aber in entgegengesetztem Sinne, und zurück zum Ausgangspunkte M gelangen.

In M wird sich der frühere Vorgang wiederholen, und das Mobile wird ohne Aufhören den Bogen MBM' bald in einem, bald in entgegengesetztem Sinn beschreiben. Die Zeit, die das Mobile benötigt, um den Bogen MD herabzusteigen, ist gleich der Zeit, die es benötigt, um denselben in aufsteigender Richtung zu durchlaufen. Mit anderen Worten: Die Schwingungen sind alle von gleicher Dauer, eine solche möge von M nach M', oder von M' nach M gehen, alle diese Oscillationen sind isochron, weil jedes Curvenelement ds in beiden Fällen mit derselben Geschwindigkeit durchlaufen wird, und der numerische Wert der Geschwindigkeit des Mobile immer derselbe ist, wenn das Mobile in derselben Höhe placiert ist.

Ferner wird das Mobile aus der Verticalebene nicht heraustreten, da die Componente $Y = 0$ ist.

§ 376. Hatte das Mobile am Ausgangspunkte M, für welchen $z = h$ ist, eine Anfangsgeschwindigkeit $= v_0$, so kommt die Gleichung 1.

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - h)$$

zur Anwendung.

Das Mobile hat auch hier in B die größte Geschwindigkeit, wird sich aber hier bei seiner Bewegung über M' erheben. Man wird drei Fälle unterscheiden:

a) Ist $v_0^2 < 2gh$, ist also das Mobile in M mit einer kleineren Geschwindigkeit begabt, als wenn es die Höhe $Oq = h$ herabgefallen wäre, so wird es nur zu einem gewissen Punkte C' steigen, der durch die obige Gleichung 1. bestimmt ist, wenn man darin $v = 0$ setzt, wo dann

$$z = Oi = h - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{2gh - v_0^2}{2g}$$

wird, welcher Ausdruck infolge der Voraussetzung positiv ist. Dahin angelangt, wird das Mobile, unter dem Einflusse der Schwere, herabsteigen, in B seine größte Geschwindigkeit erlangen, dann mit abnehmender Geschwindigkeit bis zu einem Punkte C gelangen, welcher im Niveau des Punktes C' liegt und continuierlich oscillierend den Bogen CBC' bald in einem, bald in anderem Sinne in gleichen Zeiten beschreiben.

b) Ist $v_0^2 > 2gh$, wird das Mobile auf seiner Bahn den Punkt O überschreiten und die ganze Curve unendlich vielemale immer im selben Sinn durchlaufen. Am Punkte O wird es die Geschwindigkeit $\sqrt{v_0^2 - 2gh}$ haben.

c) Ist $v_0^2 = 2gh$, so wird sich das Mobile, indem für $v = 0$, $z = 0$, $v_0^2 = 2gh$ ist, bis zum Punkte O bewegen, woselbst seine Geschwindigkeit erlischt. Es wird aber diesen Punkt O, dem es sich unaufhörlich nähert, erst nach einer unendlich langen Zeit erreichen, weil seine Geschwindigkeit unendlich klein wird, und mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit zum Punkte O erst nach unendlich langer Zeit gelangen kann.

Einundfünfzigstes Capitel.

Einfaches Pendel.

Bewegung im leeren Raume.

§ 377. Einen materiellen Punkt, der nur von der Schwere sollicitiert wird, attachiert an einem feinen, unausdehnbaren und gewichtigen Faden, dessen anderes Enden fixiert ist, nennt man einfaches Pendel.

Sei nun O der Punkt, an dem das Pendel fixiert wurde, OA die Länge des Fadens, an dessen Ende A der materielle Punkt attachiert ist, und OA die Anfangslage des Pendels. In O setzen wir den Ursprung der Coordinaten, die z-Achse richten wir im Sinne der Schwere.

Setzt man für v seinen Wert $-r \frac{d\Theta}{dt}$, so hat man

$$2. \quad v = -r \frac{d\Theta}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2gr(z-h)},$$

und setzt man für z und h die obangegebenen Werte, so kommt

$$3. \quad dt = \frac{-r d\Theta}{\sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos\Theta - \cos a)}},$$

als Differentialgleichung der Bewegung, welche im allgemeinen nicht integrierbar ist.

Das Pendel wird, wie bei der Bewegung auf einer Curve, ohne Aufhören isochrone Schwingungen machen und aus der verticalen Ebene nicht heraustreten. Die Bahn, die das Pendel von einem Ende A bis zum anderen Ende A' beschreibt, wird eine ganze Schwingung genannt, die äußerste Winkelentfernung des Pendels von der Verticalen nennt man Amplitude.

§ 379. Würde dem Pendel in seiner Anfangslage keine Geschwindigkeit ertheilt, alsdann ist $v_0 = 0$, und die Gleichung der Bewegung wird

$$4. \quad dt = \frac{-r d\Theta}{\sqrt{2gr(\cos\Theta - \cos a)}} = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{d\Theta}{\sqrt{2\cos\Theta - 2\cos a}}.$$

Durch diese Annahme wird die Allgemeinheit der Aufgabe zur Auffindung der Bewegungsgleichung für den Pendel keineswegs eingeschränkt. Denn angenommen, die Anfangsgeschwindigkeit war nicht Null, so kann man den Winkel a um entsprechende Quantität vergrößern, also eine Lage Ox annehmen lassen, in welcher die Geschwindigkeit gleich 0 war. Man wird also Ox als die Anfangslage, und xOB als a annehmen, wo dann also $v_0 = 0$ wird und die Aufgabe ungeändert bleibt.

Diese Form 4. ist aber, wie wir sehen werden, integrierbar.

§ 380. Man kann die Gleichung 3. integrieren, wenn man hat

$$v_0^2 = 2gr(1 + \cos a).$$

Dieser Fall tritt ein, wenn das Pendel von der höchsten Spitze A'' , ohne Anfangsgeschwindigkeit, die Trajectorie $A''A$ absteigend durchläuft, wo es also in A die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2gA''H} = \sqrt{2g(r+h)} = \sqrt{2g(r+r\cos a)} = \\ &= \sqrt{2gr(1+\cos a)} \end{aligned}$$

erlangt.

Die Gleichung 3. wird alsdann

$$\begin{aligned} 5. \quad dt &= \frac{-r d\theta}{\sqrt{2gr(1 + \cos \theta)}} \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = 2x,$$

so wird

$$6. \quad dt = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{dx}{\sin x \cos x} = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan x} = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{d \tan x}{\tan x},$$

und daher

$$7. \quad dt = \sqrt{\frac{r}{g}} d \ln \tan x.$$

$$\begin{aligned} 8. \quad t &= \sqrt{\frac{r}{g}} \ln \tan x + c \\ &= \sqrt{\frac{r}{g}} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right) + c, \end{aligned}$$

wo die Constante dadurch bestimmt wird, dass man für $t = 0$ $\theta = a$ hat.

Daher

$$9. \quad t = \sqrt{\frac{r}{g}} \ln \left[\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{4}\right)} \right].$$

Setzt man hier $\theta = 0$, so hat für die Zeit, welche erforderlich ist, damit das Mobile bis zum tiefsten Punkte B gelange, wo $\theta = 0$ ist, also für Zeitdauer einer halben Schwingung, wenn wir diese Zeit t' nennen,

$$10. \quad t' = \sqrt{\frac{r}{g}} \ln \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{4}\right).$$

Will man die Zeit haben, die das Mobile benöthigt, um nach A'' rückzulangen, hat man in der Gleichung 9. $\theta = -\pi$ zu setzen, was $t = \infty$ gibt. Das Mobile braucht also eine unendlich große Zeit, um A'' zu erreichen.

§ 381. Man kann zur Gleichung 4. in anderer Weise gelangen, wobei wir die früheren Bezeichnungen beibehalten, und $v_0 = 0$ ist.

Eine verticale Kraft, vorgestellt an Intensität und Richtung durch die Strecke MN (Fig. 88), decomponieren wir, wie bei der schiefen Ebene, in zwei Componenten, eine in der Richtung der Verlängerung des Pendels, die durch den Widerstand des fixen Punktes O zerstört wird, und eine zweite, auf dem Pendel in jeder seiner Lagen senkrechte, tangentielle Componente, welche allein das Pendel in Bewegung setzt.

Die auf das Pendel wirkende Kraft der Schwere ist, wenn der sich bewegende Massepunkt mit m bezeichnet wird, mg , und hat daher die tangentielle Kraft

$$mg \sin \Theta$$

zum Ausdrucke.

Man sieht daher, dass die das Pendel bewegende Kraft nicht constant ist. Sie ist variabel, da der Winkel Θ veränderlich ist.

§ 382. Die tangentielle Kraft hat zum Ausdrucke

$$m \frac{dv}{dt}.$$

Man hat daher

$$11. \quad \begin{cases} m \frac{dv}{dt} = mg \sin \Theta \\ \frac{dv}{dt} = g \sin \Theta. \end{cases}$$

Andererseits haben wir

$$12. \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = -r \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = g \sin \Theta,$$

daher

$$13. \quad \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \frac{g}{r} \sin \Theta = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $2 d\Theta$ und integriert, so hat man

$$14. \quad \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 - \frac{2g}{r} \cos \Theta + c = 0.$$

Da die Anfangsgeschwindigkeit $= 0$ war, so ist für

$$\Theta = a, \quad \frac{d\Theta}{dt} = 0,$$

mithin

$$c = \frac{2g}{r} \cos a.$$

Die Gleichung 14. wird demnach

$$15. \left(\frac{d\Theta}{dt} \right)^2 - \frac{2g \cos \Theta}{r} + \frac{2g}{r} \cos a = 0,$$

daher

$$16. dt = \mp \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{d\Theta}{\sqrt{2 \cos \Theta - 2 \cos a}},$$

welche mit der Gleichung 4. identisch ist, und ist das negative Zeichen zu nehmen, wenn das Mobile sich im Sinne A B A' bewegt, und das positive bei der Bewegung im entgegengesetzten Sinne.

§ 383. Um die Zeitdauer einer Schwingung zu berechnen, setzen wir

$$1 - \cos \Theta = x$$

$$1 - \cos a = \beta,$$

und alsdann hat man

$$d\Theta = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$2 \cos \Theta - 2 \cos a = 2(\beta - x),$$

daher

$$17. dt = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2} \sqrt{1 - \frac{x}{\beta}}}.$$

Daraus wird man die Dauer einer halben Schwingung bestimmen, wenn man das Integral der Gleichung 16. von $\Theta = a$ bis $\Theta = 0$, und mithin das Integral der Gleichung 17. von $x = \beta$ bis $x = 0$ nimmt, und die Grenzen vertauscht.

Nimmt man dann das Integral doppelt, so wird man die Dauer einer ganzen Schwingung haben, die wir mit T bezeichnen,

$$18. T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2} \sqrt{1 - \frac{x}{\beta}}}.$$

Entwickelt man das Binom $\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}$, so hat man

$$19. T = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{x}{\beta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{x}{\beta}\right)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^n \right].$$

Aus der Integralzeichnung ist bekannt, dass

$$\int_0^\beta \frac{x^n dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = \pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \beta^n,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = \arcsin \frac{2x - \beta}{\beta}, \quad \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = \pi \text{ sind.}$$

Man hat daher

$$20. \quad T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{\beta}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right]^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)^n \dots \right].$$

Setzt man für β seinen Wert $1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$, so hat man auch

$$21. \quad T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 \sin^4 \frac{a}{2} \dots + \right. \\ \left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right)^2 \sin^{2n} \frac{a}{2} \dots \right].$$

Diese Reihe ist convergent, da $\sin \frac{a}{2}$ nothwendig kleiner als 1 ist.

§ 384. Ist die Amplitude sehr klein, so dass das Pendel in seiner äußersten Lage sich nur wenig von der Verticalen entfernt, so ist a eine sehr kleine Größe, so dass man $\sin^2 \frac{a}{2}$ und die höheren Potenzen vernachlässigen kann, und man hat alsdann

$$22. \quad T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Nimmt man die zweiten Potenzen mit in Rechnung und vernachlässigt erst die 4. Potenzen, so hat man, da statt des $\sin \frac{a}{2}$ der kleine Winkel $\frac{a}{2}$ genommen werden kann

$$23. \quad T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \left(1 + \frac{a^2}{16} \right).$$

Aus 22. hat man schließlich

$$24. \quad g = \frac{\pi^2 r}{T^2}.$$

§ 385. Gehen wir auf die Gleichung 16. zurück, wonach

$$dt = \mp \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{d\Theta}{\sqrt{2 \cos \Theta - 2 \cos a}}.$$

Setzt man darin die Werte

$$\cos \Theta = 1 - \frac{\Theta^2}{2} + \frac{\Theta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

Vernachlässigt man von den 4. Potenzen an, so kommt

$$25. \quad dt = \mp \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{d\Theta}{\sqrt{a^2 - \Theta^2}}.$$

Integriert man, nur das obere Zeichen nehmend, und beobachtet, dass eine Constante nicht beizusetzen ist, da $\Theta = a$ für $t = 0$ ist, so wird

$$26. \quad t = \sqrt{\frac{r}{g}} \arccos \frac{\Theta}{a},$$

und daraus

$$27. \quad \Theta = a \cos \left(t \sqrt{\frac{g}{r}} \right),$$

$$28. \quad \frac{d\Theta}{dt} = -a \sqrt{\frac{g}{r}} \sin \left(t \sqrt{\frac{g}{r}} \right).$$

§ 386. Daraus ist zu ersehen, was bereits früher hervorgehoben wurde, dass das Pendel eine unbegrenzte Reihe von gleichen und isochronen Schwingungen effectuirt, und ohne Aufhören von einem Ende seiner Trajectorie bis zum anderen Ende, und von diesem zurück zum ersten isochron oscillirt. Es erreicht den Punkt A, wo der Winkel, den es mit der Verticalen einschließt, $= a$ ist, mit der Geschwindigkeit $= 0$, so oft $t \sqrt{\frac{g}{r}}$ ein gerades Vielfaches von π ist.

Denn alsdann gibt die Gleichung 27. $\Theta = a$, und Gleichung 28. $\frac{d\Theta}{dt} = 0$. $\frac{d\Theta}{dt}$ ist die Winkelgeschwindigkeit, und $r \frac{d\Theta}{dt}$ ist $= v$.

Wenn $\Theta = 0$, so kommt das Pendel in seinen tiefsten Punkt, und dies zu einer Zeit, wo $\cos t \sqrt{\frac{g}{r}} = 0$ ist, mithin $t \sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{\pi}{2}$ oder ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist. Von B kommt das Pendel nach A', wo $\Theta = -a$ ist, mit der Geschwindigkeit $= 0$, so oft $t \sqrt{\frac{g}{r}}$ ein ungerades Vielfaches von π ist, und so wird es ohne Aufhören oscilliren.

§ 387. Die Zeit, um von einem Extrem zum anderen zu gelangen, also die Dauer einer ganzen Schwingung, ist, wie aus 26. zu ersehen, indem $\Theta = -a$ wird,

$$29. \quad T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}, \quad \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}},$$

was wir übrigens schon in 22. erhalten haben.

Aus diesen letzten Ausdrücken ist zu ersehen, dass bei sehr kleinen Amplituden die Dauer einer Schwingung von der Amplitude unabhängig ist.

Setzt man den Wert von T in 27. ein, so hat man

$$30. \quad \Theta = a \cos \pi \frac{t}{T},$$

und daraus

$$31. \quad \frac{d\Theta}{dt} = -a \frac{\pi}{T} \sin \pi \frac{t}{T}.$$

Daraus sieht man:

a) Dass, wenn man t um $2T$ vergrößert, das Pendel in dieselbe Lage mit derselben Geschwindigkeit kommt, da Θ und $\frac{d\Theta}{dt}$ im Werte und Zeichen ungeändert bleiben.

b) Dass, wenn man t um T vergrößert, Θ und $\frac{d\Theta}{dt}$ dieselben Werte mit entgegengesetzten Zeichen erhalten. Das Pendel befindet sich also in Zeitintervallen, die von einander um eine Schwingung getrennt sind, in zwei Positionen, die mit der Verticalen gleiche Winkel bilden, aber von verschiedener Seite zur Verticalen liegen, und das Pendel hat in beiden Lagen gleiche Geschwindigkeiten, aber diese sind von entgegengesetztem Zeichen.

Bewegung auf einer Cykloide im leeren Raume.

§ 388. Wir nehmen jetzt an, es bewege sich ein materieller Punkt, nur unter dem Einflusse der Schwere, und ohne Anfangsgeschwindigkeit, auf einer vertical gerichteten Cykloide ABMD, deren concave Seite nach oben gewendet ist, und befindet sich das Mobile, nachdem es den Ausgangspunkt M verlassen, zur Zeit t in M'. Der Durchmesser des Erzeugungskreises sei $= a$. Im tiefsten Punkte B errichten wir die x-Achse, vertical nach oben, und die Tangente By als y-Achse.

Für eine Cykloide hat man aber

$$s^2 = 4ax$$

$$s = 2\sqrt{ax}, \quad ds = \sqrt{4a} \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

Man hat daher für die Cykloide

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{2g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}.$$

Integriert man und beachtet, dass man für $t = 0$, $x = h$ hat, so kommt

$$35. \quad t = \sqrt{\frac{a}{2g}} \arccos \frac{2x-h}{h}.$$

§ 389. Die Zeit, die das Mobile braucht, um vom Ausgangspunkte M zum tiefsten Punkte B, wo $x = 0$ ist, zu gelangen, erhält man, wenn in 35. $x = 0$ gesetzt wird, mithin, wenn diese Zeit mit $\frac{T}{2}$ bezeichnet wird, hat man

$$36. \quad \begin{cases} \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{a}{2g}} \arccos(-1) = \sqrt{\frac{a}{2g}} \pi \\ T = \sqrt{\frac{2a}{g}} = \pi \sqrt{\frac{b}{g}}, \end{cases}$$

wenn man nämlich den Krümmungshalbmesser der Cykloide am tiefsten Punkte, welcher bekanntlich das Zweifache des Durchmessers des Erzeugungskreises ist, mit b bezeichnet. In der Cykloide ist also die Dauer der Schwingungen strenge unabhängig von der Höhe h des Ausgangspunktes M über den tiefsten Punkt B, also unabhängig von der Amplitude. Zwei verschiedene Mobiles, welche in demselben Augenblicke, ohne Anfangsgeschwindigkeit, von verschiedenen Punkten der Cykloide ausgegangen sind, erreichen den tiefsten Punkt in demselben Augenblicke. Die Dauer einer Schwingung ist $\pi \sqrt{\frac{b}{g}}$, also übereinstimmend mit der eines einfachen Pendels,

welche zum Ausdrucke hat $\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, und tritt bei der Cykloide der

Krümmungshalbmesser am tiefsten Punkte statt des Halbmessers beim Pendel. Während aber beim Pendel der Ausdruck nur bei sehr kleinen Amplituden durch Vernachlässigung sehr kleiner Größen erzielt wurde, ist hier das Resultat strenge richtig für alle Schwingungen von ganz beliebigen Amplituden.

Man könnte also ein Pendel herstellen, dessen Schwingungen, unabhängig von der Amplitude, in gleichen Zeiten effectuirt werden.

Wir errichten nämlich die Evolute der Cykloide, bestehend aus zwei Hälften KK' , KK'' , nehmen an, dass der materielle Punkt an einem Faden attachirt sei, dessen anderes Ende in K fixirt wäre. Befindet sich also das Mobile in einem seiner Lagen auf der Cykloide $K'BK''$, und wird es sich selbst überlassen, so wird das Pendel immer tangierend bleiben an KK' , KK'' und seine Extremität K' bald in M sein, und überhaupt die Cykloide $K'BK''$ beschreiben, und alle Schwingungen werden in derselben Zeit $\pi \sqrt{\frac{b}{g}}$ effectuirt werden.

Tautochrone, Brachystochrone.

§ 390. Diese der Cykloide zukommende Eigenthümlichkeit nennt man Tautochronisme, und die Cykloide heißt deshalb Tautochrone.

Wir wollen nun beweisen, dass die Cykloide die einzige tautochrone Curve im leeren Raume ist, auf welcher ein materieller Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit, von welchem Curvenpunkte immer, in derselben Zeit den tiefsten Punkt erreicht.

Nennt man t' die Zeit, die nothwendig ist, damit ein Mobile bis zum tiefsten Punkte B einer beliebigen Curve ABC gelange, so hat man den Wert von t' aus der Gleichung 34., welche für jede beliebige Curve Geltung hat, zu entnehmen, indem man das Integral zwischen $x = h$ bis $x = 0$ nimmt.

Man wird also, wenn man die Grenzen vertauscht,

$$37. \quad t' = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{\frac{ds}{dx}}{\sqrt{h-x}} dx$$

haben. Man muss nun dabei s als Function von x in der Weise bestimmen, dass der Wert von t' , und respective das Integral unabhängig sei von h .

Nehmen wir an, s sei in einer Reihe nach steigenden Potenzen von x entwickelt, so dass man hat

$$s = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \dots$$

Indem s und x in demselben Punkte B , den wir zum Coordinatenursprunge nehmen, beginnen, müssen alle Exponenten positiv und keiner darf 0 sein. Ferner muss der kleinste Exponent kleiner als 1 sein. Denn im tiefsten Punkte B ist die Tangente horizontal

und senkrecht zur x -Achse. Für $x = 0$ ist also $\frac{dx}{ds} = 0$, oder $\frac{ds}{dx} = \infty$.

Setzt man den Wert von s in 37., so kommt

$$t' = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[A \alpha \int_0^h \frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{h-x}} dx + B \beta \int_0^h \frac{x^{\beta-1}}{\sqrt{h-x}} dx + \dots \right].$$

Setzt man $x = hy$, so wird, indem die Grenzen 1 und 0 werden

$$t' = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left[A \alpha h^{\alpha-\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{y^{\alpha-1} dy}{\sqrt{1-y}} + B \beta h^{\beta-\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{y^{\beta-1} dy}{\sqrt{1-y}} \dots \right].$$

Diese Quantität muss unabhängig von h sein. Der kleinste Exponent von h , nämlich $\alpha - \frac{1}{2}$ muss demnach gleich Null sein. Denn wäre $\alpha - \frac{1}{2}$ positiv, so wäre für $h = 0$ $T = 0$, und wäre $\alpha - \frac{1}{2}$ negativ, so würde für $h = 0$ $T = \infty$ werden. Die anderen Ausdrücke müssen verschwinden.

Folglich muss sein

$$\alpha = \frac{1}{2}, B = 0, c = 0 \dots,$$

und mithin

$$s = A x^{\frac{1}{2}}, s^2 = A^2 x.$$

Dieses ist die Gleichung einer Cykloide, deren Basis horizontal, und deren Scheitel im Punkte B sich befindet, welchen das Mobile stets in derselben Zeit erreicht.

Ist der Durchmesser des erzeugenden Kreises $= a$, alsdann ist $A^2 = 4a$, $s^2 = 4ax$, und man hat

$$t' = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{A}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y-y^2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} \pi = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}.$$

Die Cykloide ist auch diejenige Curve, auf welcher sich im leeren Raume ein materieller Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit, von einem gegebenen Punkte A nach einem anderen Punkte B in der kürzesten Zeit gelangt. Die Cykloide wird daher auch Brachystochrone genannt. Wir werden im zweiten Bande brachystochrone Curven im allgemeinen besprechen und dort auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Zweiundfünfzigstes Capitel.

Das Pendel in einem widerstehenden Mittel.

§ 391. Wir hatten im vorigen Capitel

$$1. \quad \begin{cases} \frac{ds}{dt} = -r \frac{d\Theta}{dt} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = -r \frac{d^2\Theta}{dt^2} = g \sin \Theta. \end{cases}$$

In einem widerstehenden Mittel hat man demnach, wenn die Kraft des Widerstandes mit R bezeichnet wird,

$$-r \frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} = g \sin \Theta - R.$$

Nehmen wir an, diese Kraft des Widerstandes sei proportional der Geschwindigkeit, was nach Versuchen der Fall ist, wenn es sich um kleine Geschwindigkeiten handelt, so wird

$$R = g \frac{v}{k} = \frac{g}{k} \frac{ds}{dt} = -\frac{g}{k} r \frac{d\Theta}{dt},$$

indem, wie man im vorigen Capitel ersehen kann,

$$s = r (a - \Theta).$$

In der Gleichung 1. kann man ferner, da es sich um kleine Amplituden handelt, $\sin \Theta$ durch Θ ersetzen, und die Gleichung 1. wird

$$2. \quad \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{g}{k} \frac{d\Theta}{dt} + \frac{g}{r} \Theta = 0.$$

Von dieser Gleichung hat man eine particuläre Auflösung, wenn man setzt

$$\Theta = C_1 e^{\beta t},$$

wo β eine Wurzel der Gleichung

$$\beta^2 + \frac{g}{k} \beta + \frac{g}{r} = 0$$

ist.

Daraus hat man

$$\beta = -\frac{g}{2k} \pm \sqrt{\frac{g}{r}} \sqrt{\frac{gr}{4k^2} - 1},$$

und wenn man $\sqrt{1 - \frac{gr}{4k^2}} = \gamma$ setzt, so wird

$$\beta = -\frac{g}{2k} \pm \gamma \sqrt{\frac{g}{r}} \sqrt{-1}.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung 2. wird mithin sein

$$3. \quad \Theta = \left[C_1 \left(\cos t \gamma \sqrt{\frac{g}{r}} \right) + C_2 \sin \left(t \gamma \sqrt{\frac{g}{r}} \right) \right] e^{-\frac{g t}{2 k}}.$$

Die Constanten C_1, C_2 werden dadurch bestimmt, dass man hat für $t = 0$, $\Theta = a$, $\frac{d\Theta}{dt} = 0$.

Man hat also

$$C_1 = a, C_2 = \frac{a \sqrt{g r}}{2 k \gamma},$$

und dann ergibt sich

$$4. \quad \Theta = a \left[\cos \left(t \gamma \sqrt{\frac{g}{r}} \right) + \frac{\sqrt{g r}}{2 \gamma k} \sin \left(t \gamma \sqrt{\frac{g}{r}} \right) \right] e^{-\frac{g t}{2 k}},$$

$$5. \quad \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{a}{\gamma} \sqrt{\frac{g}{r}} \left[\sin \left(t \gamma \sqrt{\frac{g}{r}} \right) \right] e^{-\frac{g t}{2 k}}.$$

§ 392. Am Ende jeder Schwingung wird $\frac{d\Theta}{dt} = 0$, und daraus ergibt sich, wenn man in 5. die Dauer einer Schwingung mit T bezeichnet

$$T \gamma \sqrt{\frac{g}{r}} = \pi$$

$$T = \frac{\pi}{\gamma} \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Die Schwingungen sind also auch in diesem Falle isochron, nur ist die Zeitdauer im Verhältnisse von 1 zu γ vergrößert.

Macht man $t = n T$, setzt diesen Wert in 4. ein und benennt die n^{te} Amplitude mit α_n , so hat man

$$6. \quad \alpha_n = \alpha e^{-\frac{n \pi \sqrt{g r}}{2 \gamma k}} = \alpha \rho^n,$$

wenn man $e^{-\frac{\pi \sqrt{g r}}{2 \gamma k}} = \rho$ setzt.

Die aufeinander folgenden Amplituden bilden demnach eine fallende geometrische Progression mit dem Quotienten ρ .

§ 393. Ist die Bewegung auf einer Cykloide, so bleibt sie auch in diesem Falle, wenn nämlich R nur der einfachen Geschwindigkeit proportional ist, tautochrone.

Wir hatten nämlich die Gleichung 2. für eine gewöhnliche Curve nur dadurch erlangt, dass wir $\sin \Theta$ durch Θ ersetzen. Da-

durch haben wir für T einen Wert erhalten, der unabhängig von der Amplitude ist.

Bei der Cykloide ist die Gleichung 2. streng richtig. Führt man nämlich, statt des Winkels Θ , den complementären Winkel $T M N$ ein, so ist die Größe der bewegenden Kraft $g \frac{dx}{ds}$, da $\frac{dx}{ds}$ der Cosinus des Winkels $T M N$ ist (Fig. 89), den die Tangente mit der Verticalen MN bildet.

Man wird daher haben

$$7. \quad \frac{dv}{dt} = g \frac{dx}{ds} - \frac{g}{k} v.$$

Aus der Gleichung der Cykloide

$$s^2 = 4ax$$

hat man

$$2s ds = 4a dx,$$

$$8. \quad \frac{dx}{ds} = \frac{s}{2a}.$$

Setzt man diesen Wert in 7. ein, so ergibt sich, da $v = -\frac{ds}{dt}$ ist, $\frac{dv}{dt} = -\frac{d^2s}{dt^2}$.

$$9. \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{k} \frac{ds}{dt} + \frac{g}{2a} s = 0.$$

Diese im strengen Wege erhaltene Gleichung ist analog der nur approximativ erhaltenen Gleichung 2., und daraus wird man für T einen von s unabhängigen Wert erhalten.

§ 394. Wir wollen noch am Schlusse über das einfache Pendel hier kurz die Bestimmung von g erwähnen, da wir darüber ausführlich später sprechen werden.

Macht das Pendel in der Zeit τ n Schwingungen, so hat man

$$T = \frac{\tau}{n} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}},$$

und daraus

$$g = \frac{n^2 \pi^2 r}{\tau^2}.$$

In dieser Weise fand man, mit Hilfe des Pendels, durch Versuche die Intensitäten der Schwere g in den verschiedenen Orten der Erde.

Nimmt man Pendel von verschiedenen Längen, und nennt man die eine Länge r , die andere r' , so hat man, wenn man die Zeit-

dauer einer Schwingung bei einem Pendel mit T und beim andern mit T' bezeichnet,

$$T:T' = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} : \pi \sqrt{\frac{r'}{g}}$$

$$T:T' = \sqrt{r} : \sqrt{r'}.$$

Kennt man also die Zeit T der Schwingung eines Pendels von der Länge r , so kann man auch die Zeit finden für einen Pendel von der Länge r' .

Macht ersteres in der Zeit τ n Schwingungen, das andere n' Schwingungen, so ist

$$T = \frac{\tau}{n}, \quad T' = \frac{\tau}{n'},$$

daher

$$n'^2:n^2 = r:r', \quad r' = \frac{r n^2}{n'^2}.$$

Dadurch kann man die Länge des einfachen Pendels finden, das seine Schwingungen in einer Zeitsecunde effectuieren würde.

Dreiundfünfzigstes Capitel.

Centralkräfte. Bewegungsgleichungen.

§ 395. Wir gelangen jetzt zu Theoremen, welche die Mechanik des Weltalls, die *Mecanique céleste* betreffen, unstreitig das Höchste welches der menschliche Geist je hervorgebracht.

Eine Kraft wird *central* genannt, wenn ihre Richtung constant durch einen fixen Punkt geht. Wir nehmen zum Ursprunge das Centrum der Kräfte und werden eine Kraft mit $+$ oder $-$ bezeichnen, je nachdem sie *repulsiv* oder *attractiv* ist.

Wir haben bereits gesehen, dass die Trajectorie eine ebene Curve ist, deren Ebene durch das Centrum der Kräfte geht. Diese Ebene ist bestimmt durch die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit des Mobile. Ist die Anfangsgeschwindigkeit gerichtet nach dem Radius vector, alsdann ist die Ebene unbestimmt, aber die Bewegung ist dann geradlinig und findet statt auf dem Radius vector. Nehmen wir die Trajectorie zur Ebene der xy , und ist die Kraft P , der Radius vector r , so werden die Projectionen, vom Zeichen abgesehen, $P \frac{x}{r}$, $P \frac{y}{r}$ sein, und vermöge des Principes der Flächen haben wir

bereits bei rechtwinkligen und Polarcoordinaten die Ausdrücke erhalten

$$1. \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c.$$

$$2. \quad r^2 \frac{d\Theta}{dt} = c.$$

§ 396. Vermöge ferner des Theoremes der lebendigen Kräfte haben wir

$$3. \quad \frac{dmv^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz = Pdr,$$

wenn wir unter m die Masse des angezogenen Punktes verstehen, und, indem hier die Richtung der Kraft mit r zusammenfällt, mit dr die Projection des vom Mobile in einem Zeitelement durchlaufenen Weges auf die Kraft bezeichnen. Diese Gleichung hatten wir auch im § 361.

Die Gleichungen 2. und 3. bestimmen vollständig die Bewegung, und dienen r und Θ als Functionen, die Zeit zu finden.

Die Geschwindigkeit hat zum Ausdrücke

$$4. \quad v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\Theta^2}{dt^2}.$$

Mit Hilfe der Gleichung 2. kann man in diesem Ausdrücke $d\Theta$ oder dt eliminieren, und daraus ergibt sich

$$5. \quad v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}.$$

$$6. \quad v^2 = c^2 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\Theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 \right].$$

Die letzte Gleichung erhält man, wenn aus 2. dt durch

$$\frac{r^2}{c} d\Theta, \text{ und } \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2 \text{ durch } \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\Theta}\right)^2 \text{ ersetzt wird.}$$

§ 397. Der einfachste Fall ist der, wo die Kraft P nur von der Distanz r abhängt, alles wird auf Quadraturen zurückgeführt. Denn Pdr ist dann ein exactes totales Differential, und man hat aus 3. v^2 als Function von r .

Wird dieser Wert in 5. und 6. eingesetzt, so findet man Θ und t durch Quadraturen.

Im allgemeinen Falle setzten wir die Werte aus den Gleichungen 5. und 6. in die Gleichung 3. ein, so erhalten wir sehr wichtige Ausdrücke.

Zuerst machen wir die Substitution aus 5., indem man 3. in der Form schreibt

$$7. \quad \frac{dmv^2}{2dt} = \frac{Pdr}{dt}$$

und daraus

$$8. \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{c^2}{r^2} \right] \right\} = \frac{Pdr}{dt}.$$

Effectuiert man diese Differentiation, und dividirt durch $\frac{dr}{dt}$, so erhält man

$$9. \quad m \left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} \right) = P$$

oder

$$10. \quad m \frac{d^2r}{dt^2} = P + m \frac{c^2}{r^3}.$$

Diese Gleichung bestimmt die relative Bewegung des Mobile auf dem Radius vector, und spricht aus, dass diese Bewegung dieselbe ist, als wenn der Radius vector fix, und die das Mobile sollicitierende Kraft um die Größe $m \frac{c^2}{r^3}$ vergrößert worden wäre.

Dieselbe Relation wird r als Function von t bestimmen, wenn P als Function von r oder von r und t gegeben ist.

§ 398. Führen wir jetzt die Substitution aus der Gleichung 6. in 3. durch, die wir in der Form schreiben

$$11. \quad d \frac{mv^2}{2d\theta} = P \frac{dr}{d\theta},$$

so ergibt sich

$$12. \quad \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{mc^2}{2} \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right] \right\} = P \frac{dr}{d\theta},$$

und wird unter m die Masse des angezogenen Mobile verstanden.

Effectuiert man hier die Differentiation, ersetzt $\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}$ durch seinen

Wert $-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\Theta}$, und dividirt die ganze Gleichung durch $\frac{dr}{d\Theta}$, so hat man

$$13. \quad P = -\frac{mc^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\Theta^2} \right).$$

Diese Formel verdankt man Binet, und dient dazu r als Function von Θ , das ist die Gleichung der Trajectorie zu finden, wenn P von r oder von r und Θ abhängt.

Wenn die Kraft eine Function nur der Distanz ist.

§ 399. Betrachten wir den Fall, wo man hat

$$14. \quad P = \varphi(r),$$

alsdann kann die Gleichung 3. sofort integriert werden und gibt

$$15. \quad \frac{mv^2}{2} = \int \varphi(r) dr + h.$$

Um die Relation zwischen r und t zu erhalten, ersetzen wir v^2 durch seinen Wert aus 5., und man erhält eine Gleichung von der Form

$$16. \quad \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \psi(r), \quad dt = \frac{dr}{\pm \sqrt{\psi(r)}},$$

und t wird durch eine einfache Quadratur erhalten.

Ebenso kann man die Gleichung der Trajectorie erhalten. Denn die Gleichung 2. gibt

$$17. \quad d\Theta = \frac{c}{r^2} dt = \frac{c dr}{\pm r^2 \sqrt{\psi(r)}},$$

so dass man auch Θ durch eine Quadratur erhält.

Das Zeichen vor dem Radicale wird durch die Anfangsbedingungen bestimmt sein. Man weiß aber, dass die Projection von $v = \frac{ds}{dt}$ auf den Radius vector $\frac{dr}{dt}$ ist. Die Kenntniss der Anfangs-

geschwindigkeit wird das Zeichen von $\left(\frac{dr}{dt} \right)_0$ mit sich führen. Beim Beginne wird man daher vor dem Radicale das Zeichen dieser Quantität setzen und solange behalten, bis $\psi(r)$ Null wird, und dann wird man das Zeichen bestimmen, welches nachher beizusetzen ist. Ist $\psi(r_0)$ gleich Null, das ist, wenn die Anfangsgeschwindigkeit senkrecht zum Radius vector steht, hat man keine Schwierigkeit, das

Zeichen zu bestimmen. Betrachten wir nämlich die Bewegungsgleichung auf dem Radius vector. Die Anfangsgeschwindigkeit $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0$ dieser Bewegung ist gleich Null, und diese Bewegung geht so vor sich, als wäre der Radius vector fix, und die Kraft von der Größe $P + \frac{mc^2}{r^3}$. Ist also die Kraft positiv im Beginne, und r vom Anfange wachsend, so wird man das Zeichen $+$ nehmen, ist die Kraft negativ, r geht fallend vom Anfange, so wird man das Zeichen $-$ nehmen.

Nehmen wir an, $P_0 + \frac{mc^2}{r^3}$ sei gleich Null. In diesem Falle wird ein mit dem Radius vector entrainierter Beobachter das Mobile als unbeweglich betrachten, indem das Mobile sich auf dem Radius vector so bewegt, als wenn dieser fix, und das Mobile, ohne Anfangsgeschwindigkeit, in einer Lage belassen worden wäre, wo die scheinbare Kraft Null ist. Die Trajectorie wird dann ein Kreis vom Halbmesser r^0 , und vermöge des Flächenprincipes die Bewegung gleichförmig sein.

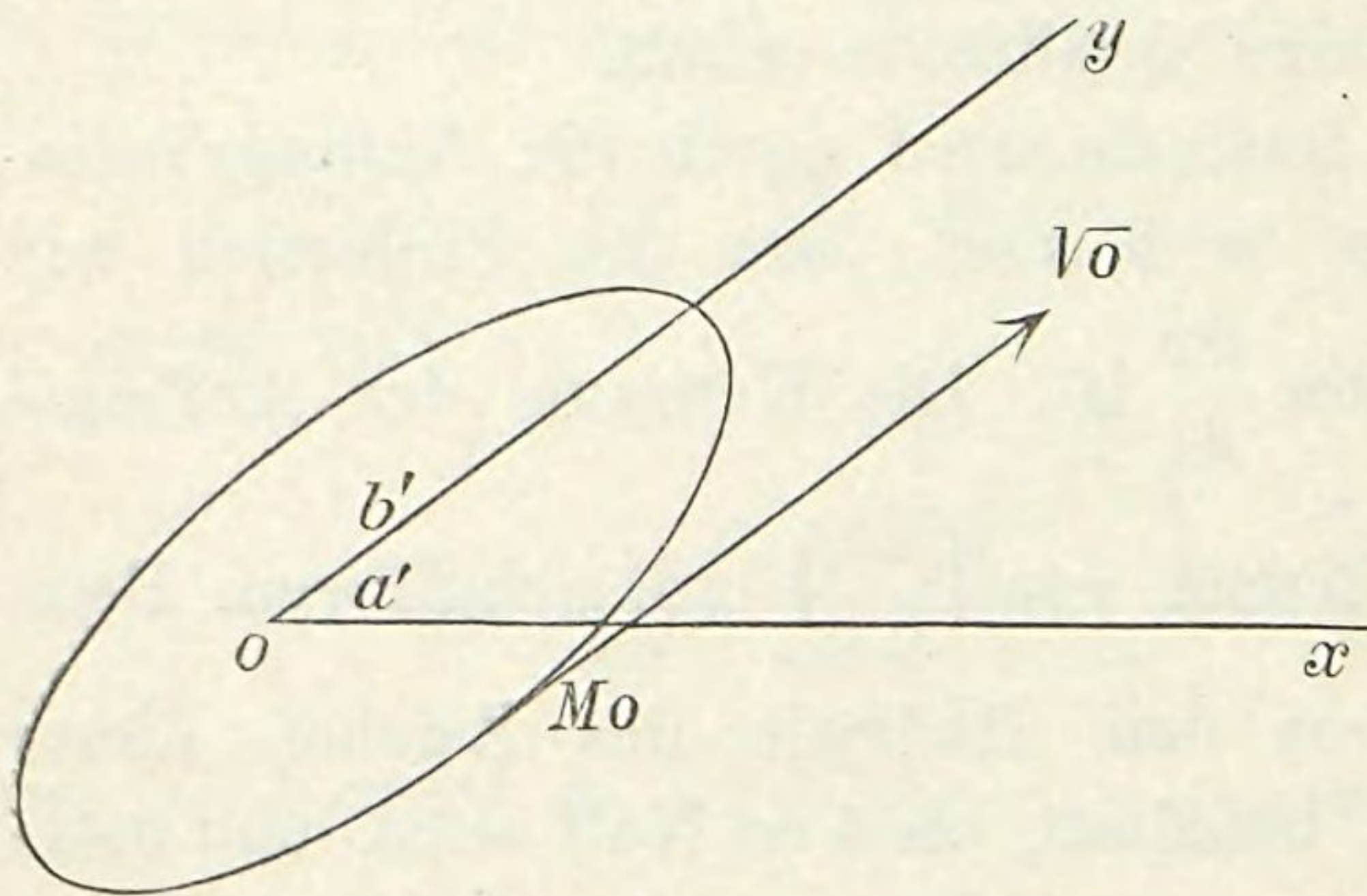
Vierundfünfzigstes Capitel.

Anwendungen.

§ 400. Die wichtigsten Anwendungen des bisherigen Theorie sind zwei Fälle:

- a) Wenn die Kraft proportional ist der Distanz vom Mobile;
- b) wenn sie verkehrt proportional ist dem Quadraten der Distanz vom Mobile.

Fig. 90.



Diesen letzten Fall werden wir bald ausführlich behandeln. Den ersten Fall besprechen wir gleich hier.

Ein Mobile von der Masse m sei durch eine in O befindliche Kraft angezogen, welche proportional ist der Distanz. Man hat also

$$1. \quad P = -mk^2 r, \quad v^2 = -k^2 r^2 + h.$$

Die Bewegungsgleichungen sind

$$2. \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = X = -m k^2 r \frac{x}{r} = -m k^2 x \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y = -m k^2 r \frac{y}{r} = -m k^2 y. \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 y = 0. \end{cases}$$

Die allgemeinen Integrale sind bekanntlich

$$4. \quad \begin{cases} x = A \cos k t + B \sin k t \\ y = A' \cos k t + B' \sin k t. \end{cases}$$

Differenziert man, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v' &= -A k \sin k t + B k \cos k t \\ \frac{dy}{dt} = v'' &= -A' k \sin k t + B' k \cos k t, \end{aligned}$$

wenn wir nämlich die Projectionen der Geschwindigkeit auf die Achsen mit v' und v'' bezeichnen.

Für $t = 0$ hat man

$$A = x_0, A' = y_0, B = \frac{v_0'}{k}, B' = \frac{v_0''}{k},$$

indem die anfänglichen Werte von x, y, v, x_0, y_0, v_0 benannt werden.

Die Gleichungen werden demnach

$$5. \quad \begin{cases} x = x_0 \cos k t + \frac{v_0'}{k} \sin k t \\ y = y_0 \cos k t + \frac{v_0''}{k} \sin k t, \end{cases}$$

wo mit v_0', v_0'' die Projectionen der Anfangsgeschwindigkeit auf die Achsen bezeichnet werden.

Nimmt man noch insbesondere für die x -Achse den anfänglichen Radius vector r_0 , und zur y -Achse eine Parallele zur anfänglichen Geschwindigkeit, indem bemerkt wird, dass obige Bewegungsgleichungen auch bei schiefwinkligen Achsen Geltung haben, so kommt

$$x_0 = r_0, v_0'' = v_0, y_0 = 0, v_0' = 0,$$

und die Gleichungen 5. werden

$$6. \quad \begin{cases} x = r_0 \cos k t \\ y = \frac{v_0}{k} \sin k t. \end{cases}$$

Die Gleichung der Trajectorie ist mithin

$$7. \quad \frac{x^2}{r_0^2} + y^2 \frac{k^2}{v_0^2} = 1.$$

Die Trajectorie ist also eine Ellipse, bezogen auf zwei conjugierte Durchmesser, deren halbe Längen sind r_0 und $\frac{v_0}{k}$, welche wir mit a' und b' bezeichnen.

Die Dauer eines Umlaufes des Mobiles auf der Ellipse ist $\frac{2\pi}{k}$, indem dann $x = r_0, y = y_0 = 0$ werden.

Da ferner jeder Augenblick als der anfängliche gewählt werden kann, so ist die Geschwindigkeit des Mobile in jeder Position aus der Gleichung

$$8. \quad \frac{v_0}{k} = b', \quad v_0 = b' k$$

zu entnehmen, wo b' die Länge des halben, der Geschwindigkeit parallelen, dem Radius vector conjugierten Durchmessers bedeutet.

Die Geschwindigkeit des Mobile ist also in jedem Punkte der Trajectorie gleich $k b'$.

Umgekehrtes Problem, Bestimmung der Kraft, wenn die Trajectorie gegeben ist.

§ 401. Ein Mobile beschreibt eine ebene Trajectorie, nach dem Gesetze der Flächenräume, um einen fixen Punkt, wir wollen daraus die Kraft finden, die diese Bewegung erzeugt.

Vor allem ist die Kraft eine centrale. Denn nehmen wir den fixen Punkt zum Ursprunge, so gibt das Gesetz der Flächenräume

$$9. \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c,$$

wenn wir nämlich die Ebene der Trajectorie zur Ebene der xy nehmen.

Differenziert man, so kommt

$$10. \quad x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0.$$

$$11. \quad \frac{d^2 y}{dt^2} : \frac{d^2 x}{dt^2} = y : x.$$

Diese Gleichung beweist, dass die Acceleration, und daher auch die Kraft, constant durch den Ursprung geht.

Sei also P der algebraische Wert dieser Kraft, so hat man, vermöge Gleichung 13. des vorigen Capitels

$$12. \quad P = - \frac{m c^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \Theta^2} \right).$$

Kraft Voraussetzung kennt man die Gleichung der Trajectorie $F(r, \Theta)$, woraus also der Wert von $\frac{1}{r}$ als Function von Θ bestimmt erscheint, so dass man hat

$$13. \quad \frac{1}{r} = \varphi(\Theta).$$

Man wird daher haben

$$14. \quad P = - \frac{m c^2}{r^2} [\varphi(\Theta) + \varphi''(\Theta)].$$

Ist für den Ausdruck von P keine Form im vorhinein vorgeschrieben, so bietet das Problem eine Unbestimmtheit dar. Denn indem r und Θ durch eine gegebene Gleichung verbunden sind, könnte man den Ausdruck für P auf unzählige Arten transformieren. Man könnte, was im allgemeinen gesucht wird, P als Function nur von r ausdrücken, was man dadurch erlangt, dass Θ aus der vorhergehenden Gleichung und der der Trajectorie eliminiert wird.

§ 402. Nehmen wir den Fall eines nach dem Gesetze der Flächenräume in Beziehung auf den Brennpunkt durchlaufenen Kegelschnittes, welcher seine concave Seite diesem Punkte zuwendet.

Wir nehmen den Brennpunkt zum Ursprunge. Dann ist Gleichung des Kegelschnittes

$$15. \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \Theta},$$

wo p den Parameter und e die Excentricität bedeutet.

Daraus leitet man her

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \Theta^2} = \frac{1}{p}.$$

Folglich in Anwendung der Gleichung 13. des vorigen Capitels

$$16. \quad P = - \frac{m c^2}{p r^2}.$$

Die Kraft ist also eine Attractivkraft, welche nach dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Distanz vom Brennpunkte variiert.

Fünfundfünfzigstes Capitel.

Elliptische Bewegung der Planeten. Die Kepler'schen Gesetze.

§ 403. Wenn wir hier von der Bewegung der Planeten sprechen, so verstehen wir immer die Bewegung des Schwerpunktes der Planeten.

Denn nach einem Theoreme, welches wir später beweisen werden, ist die Bewegung dieses Schwerpunktes dieselbe, als wenn die ganze Masse des Planeten in diesem Schwerpunkte condensiert, und alle die Planeten sollicitierenden Kräfte parallel zu sich selbst nach diesem Schwerpunkte transportiert worden wären.

Die Gesetze der Bewegung der Planeten waren von Kepler aus Beobachtungen und Berechnungen des Tycho Brahe hergeleitet, und sind diese folgende drei Gesetze:

1. Die Planeten beschreiben um die Sonne ebene Curven nach dem Gesetze der Flächenräume.

2. Die Curven sind Ellipsen, welche die Sonne zum Brennpunkte haben.

3. Die Quadrate der Zeiten der sideralen Umläufe sind proportional den Kuben der großen Achsen ihrer Bahnen.

Aus diesen Gesetzen hat Newton das Gesetz der Kraft abgeleitet, welche die Bewegung erzeugt.

§ 404. Die Deduction ist folgende:

Da die Trajectorie eben ist, und dabei das Gesetz der Flächen statt hat in Bezug auf das Centrum der Sonne, so ist die Kraft eine centrale und geht durch diesen Punkt, das ist, durch das Centrum der Sonne.

Da ferner die Bahn eine Ellipse ist, welche die Sonne zum Brennpunkte hat, so wirkt die Kraft nothwendig umgekehrt proportional dem Quadrate der Distanz von der Sonne.

Wir haben bereits im § 401 gefunden, dass diese Kraft zum Ausdrücke hat

$$1. \quad P = - \frac{m c^2}{p r^2},$$

wo c die Constante der Flächen, p den Parameter des Kegelschnittes, und m die Masse des angezogenen Planeten bedeutet.

Setzt man $\frac{c^2}{p} = \mu$, so hat man

$$2. \quad P = - \frac{m \mu}{r^2}.$$

Das dritte Kepler'sche Gesetz zeigt, dass μ von dem betrachteten Planeten unabhängig ist.

In der That ist die Constante der Flächen c gleich dem Zweifachen des Verhältnisses zwischen der Fläche, welche der Radius vector beschrieben hat, und dem zu ihrer Beschreibung erforderlichen Zeittheile. Bedeutet T die Dauer eines Umlaufes, so beschreibt der Radius vector in der Zeit T die Fläche $\pi a b$, folglich ist

$$3. \quad c = \frac{2 \pi a b}{T}.$$

Ferner hat man für die Größe des Parameters den Ausdruck

$$4. \quad p = \frac{b^2}{a},$$

daher ist

$$5. \quad \mu = \frac{c^2}{p} = \frac{4 \pi^2 a^3}{T^2}.$$

Nach dem letzten Kepler'schen Gesetze ist die Größe $\frac{a^3}{T^2}$ für alle Planeten dieselbe, und daraus folgt, dass die Kraft

$$P = - \frac{m \mu}{r^2}$$

für welchen Planeten immer dieselbe bleibt.

Als Schluss dieser Betrachtungen haben wir demnach:

Jeder Planet wird gegen das Centrum der Sonne durch eine Kraft getrieben, welche, unabhängig von der etwaigen besonderen Natur des Planeten, proportional seiner Masse und umgekehrt proportional ist dem Quadrate seiner Entfernung vom Centrum der Sonne.

Directes Problem.

§ 405. Newton legte sich, nachdem er dieses Resultat gefunden, folgendes Problem vor:

Die Bewegung eines materiellen Punktes zu finden, welcher gegen ein fixes Centrum nach dem Verhältnisse der Masse und im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung angezogen wird.

Die centrale Kraft ist

$$P = - \frac{m \mu}{r^2}.$$

Die Gleichung der lebendigen Kräfte gibt, wie aus 3. des § 396 zu ersehen,

$$6. \quad \frac{d v^2}{2} = - \frac{\mu}{r^2} d r,$$

$$7. \quad v^2 = \frac{2 \mu}{r} + h.$$

Nach der Theorie der centralen Kräfte hat man überdies, vermöge Formel 6. des § 396,

$$v^2 = c^2 \left[\left(\frac{d \frac{1}{r}}{d \Theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right].$$

Ersetzt man darin v^2 durch seinen Wert aus 7., so kommt

$$8. \quad \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d \Theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{2 \mu}{r} + h \right).$$

Dieses ist die Differentialgleichung der Trajectorie, welche auch in nachstehender Form geschrieben werden kann:

$$9. \quad \left(\frac{d \frac{1}{r}}{d \Theta} \right)^2 = - \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{c^2} \right)^2 + \frac{\mu^2}{c^4} + \frac{h}{c^2}.$$

Zum Zwecke der Integrierung setzen wir

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{\mu}{c^2} \right) = \rho \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{h}{c^2}},$$

so wird die Gleichung in ρ

$$10. \quad \left(\frac{d \rho}{d \Theta} \right)^2 = 1 - \rho^2, \quad d \Theta = \pm \frac{d \rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Integriert man, so ist

$$11. \quad \Theta - a = \mp \arccos \rho, \quad \rho = \cos (\Theta - a),$$

wo a eine Constante ist.

Die Gleichung der Trajectorie wird demnach, wenn man für ρ seinen Wert wieder einsetzt,

$$12. \quad \frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{h}{c^2}} \cos (\Theta - a).$$

Das Radical kann man immer positiv nehmen. Denn wäre es negativ, so kann man der willkürlichen Constante a die Größe π zu-
setzen, und das Radical wird positiv.

§ 406. Die Gleichung ist die eines Kegelschnittes. Man weiß nämlich, dass die allgemeine Polargleichung der Kegelschnitte ist, wenn man den Brennpunkt zum Pole nimmt,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos (\Theta - a)}$$

oder

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos (\Theta - a),$$

wo p der Parameter und e die Excentricität ist.

Identificiert man die beiden Gleichungen, so hat man

$$\frac{1}{p} = \frac{\mu}{c^2}, \quad p = \frac{c^2}{\mu},$$

ein Resultat, welches wir bereits sub 5. erhalten.

Dann hat man

$$e = p \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{h}{c^2}},$$

und wenn man für p den erhaltenen Wert $\frac{c^2}{\mu}$ darin einsetzt, so kommt

$$13. \quad e = \sqrt{1 + \frac{h c^2}{\mu^2}}.$$

Dieser Ausdruck gibt die Art des Kegelschnittes, welche, wie wir sehen werden, einzig und allein vom Zeichen der Constante der lebendigen Kräfte h abhängt.

a) Ist h negativ, dann ist e kleiner als 1, und die Trajectorie ist eine Ellipse.

b) Ist $h = 0$, dann ist $e = 1$, und die Trajectorie ist eine Parabel.

c) Ist endlich h positiv, also e größer als 1, alsdann ist die Trajectorie eine Hyperbel.

Wie aber aus 7. zu ersehen, ist der Wert der Constante der lebendigen Kräfte

$$h = v_0^2 - \frac{2 \mu}{r_0}.$$

h hängt also nur von dem numerischen Werte der anfänglichen Geschwindigkeit, nicht aber von der Richtung derselben ab.

Ergeben also die anfänglichen Bedingungen für die Trajectorie eine Ellipse, wird man auch dann eine Ellipse haben, wenn das Mobile vom selben Punkte mit derselben anfänglichen Geschwindigkeit nach einer ganz anderen Richtung lanciert wurde.

§ 407. Nehmen wir den Fall einer Ellipse an, indem man $h < 0$ voraussetzt, und drücken wir die Elemente der Bahn mittelst der anfänglichen Werte der Variablen aus.

Wir hatten

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{h c^2}{\mu^2}},$$

daraus

$$h = \frac{\mu^2}{c^2} (e^2 - 1) = \frac{\mu}{p} (e^2 - 1).$$

Führt man darin die Achsen der Ellipse ein, so hat man

$$14. \quad h = \frac{\mu}{\frac{b^2}{a}} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} - 1 \right) = -\frac{\mu}{a}.$$

Diese letzte Relation gibt die Größe der großen Achse der Ellipse, welche nur von der Constante der lebendigen Kräfte abhängt.

Die kleine Achse hat man dann aus

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{\mu},$$

daher

$$15. \quad b^2 = \frac{c^2}{\mu} a, \quad b = c \sqrt{\frac{a}{\mu}}.$$

In dieser Weise kann man die Ellipse construieren, wenn man $c = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$ kennt, und wird bemerkt, dass c durch die anfänglichen Bedingungen der Bewegung bestimmt sein wird. Wie man sieht, ist c der Wert, den $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$ im Beginn der Bewegung hat, ist also das Moment der anfänglichen Geschwindigkeit in Beziehung auf die z -Achse.

Sechsfundfünfzigstes Capitel.

Bewegung der Kometen und Satelliten.

Die Kometen.

§ 408. Kepler hat seine Untersuchungen auf die Kometen nicht ausgedehnt, da er sie für vorübergehende Meteore gehalten. Erst

Newton wendete seine Forschungen den Kometen zu. Indem er gefunden, dass ein Punkt, welcher von der Sonne im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung angezogen wird, nicht bloß eine Ellipse, sondern auch eine Parabel oder eine Hyperbel beschreiben kann, hat er den Gedanken gefasst, dass die Kometen eben so Bahnen um die Sonne wie die Planeten beschreiben können, nur anderer Art, als Parabeln, gestreckte Ellipsen mit großen Excentricitäten, oder selbst einen Zweig der Hyperbel, und eben deshalb seltener erscheinen. Da bei sehr gestreckten Ellipsen der Theil, welcher dem Brennpunkte am nächsten liegt, als eine Parabel mit demselben Brennpunkte und demselben Scheitel einer unendlich großen Achse angesehen werden kann, kann man annehmen, dass der Komet in der Nähe der Sonne nach dem Flächengesetze eine Parabel beschreibe, wo die Sonne im Brennpunkte liegt. Halley, Zeitgenosse Newtons, hat diesen Gedanken Newtons in zahlreichen Fällen verificiert, und die späteren Beobachtungen haben dieses bestätigt.

§ 409. Stellen wir uns vor einen Kometen von der Masse m , der um die Sonne als Brennpunkt nach dem Flächengesetze eine Parabel beschreibt. Dieser Komet wird gegen die Sonne durch eine Kraft sollicitiert, welche, nach dem früheren, den Ausdruck hat

$$P = -\frac{mc^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2},$$

wo unter p der Parameter der Parabel verstanden wird.

Für einen zweiten Kometen von der Masse m' wird man für die Kraft den Ausdruck finden

$$P = -\frac{m'c'^2}{p'} \frac{1}{r'^2}.$$

Die Beobachtungen zeigen, dass die Verhältnisse $\frac{c^2}{p}$ und $\frac{c'^2}{p'}$ einander gleich sind, und den gemeinsamen Wert von $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, welcher sich auf irgend einen Planeten bezieht, haben.

Der Ausdruck der centralen Kraft, welche den Kometen bewegt, ist demnach derselbe, wie für die Planeten

$$P = -\frac{m\mu}{r^2},$$

so dass μ denselben Wert hat für alle Planeten und alle Kometen.

Die Satelliten.

§ 410. Man hat sich durch Beobachtungen überzeugt, dass auch die Satelliten den Kepler'schen Gesetzen unterworfen sind, und zieht daraus den Schluss, dass jeder Planet seine Satelliten proportional ihren Massen und verkehrt proportional dem Quadrate ihrer Distanzen vom Centrum der Planeten anzieht. Dieselbe Anziehung übt der Planet auf Körper aus, die auf seiner Oberfläche sich befinden, wie wir dieses bei der Erde gesehen, wo diese Anziehung die Kraft der Schwere ist. So ist es die Attraction der Erde auf die Körper, welche sich auf ihrer Oberfläche befinden, die diese Körper vertical fallen lässt, wenn sie ohne Geschwindigkeit sich selbst überlassen werden, und wenn sie schief lanciert werden, dieselben eine Parabel beschreiben lässt, welche nichts Anderes als der Theil einer sehr gestreckten Ellipse ist, deren Brennpunkt sich im Mittelpunkte der Erde befindet. Daraus geht auch hervor, dass die Attraction der Erde auf einen äußeren Punkt dieselbe ist, als wenn die ganze Masse der Erde in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre, was wir auch bei der Theorie der Attraction bewiesen haben.

Die Kraft also, welche den Mond in seiner Bahn erhält, ist dieselbe Kraft der Schwere.

Newton hat dieses in folgender Weise bewiesen.

§ 411. Sei a_1 die halbe große Achse der Mondbahn, T_1 die Zeitdauer des sideralen Umlaufes des Mondes um die Erde, m_1 die Masse des Mondes. Die Attraction der Erde auf den Mond wird den Ausdruck haben, wenn wir die Kraft der Attraction mit P bezeichnen, wie wir aus früherem ansehen,

$$P = - \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2} \cdot \frac{m_1}{r^2}.$$

Die Excentricität der Mondbahn ist sehr klein, und man kann diese als Kreis betrachten, dessen Mittelpunkt mit dem der Erde zusammenfällt. Alsdann wird, da $r = a_1$ ist,

$$1. \quad P = - \frac{4\pi^2 a_1 m_1}{T_1^2}.$$

Bezeichnen wir andererseits den Halbmesser der Erde mit ρ , und denken wir uns die Mondmasse auf der Oberfläche der Erde, also in der Entfernung ρ von ihrem Centrum placiert, so wäre diese, wenn man die Centrifugalkraft, worüber wir weiter unten sprechen werden, die gegenüber der Schwere sehr gering ist, vernachlässigt,

von einer Kraft attrahiert, die dem Gewicht gleichkommt, und die wir mit P' bezeichnen, so dass man hätte

$$2. \quad P' = -m_1 g.$$

Diese beiden Kräfte 1. und 2. müssen sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen vom Mittelpunkte der Erde verhalten, und man hat, da, wie man berechnet hat, die halbe große Achse der Mondbahn a_1 gleich 60ρ ist,

$$3. \quad \frac{P'}{P} = \frac{a_1^2}{\rho^2} = 60^2,$$

daher

$$4. \quad g = \frac{P'}{m_1} = \frac{P 60^2}{m_1} = \frac{4 \pi^2 m_1 60 \rho \cdot 60^2}{T_1^2 m_1} = \frac{4 \pi^2 \cdot 60^3 \rho}{T_1^2}.$$

$2 \pi \rho$, das ist der Umfang der Erde, ist 40,000.000 Meter. T_1 , in Secunden berechnet, = 39.343.60.

Effectuiert man die Rechnung, so findet man

$$g = 9^m . 7.$$

Dieser Wert differiert wenig von der mittleren Acceleration der Schwere auf der Erde, welche

$$g = 9^m . 8$$

ist. Die Differenz stammt daher, weil die Rechnung nicht rigoros durchgeführt wurde, und würde bei rigoroser Rechnung diese kleine Differenz verschwinden.

Siebenundfünfzigstes Capitel.

Universelle Attraction.

§ 412. Wir sehen also, dass die Sonne die Planeten und Kometen, und die Planeten die Satelliten anziehen, und dass die Anziehung ganz mit der Kraft der Schwere übereinstimmt, welche, wie wir gesehen, auf alle einzelne Partikel der Materie wirkt. Die Erde zieht materielle Punkte auf ihrer Oberfläche, wie sie den Mond anzieht, und die Intensität dieser Anziehung auf einen Massepunkt m , in welcher Distanz immer, ist $\frac{m \mu'}{r^2}$, wenn die der Erde zukommende Kraft der Attraction mit μ' bezeichnet wird. Sie erstreckt sich auch auf die Sonne, und wird die Masse der Sonne mit m' bezeichnet, so zieht die Erde diese mit einer Intensität an, welche zum Ausdrucke hat

$$\frac{m' \mu'}{r^2}.$$

Andererseits zieht die Sonne die Erde an, und ist, wenn man die Masse der Erde mit m , und die der Sonne zukommende Attraction mit μ bezeichnet, die Intensität dieser Kraft $\frac{m\mu}{r^2}$.

Nach dem Principe der Gleichheit der Action und Reaction aber müssen diese beiden Attractionen gleich sein, und ergibt sich daraus

$$1. \quad \begin{cases} \frac{m'\mu'}{r^2} = \frac{m\mu}{r^2} \\ m'\mu' = m\mu, \end{cases}$$

daher

$$2. \quad \frac{\mu}{m'} = \frac{\mu'}{m} = f.$$

Substituiert man die Werte von μ und μ' aus 2. und 1., so erhält man für die Intensitäten der beiden wechselseitigen Attractionen den gemeinsamen Ausdruck

$$3. \quad \frac{fmm'}{r^2}.$$

§ 413. Newton hat also das Princip der universellen Attraction dahin ausgesprochen: Zwei materielle Punkte von den Massen m und m' , und von einander in der Distanz r placiert, ziehen sich wechselseitig mit einer Intensität $f \frac{mm'}{r^2}$ an.

Der Coefficient f ist, wie wir schon bei der Theorie der Attraction erwähnt, die Attraction der Einheit der Masse auf die Einheit der Masse in der Einheit der Distanz.

Nimmt man als fundamentale Einheiten das Meter, die Grammkraft (dyne) und die Secunde mittlerer Zeit, so ist nach Versuchen von Cavendish, Cornu und Baille

$$f = 0,014676 \text{ g}^2.$$

In der neuesten Zeit hat man dieses Gesetz der Anziehung auch auf die Doppelsterne ausgedehnt.

Achtundfünfzigstes Capitel.

Elementare Kenntnisse aus der Mechanik des Himmels.

§ 414. Wir wollen noch, ausgehend von dem erörterten Principe, die Bewegungen der Körper des Himmels, ganz besonders unseres Sonnensystemes, Sonne, Planeten, Satelliten und Kometen

näher betrachten. Von den Wirkungen der Sterne auf unser Sonnensystem können wir absehen, weil die Entfernungen der Sterne, im Verhältnisse der Dimensionen des Sonnensystems, von solcher unermesslichen Größe sind, dass ihre Wirkungen auf unser Sonnensystem verschwinden. Wir können uns daher auf die wechselseitigen Wirkungen der Körper unseres Sonnensystems beschränken.

Die Mechanik des Himmels befasst sich vorzugsweise mit zwei Problemen:

1. Die Bewegungen der Schwerpunkte der Körper des Himmels,
2. die Bewegungen dieser Körper um ihre Schwerpunkte zu finden.

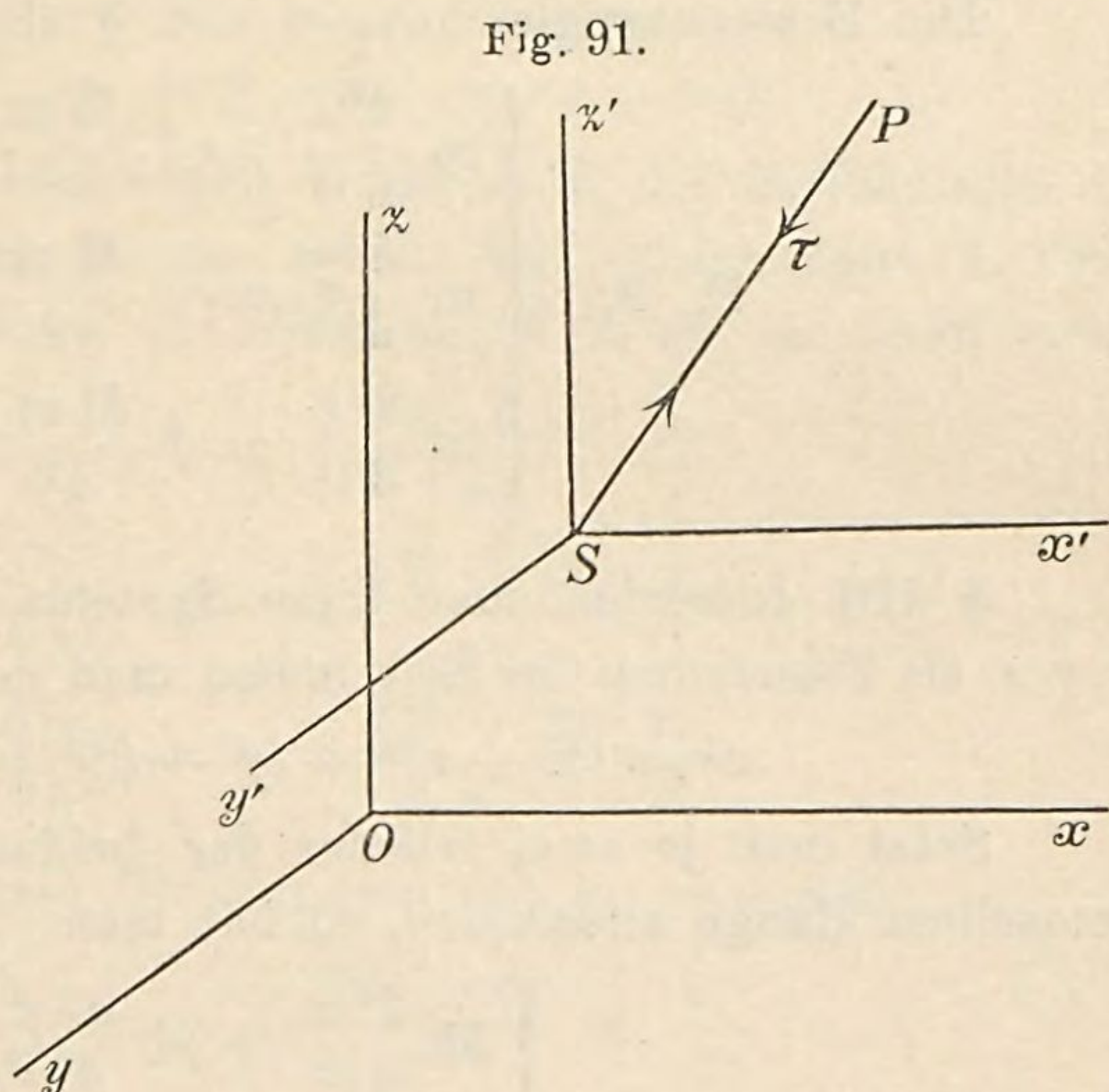
Wir beschränken uns hier, manche Andeutungen aus dem ersten Problem zu geben.

Problem der zwei Körper.

§ 415. Betrachten wir die Sonne und einen bestimmten Planeten, beide reducirt auf ihre Schwerpunkte.

Die Massen der anderen Körper des Sonnensystems, welche im Vergleiche zur Masse der Sonne sehr klein sind, können wir bei einer ersten Approximation außeracht lassen. Wir gehen also dabei von der Annahme aus, dass das Sonnensystem nur aus der Sonne und dem betrachteten Planeten besteht. Dann haben wir ein einfaches Problem, das der zwei Körper, deren Integrale man finden kann. Hat man diese gefunden, dann sucht die Mechanik des Himmels, in welcher Weise die Rechnung modificirt werden muss, um die Wirkungen der anderen Körper mit in Rechnung zu bringen.

Seien M und m die Massen der Sonne S und des Planeten P , α, β, γ die Coordinaten der Sonne S , auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogen, x, y, z die Coordinaten des Planeten P , auf dasselbe Coordinatensystem bezogen.



Die Kraft der Attraction dieser beiden Körper, die wir als materielle Punkte betrachten, hat den absoluten Wert von

$$f \frac{M m}{r^2}.$$

Die Projectionen dieser Kraft, von P auf S wirkend, auf die Achsen sind

$$f \frac{M m}{r^2} \frac{x - \alpha}{r}, f \frac{M m}{r^2} \frac{y - \beta}{r}, f \frac{M m}{r^2} \frac{z - \gamma}{r}.$$

Die Projectionen dieser Kraft von S auf P haben dieselben Ausdrücke, nur mit entgegengesetztem Zeichen,

$$f \frac{M m}{r^2} \frac{\alpha - x}{r}, f \frac{M m}{r^2} \frac{\beta - y}{r}, f \frac{M m}{r^2} \frac{\gamma - z}{r}.$$

Die Bewegungsgleichungen für S werden mithin sein

$$S. \quad 1. \quad \begin{cases} M \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = f \frac{M m}{r^2} \cdot \frac{x - \alpha}{r} \\ M \frac{d^2 \beta}{dt^2} = f \frac{M m}{r^2} \cdot \frac{y - \beta}{r} \\ M \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = f \frac{M m}{r^2} \cdot \frac{z - \gamma}{r}. \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichungen von P sind

$$P. \quad 2. \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = f \frac{M m}{r^2} \cdot \frac{\alpha - x}{r} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = f \frac{M m}{r^2} \cdot \frac{\beta - y}{r} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = f \frac{M m}{r^2} \cdot \frac{\gamma - z}{r}. \end{cases}$$

§ 416. Integriert man diese Systeme, so ergeben sich $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ als Functionen der Zeit, indem man noch die Relation hinzufügt

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2.$$

Setzt man je zwei Glieder der beiden Systeme S und P von demselben Range zusammen, so hat man

$$3. \quad \begin{cases} M \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \\ M \frac{d^2 \beta}{dt^2} + m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \\ M \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + m \frac{d^2 z}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Die Coordinaten des Schwerpunktes beider Massen, die wir mit ξ , η , ζ bezeichnen, sind, wie man aus der Statik weiß,

$$4. \quad \begin{cases} \xi = \frac{M\alpha + m x}{M + m} \\ \eta = \frac{M\beta + m y}{M + m} \\ \zeta = \frac{M\gamma + m z}{M + m}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 3. werden demnach

$$5. \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = 0.$$

Diese letzten drei Gleichungen zeigen also, dass der Schwerpunkt des Systems von einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung belebt ist, was eben nur der besondere Fall des allgemeinen Theoremes über die Bewegung des Schwerpunktes ist.

§ 417. Wir wollen nun die relative Bewegung des Punktes P in Beziehung auf S suchen.

Zu diesem Ende transportieren wir die Achsen parallel zu sich selbst nach S, und nennen die neuen Coordinaten von P in Bezug auf dieses System x , y , z

$$x_1 = x - \alpha, \quad y_1 = y - \beta, \quad z_1 = z - \gamma.$$

Dividirt man die Gleichungen 1. durch M, die Gleichungen 2. durch m, und zieht dann je ein Glied der Gleichungen 1. von einem Gliede gleichen Ranges der Gleichungen 2. ab, so erhält man

$$P. \quad 6. \quad \begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -f \frac{(M + m)}{r^2} \frac{x_1}{r} \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -f \frac{(M + m)}{r^2} \frac{y_1}{r} \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -f \frac{(M + m)}{r^2} \frac{z_1}{r}. \end{cases}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit m, so kommt

$$7. \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -f \frac{(M + m)}{r^2} m \frac{x_1}{r} \\ m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -f \frac{(M + m)}{r^2} m \frac{y_1}{r} \\ m \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -f \frac{(M + m)}{r^2} m \frac{z_1}{r}. \end{cases}$$

§ 418. Die Form dieser Gleichungen zeigt, dass der Punkt x_1, y_1, z_1 (P) sich in Beziehung auf S so bewegt, als wenn S fix wäre, statt der Masse M die Masse $M + m$ besessen, und mit dieser Masse $M + m$ den Punkt P nach dem Newton'schen Gesetze angezogen hätte. Denn diese Gleichungen sind die der Bewegung eines Punktes von der Masse m , welcher gegen einen fixen Punkt von einer Kraft $f \frac{(M + m)}{r^2} m$ angezogen wird, ein Ausdruck von der Form $\frac{\mu m}{r^2}$, wo $\mu = f(M + m)$ ist.

Das erste Kepler'sche Gesetz findet daher auf diese Bewegung Anwendung, die relative Trajectorie ist ein Kegelschnitt, worin S der Brennpunkt ist, und den P nach dem Flächengesetze beschrieben. Da es sich ferner um einen Planeten handelt, so ist dieser Kegelschnitt eine Ellipse. Berechnet man die Elemente dieser Bahn, so findet man wie gezeigt, wenn mit a die halbe große Achse und mit T die Dauer des Umlaufes bezeichnet wird, dass diese beiden Elemente durch die Relation verbunden sind

$$8. \quad \mu = f(M + m) = \frac{4 \pi^2 a^3}{T^2}.$$

Daraus sieht man, dass das Verhältniß $\frac{a^3}{T^2}$ nicht unabhängig von m ist, so dass das dritte Kepler'sche Gesetz nicht genau richtig ist, da die Massen der Planeten von einander verschieden sind. Das letzte Kepler'sche Gesetz ist nur approximativ richtig, $f m$ bildet aber nur einen sehr kleinen Theil der Größe $f(M + m)$.

Da die Größe f bekannt ist, so hat man aus 8. einen genäherten Wert von $M + m$.

Für einen anderen Planeten von der Masse m' , der halben großen Achse a_1 und der Umlaufszeit T_1 wird man einen ähnlichen Ausdruck haben

$$f(M + m_1) = \frac{4 \pi^2 a_1^3}{T_1^2},$$

daher

$$\frac{a^3}{T^2} : \frac{a_1^3}{T_1^2} = 1 + \frac{m}{M} : 1 + \frac{m_1}{M}.$$

$\frac{m}{M}$ und $\frac{m_1}{M}$ sind sehr kleine Größen, so dass man die Größen $\frac{a^3}{T^2}$ und $\frac{a_1^3}{T_1^2}$ als gleich, und dieses Verhältniß für alle Planeten als constant annehmen kann.

Neunundfünfzigstes Capitel.

Masse der Planeten.

§ 419. Die Gleichung

$$f(M + m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

zu der wir gelangt sind, verhilft uns zur Kenntniss der Masse eines Planeten, welcher von einem Satelliten begleitet ist.

Seien m und m' die Massen des Planeten P und des Satelliten Σ , und seien die Actionen der Sonne und der anderen Körper des Sonnensystems auf den

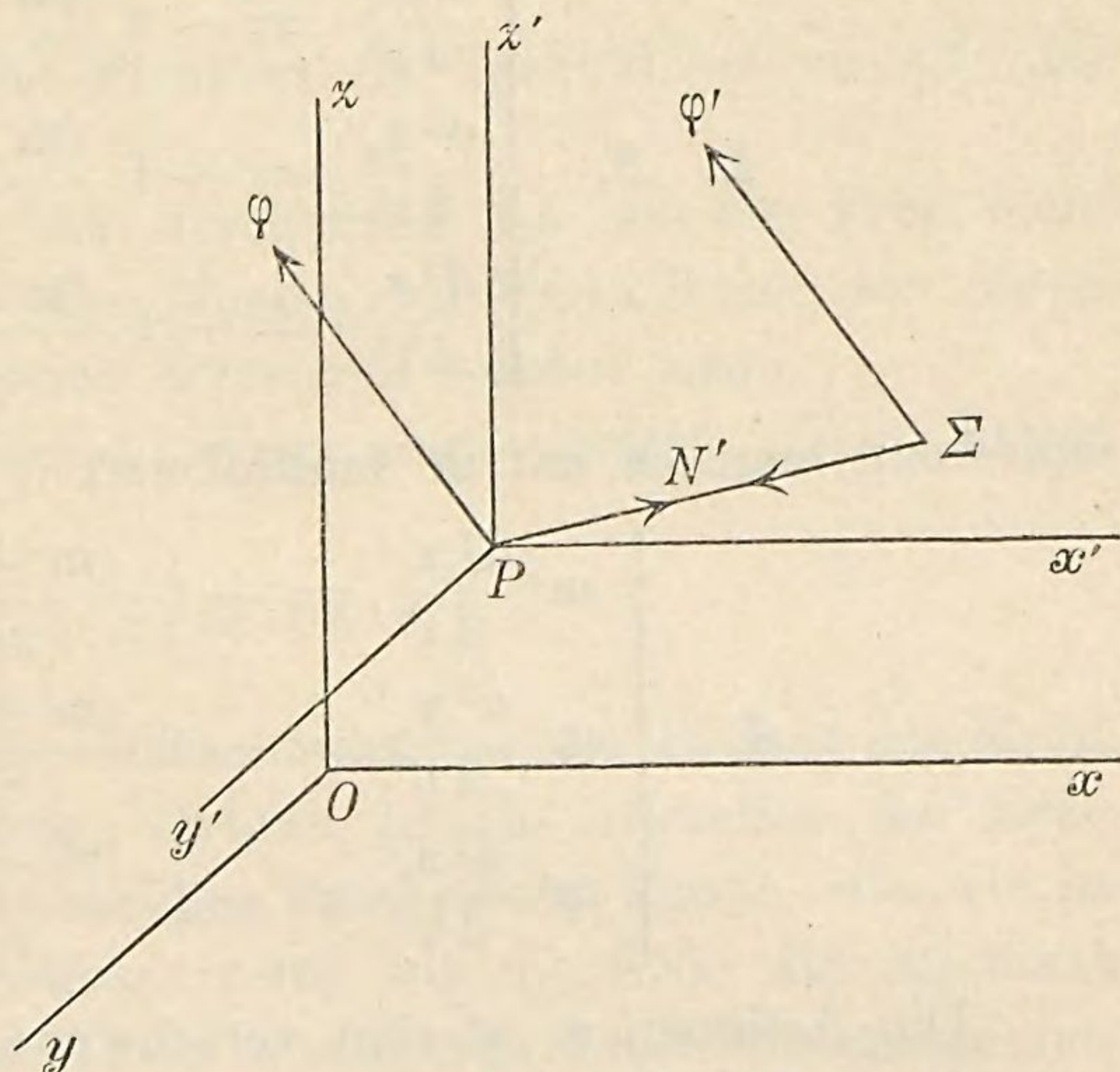
betrachteten Planeten und seinen Satelliten φ, φ' . Beide Actionen sind proportional den Massen und fast parallel, da die Distanz des Planeten von seinen Satelliten, die wir mit r_1 bezeichnen, sehr gering ist im Vergleiche zu den Distanzen des Planeten von der Sonne und den anderen Körpern. Bezeichnen wir ferner die Projectionen der Attraction dieser

anderen Körper auf die Einheit der Masse des Planeten mit X, Y, Z , die Coordinaten des Planeten P mit x, y, z , die Coordinaten des Satelliten Σ mit x', y', z' .

Die Bewegungsgleichungen des Planeten und des Satelliten werden sein

$$P. \quad 1. \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} = m X + f \frac{m m'}{r_1^2} \frac{x' - x}{r_1} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = m Y + f \frac{m m'}{r_1^2} \frac{y' - y}{r_1} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = m Z + f \frac{m m'}{r_1^2} \frac{z' - z}{r_1}, \end{array} \right.$$

Fig. 92.



$$\Sigma. \quad 2. \quad \begin{cases} m' \frac{d^2 x'}{dt^2} = m' X - f \frac{m m'}{r_1^2} \frac{x' - x}{r_1} \\ m' \frac{d^2 y'}{dt^2} = m' Y - f \frac{m m'}{r_1^2} \frac{y' - y}{r_1} \\ m' \frac{d^2 z'}{dt^2} = m' Z - f \frac{m m'}{r_1^2} \frac{z' - z}{r_1}. \end{cases}$$

Transportieren wir jetzt die Achsen parallel zu sich selbst nach P, und seine neuen Coordinaten von Σ x_1', y_1', z_1'

$$x_1' = x' - x, y_1' = y' - y, z_1' = z' - z.$$

Dividiert man die Gleichungen 1. durch m , die Gleichungen 2. durch m' , und zieht die Gleichungen 1. von 2. ab, so hat man die Gleichungen der relativen Bewegung von Σ

$$\Sigma. \quad 3. \quad \begin{cases} \frac{d^2 x_1'}{dt^2} = -f \frac{(m + m')}{r_1^2} \frac{x_1'}{r_1} \\ \frac{d^2 y_1'}{dt^2} = -f \frac{(m + m')}{r_1^2} \frac{y_1'}{r_1} \\ \frac{d^2 z_1'}{dt^2} = -f \frac{(m + m')}{r_1^2} \frac{z_1'}{r_1}, \end{cases}$$

und wenn man sie mit m' multipliciert

$$4. \quad \begin{cases} m' \frac{d^2 x_1'}{dt^2} = -f \frac{(m + m')}{r_1^2} m' \frac{x_1'}{r_1} \\ m' \frac{d^2 y_1'}{dt^2} = -f \frac{(m + m')}{r_1^2} m' \frac{y_1'}{r_1} \\ m' \frac{d^2 z_1'}{dt^2} = -f \frac{(m + m')}{r_1^2} m' \frac{z_1'}{r_1}. \end{cases}$$

Die Actionen φ, φ' sind verschwunden.

Diese Gleichungen zeigen, dass der Satellit um den Planeten eine Ellipse beschreibt, als wenn dieser fix und von der Masse $m + m'$ wäre, und den Satelliten mit der Kraft $f \frac{(m + m') m'}{r^2}$ anziehen würde.

§ 420. Bezeichnet man mit a' die halbe große Achse der Bahn des Satelliten, mit T' die Umlaufszeit, so hat man

$$5. \quad f(m + m') = 4 \pi^2 \frac{a'^3}{T'^2},$$

und da wir für den Planeten hatten

$$6. \quad f(M + m) = 4 \pi^2 \frac{a^3}{T^2},$$

so erhält man, indem man 5. durch 6. dividiert

$$7. \quad \frac{m}{M} \frac{1 + \frac{m'}{m}}{1 + \frac{m}{m}} = \frac{a'^3}{T'^2} : \frac{a^3}{T^2}.$$

Ist die Masse des Satelliten im Vergleiche zum Planeten sehr gering, kann man

$$\frac{1 + \frac{m'}{m}}{1 + \frac{m}{M}}$$

gleich der Einheit setzen, und dann hat man

$$8. \quad \frac{m}{M} = \frac{a'^3}{T'^2} : \frac{a^3}{T^2},$$

so dass man die Masse des Planeten im Verhältnisse zu der der Sonne berechnen kann.

§ 421. Dieser Weg der Berechnung ist bei der Erde nicht anwendbar, da die Masse des Mondes im Verhältnisse zur Masse der Erde nicht als sehr gering betrachtet werden kann.

Hier wird ein anderer Weg eingeschlagen. Wir hatten bereits

$$f(M + m) = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}.$$

Nimmt man aber einen Massepunkt von der Einheit der Masse auf der Oberfläche der Erde, alsdann ist die Attraction der Erde, deren Masse wir mit m bezeichnen, auf diesen Punkt, wie wir im Capitel der Attraction gesehen, wenn wir die Erde als sphärisch und bestehend aus concentrischen homogenen Schichten annehmen gleich der Attraction eines materiellen, im Mittelpunkte der Erde placierten Punktes von der Masse m , also gleich als wäre die ganze Masse der Erde in ihrem Mittelpunkte concentrirt, und hat also zum Ausdrucke, wenn wir diese mit G und den Halbmesser mit ρ bezeichnen,

$$9. \quad G = \frac{fm}{\rho^2}.$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung und der Gleichung $f(M + m) = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$ die Größe f , so kommt

$$10. \quad \frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 G \rho^2} - 1.$$

Diese Gleichung 10. gibt das gesuchte Verhältniß der Masse der Erde zu der Sonne, und da ferner der Coefficient f bekannt ist, so hat man aus der Gleichung 9. die Masse der Erde. Berechnet man nach der Formel 10. das Verhältniß der Masse der Erde zu der Sonne, so findet man, indem

$$G = 9^m 81645$$

$$\rho = 6364551^m$$

$$T = 86400'' \times 365,2563$$

$$a = 23984 \rho$$

sind,

$$\frac{M}{m} = 354.592,$$

um so vielmal größer ist die Masse der Sonne als die der Erde.

§ 422. Hat man die Masse der Erde bestimmt, so kann man die Masse eines jeden Planeten bestimmen, der keine Satelliten hat.

Für den Planeten von der Masse m' , bei welchem die halbe große Achse der Bahn a_1 und die Umlaufszeit T_1 ist, hat man

$$11. \quad f(M + m') = \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2}.$$

Für die Erde, deren Masse mit m bezeichnet wird, hat man

$$12. \quad G = \frac{fm}{\rho^2},$$

wenn der Halbmesser der Erde mit ρ bezeichnet wird.

Eliminiert man f , so ergibt sich

$$13. \quad \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2} = G\rho^2 \left(\frac{M}{m} + \frac{m'}{m} \right).$$

Ersetzt man $\frac{M}{m}$ durch den gefundenen Wert 354.592, so kann

man aus 13. $\frac{m'}{m}$ bestimmen.

Sechzigstes Capitel.

Bestimmung der Zeit in der elliptischen Bewegung.

§ 423. Wir haben gesehen, dass der Planet P von der Masse m , in Beziehung auf fixe, durch das Centrum der Sonne S gezogene Achsen sich so bewegt, als wenn die Sonne fix wäre und eine Masse hätte, die gleich ist ihrer wirklichen Masse M , vermehrt um die Masse des Planeten m . Der Planet von der Masse m bewegt

sich daher um die Sonne, als wäre er von einer Kraft sollicitiert, die zum Ausdrucke hat

$$1. \quad \begin{cases} P = -f \frac{(M + m)m}{r^2} = -\frac{\mu m}{r^2} \\ \mu = f(M + m). \end{cases}$$

Die Umlaufbahn ist eine Ellipse, deren Brennpunkt S ist.

Nehmen wir ihre Ebene zur Ebene der xy , nennen ihre halbe große Achse a , den Parameter p , ihre Excentricität e , so hatten wir im § 407

$$2. \quad \begin{cases} c^2 = \mu p = \mu a (1 - e^2) \\ h = -\frac{\mu}{a}. \end{cases}$$

Sei nun die Trajectorie des Planeten $AP A'$, A der Punkt, welcher der Sonne am nächsten steht, Perihelium genannt, der Scheitel A' der am weitesten von S abstehende Punkt, Aphelium genannt, ω der Winkel, den der Radius vector des Periheliums mit der x -Achse bildet, und W der Winkel ASP , den der Radius vector $SP = r$ mit SA einschließt. Dieser Winkel heißt die wahre Anomalie. Der Polarwinkel $xSP = \Theta$ ist mit der wahren Anomalie durch die Gleichung verbunden

$$\Theta = W + \omega,$$

wo ω constant ist.

§ 424. Rechnen wir jetzt die Zeit, die das Mobile benöthigt, um in einen gewissen Punkt seiner Trajectorie zu gelangen.

Wir hatten im § 405

$$3. \quad v^2 = \frac{2\mu}{r} + h = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

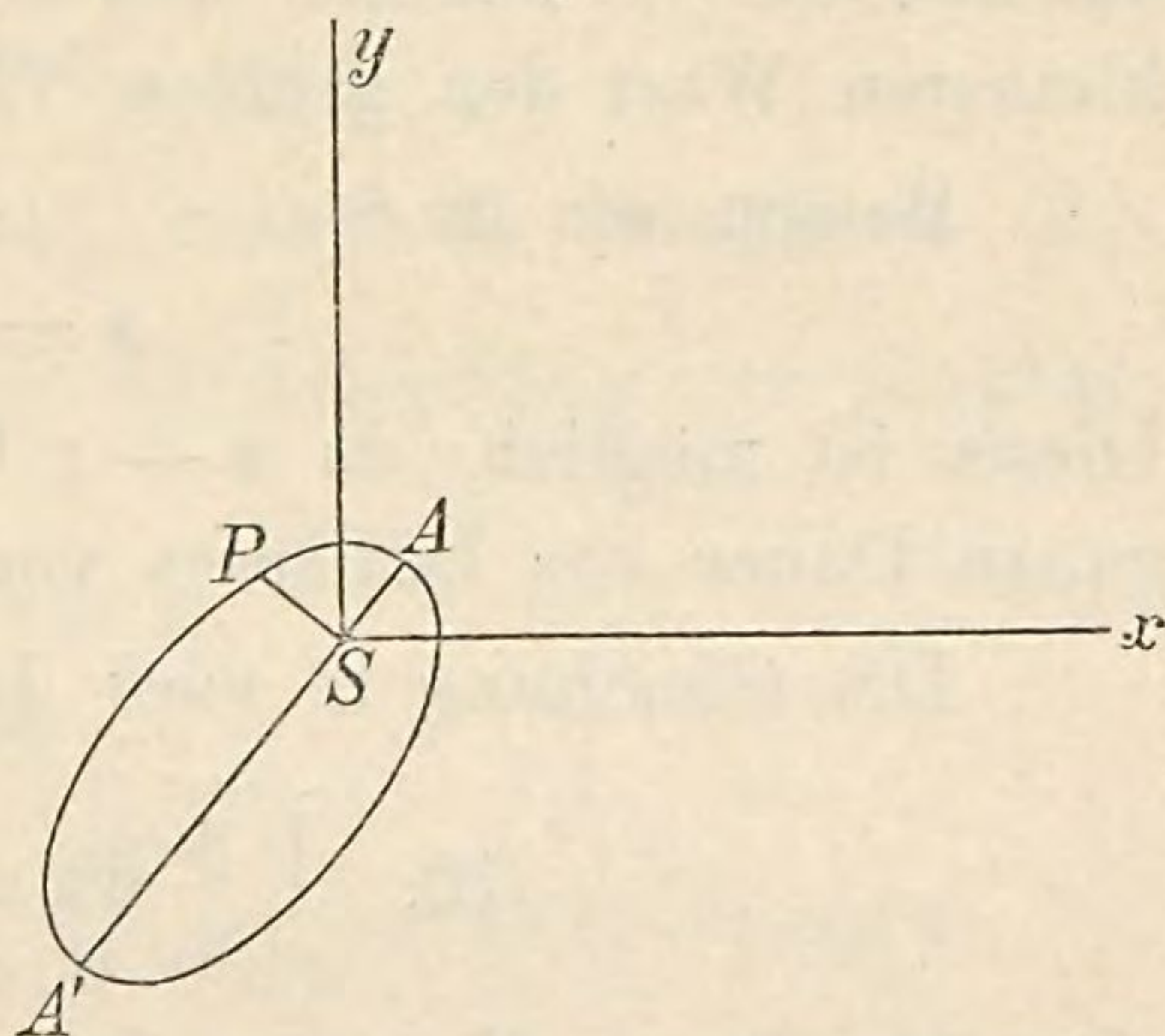
ferner hatten wir im § 396

$$4. \quad v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2},$$

daher

$$5. \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}.$$

Fig. 93.



Ersetzen wir in dieser Gleichung c^2 durch seinen Wert aus 2. $\mu a (1 - e^2)$, so hat man

$$6. \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = - \frac{\mu a (1 - e^2)}{r^2} + \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}.$$

Diese Gleichung kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$7. \left(\frac{r dr}{dt} \right)^2 = \frac{\mu}{a} [-(a - r)^2 + a^2 e^2],$$

und daraus

$$8. \sqrt{\frac{\mu}{a}} dt = \pm \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}}$$

§ 425. Nennen wir τ den Zeitpunkt des Eintrittes des Mobile ins Perihelium, $\frac{dr}{dt}$ ist positiv, r hat den kleinsten Wert $a(1 - e)$ und den größten Wert $a(1 + e)$, und man muss in der Gleichung 8. das Zeichen $+$ nehmen und beibehalten, bis r wachsend von seinem kleinsten Wert den größten Wert erlangt.

Setzen wir in 8.

$$9. a - r = ae \cos u.$$

Dieses ist möglich, da $a - r$ kleiner bleibt als ae , u wird für die ganze Dauer des Umlaufes von 0 bis 2π variieren.

Die Gleichung 8. wird dann

$$10. \sqrt{\frac{\mu}{a}} dt = a(1 - e \cos u) du,$$

eine Gleichung, die sofort integriert werden kann, und gibt, indem $(t - \tau)$ gleichzeitig mit u Null wird,

$$11. \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} (t - \tau) = u - e \sin u.$$

t erscheint in dieser Weise ausgedrückt als Function von u . u ist mit r verbunden durch die Relation 9.

$$12. r = a(1 - e \cos u).$$

§ 426. Will man die Lage des Mobile nach Ablauf einer gewissen Zeit t berechnen, so gibt die Gleichung 11. den Wert von u und die Gleichung 12. den Wert von r .

Den Winkel u nennt man die excentrische Anomalie.

Die Gleichung 11. schreibt man gewöhnlich in folgender Form

$$13. n(t - \tau) = u - e \sin u,$$

indem man

$$14. \quad n = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}}, \quad \mu = n^2 a^3$$

setzt.

$n(t - \tau)$ nennt man die mittlere Anomalie.

Wir hatten für μ den Ausdruck

$$15. \quad \mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

daher

$$16. \quad \begin{cases} n^2 a^3 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \\ n^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}, \quad n = \frac{2\pi}{T}, \end{cases}$$

daher wird die Gleichung 13.

$$17. \quad \frac{2\pi}{T} (t - \tau) = u - e \sin u,$$

wo T die Dauer des Umlaufes bedeutet.

Den Coefficienten $n = \frac{2\pi}{T}$ nennt man die mittlere Bewegung, und die Gleichung 13. heißt die Gleichung von Kepler.

§ 427. Man hat in 12.

$$r = a(1 - e \cos u),$$

die Polargleichung der Ellipse ist aber

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\Theta - \omega)} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\Theta - \omega)} = a(1 - e \cos u).$$

Daraus ergibt sich folgende Ableitung:

$$1 - e \cos u = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos(\Theta - \omega)}, \quad \frac{1 - e}{1 - e \cos u} = \frac{1 + e \cos(\Theta - \omega)}{1 + e}$$

$$\frac{1 - e \cos u}{1 + e} = \frac{1 - e}{1 + e \cos(\Theta - \omega)}, \quad \frac{1 + e}{1 - e \cos u} = \frac{1 + e \cos(\Theta - \omega)}{1 - e}$$

$$e \cos u = 1 - \frac{(1 - e^2)}{1 + e \cos(\Theta - \omega)} = \frac{e \cos(\Theta - \omega) + e^2}{1 + e \cos(\Theta - \omega)}$$

$$\cos u = \frac{\cos(\Theta - \omega) + e}{1 + e \cos(\Theta - \omega)}$$

$$1 - \cos u = (1 - e) \frac{(1 - \cos[\Theta - \omega])}{1 + e \cos(\Theta - \omega)}$$

$$1 + \cos u = \frac{(1 + e)(1 + \cos[\Theta - \omega])}{1 + e \cos(\Theta - \omega)}$$

Denn nach einem bekannten Satz in der analytischen Geometrie ist der Leitstrahl $r = a \mp ex$.

Es ist daher dieser Radius vector

$$OM = r = a - ecP = a - ea \cos KcA = a(1 - e \cos KcA).$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem für r

$$r = a(1 - e \cos u),$$

so ergibt sich

$$\cos KcA = \cos u, \quad KcA = u.$$

Angenommen ferner, dass in demselben Zeitpunkte der Planet und ein zweites Mobile vom Punkte A ausgehen, ersterer beschreibe nach dem Flächengesetze die Ellipse, das Mobile beschreibe in einer gleichförmigen Bewegung den Kreis, und beide gelangen im selben Zeitpunkte in A' .

Zur Zeit t wird das Mobile in K' sein, und dann wird der Winkel $K'cA$, wenn wir ihn mit η bezeichnen, die mittlere Anomalie sein. Denn der Winkel $K'cA$ hat zum Ausdrucke

$$\eta = \frac{2\pi}{T}(t - \tau) = n(t - \tau),$$

$n(t - \tau)$ ist aber die mittlere Anomalie.

Parabolische Bewegung der Kometen.

§ 429. Beschreibt der Komet um die Sonne, welche sich im Brennpunkte befindet, eine Parabel, so nennen wir wie früher $\Theta - \omega = w$ den Winkel, welchen der Radius vector $SM = r$ mit dem Radius vector des Periheliums macht, wo ω eine Constante und daher $dw = d\Theta$ ist.

Die Gleichung der Parabel ist

$$r = \frac{p}{1 + \cos w} = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{w}{2}}.$$

Wir hatten aber

$$r^2 \frac{dw}{dt} = c$$

$$\mu p = c^2$$

$$\mu = f(M + m),$$

wo M die Masse der Sonne, m die Masse der Kometen bedeutet.

Man hat also

$$21. \quad r^2 dw = c dt = \sqrt{f(M + m) p} dt$$

$$22. \quad c = \sqrt{f(M + m) p}.$$

Denn bei dem Problem der zwei Körper hatten wir, dass der Komet um die Sonne sich so bewegt, als wenn die Sonne fix und ihre Attractivkraft auf den Kometen gleich wäre,

$$-f \frac{(M + m)m}{r^2} = -\frac{\mu m}{r^2},$$

daher

$$c = \sqrt{\mu p} = \sqrt{f(M + m)p}.$$

Verbindet man die Gleichung 21. mit der Parabel, so ergibt sich

$$r^2 dw = \frac{p^2 dw}{4 \cos^4 \frac{w}{2}} = \sqrt{f(M + m)p} dt,$$

oder

$$23. \quad \frac{2 \sqrt{f(M + m)}}{p^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{dw}{2 \cos^4 \frac{w}{2}}.$$

Integriert man nach der Formel

$$\frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

und nennt die Zeit des Eintrittes des Kometen ins Perihelium τ , so kommt

$$24. \quad \frac{2 \sqrt{f(M + m)}}{p^{\frac{3}{2}}} (t - \tau) = \tan \frac{w}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 w.$$

Dies ist die Gleichung der Bewegung des Kometen in einer Parabel. Sie ist bezüglich $\frac{w}{2}$ vom dritten Grade, und hat nur eine reelle Wurzel, weil das zweite Glied zwischen zwei Gliedern fehlt, die mit gleichen Zeichen behaftet sind, weshalb die Gleichung nothwendig zwei imaginäre Wurzeln hat.

Vernachlässigt man in 24. m , welches im Verhältnisse von M sehr klein ist, setzt $p = 2q$, so hat 24. die Form

$$25. \quad \frac{(t - \tau)}{q^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{fM}} \left[\tan \frac{w}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{w}{2} \right].$$

Nach dieser Gleichung hat man eigene Tafeln angelegt, worin die Wurzel für verschiedene Werte berechnet ist.

Einundsechzigstes Capitel.

Ueber die Centrifugalkraft, Bestimmung von g , Richtung der Verticale, astatisches Gleichgewicht, Homogenität.

Die Centrifugalkraft.

§ 430. Wir haben in der Kinematik und im § 351 diese Kraft kennen gelernt. Insbesondere haben wir in der Kinematik gesehen, dass die totale Acceleration bei jeder krummlinigen Bewegung in eine centripetale und eine tangentielle Acceleration decomponiert wird, und in derselben Weise wird auch die Kraft zerlegt in eine centripetale und tangentielle Kraft.

Die tangentielle Kraft hat zum Ausdrücke

$$m \frac{dv}{dt}.$$

Diese ist es, welche das Mobile in seiner Trajectorie bewegt, und ist stets nach der Tangente der Curve gerichtet.

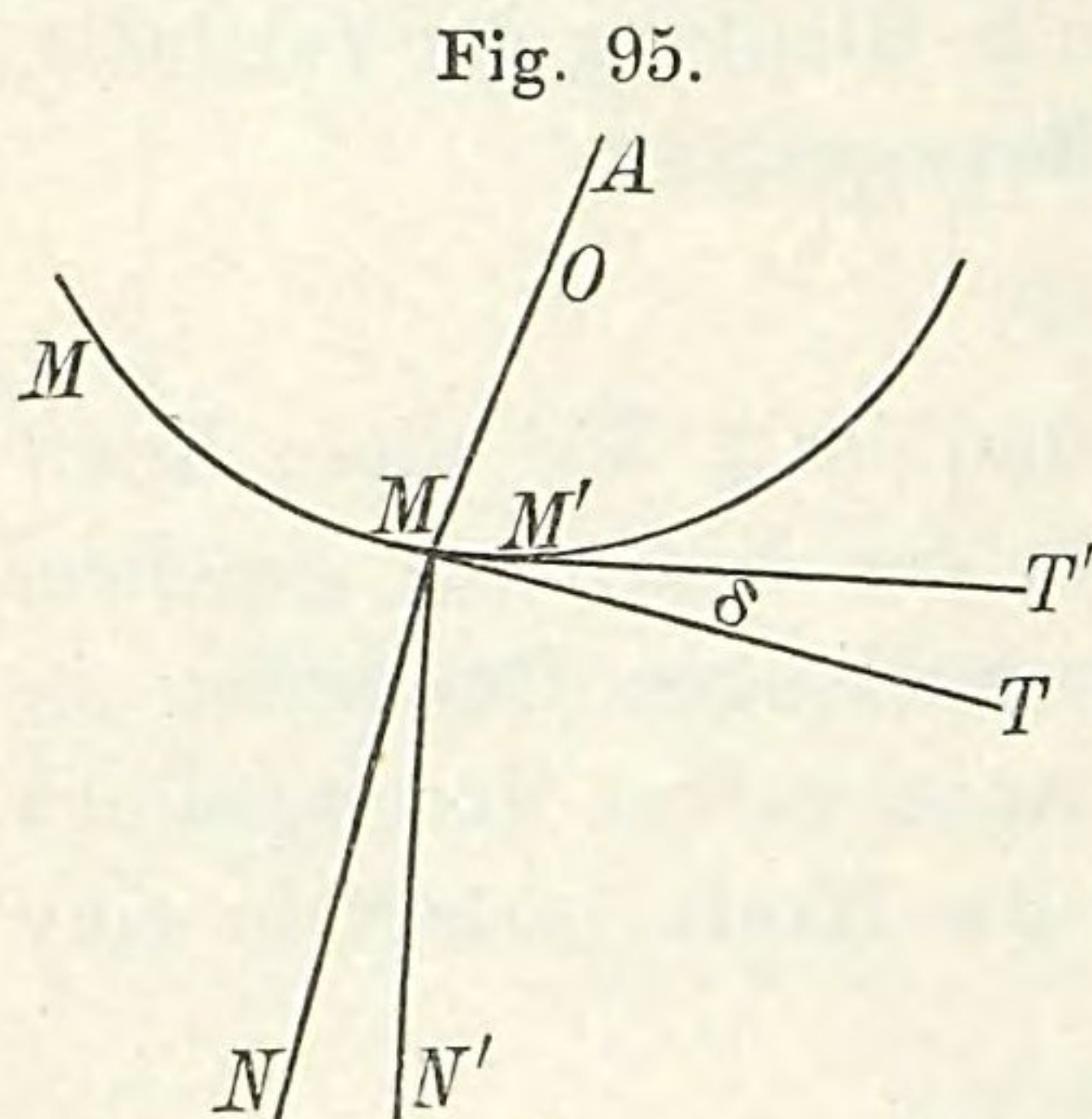
Die centripetale Kraft hat zum Ausdrücke

$$m \frac{v^2}{\rho},$$

wo unter ρ der Krümmungshalbmesser verstanden wird. Diese Kraft ist immer normal zur Trajectorie nach dem Krümmungshalbmesser gerichtet und geht durchs Centrum. Die Ebene, welche durch die Kraft und die Tangente geht, ist die Krümmungsebene im betreffenden Punkte. Rotiert ein materieller Punkt oder ein Körper um eine Achse, so besitzt der materielle Punkt oder der Körper nebst seiner ihn in der Trajectorie bewegendenden tangentiellen Kraft $\frac{dv}{dt}$ noch eine centripetale Kraft $= \frac{mv^2}{\rho}$, welche zur Bewegung nichts beiträgt und nur einen Druck auf die Curve ausübt.

Wird nun ein materieller Punkt von einem Körper sollicitiert, wodurch er gezwungen wird, eine Curve zu beschreiben, so wird dadurch, wie wir bereits früher gesehen, eine Reaction des Punktes auf den Körper hervorgerufen, die jener Einwirkung des Körpers gleich und direct entgegengesetzt ist. Wir können uns die Einwirkung vorstellen, dass die vom Körper ausgehende Kraft mittelst eines am Punkte attachierten Bandes eine Anziehung oder einen Druck auf den Punkt ausübe. Diese Action des Körpers ruft also eine Reaction des Punktes auf den Körper hervor, welche ebenfalls

in eine tangentielle und normale Componente decomponiert werden kann. Die normale Componente der Reaction, welche der der sollicitierenden Kraft gleich und direct ent-



gegengesetzt ist, und also ebenfalls $\frac{m v^2}{\rho}$ zum Ausdruck hat, nennt man Centrifugalkraft, weil sie der Centripetalkraft gleich und entgegengesetzt ist, und daher bestrebt ist, den beweglichen Punkt längs der Normale vom Krümmungsmittelpunkte zu entfernen.

§ 431. Die Geschwindigkeit des Mobile auf der Trajectorie wird durch diese Fliehkraft nicht geändert. Denn wenn das Mobile sich nach MM' bewegt, stellen die Tangenten MT und MT' die Richtungen vor, nach welchen das Mobile auf seiner Trajectorie sich bewegt. Nennt man also den unendlich kleinen Winkel $TM T'$, den beide Tangenten an den unendlich naheliegenden Punkten M und M' bilden, δ , und errichtet man auf beiden Tangenten nach der convexen Seite der Trajectorie zwei Senkrechte MN , MN' , so kann man die Geschwindigkeit v des Mobile in zwei Componenten zerlegen, die eine nach $MT' = v \cos \delta$, und die andere nach $MN' = v \sin \delta$. Letztere wird durch die Curve zerstört. Die erstere ist nur um die Größe $v(1 - \cos \delta)$, also nur um eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung geändert, welche zu vernachlässigen ist.

§ 432. Wir haben ferner in der Kinematik gesehen, dass im Falle die Rotierung des Mobile gleichförmig ist, wo also v constant ist

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

wird, das ist die tangentielle Acceleration $= 0$ ist, und die totale Acceleration sich auf die normale Acceleration

$$\frac{v^2}{\rho}$$

reduciert.

Nennt man die Zeit eines Umlaufes T , so ist, da v constant ist,

$$v = \frac{2\pi\rho}{T}.$$

Daher hat man für die Centrifugalkraft, die wir mit f bezeichnen

$$1. \quad F = \frac{4 \pi^2 \rho}{T^2} m.$$

Dabei weiß man, dass bei der Rotierung um eine Achse die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte des Körpers ihren Distanzen von der Rotationsachse proportional sind.

Die Erde rotiert um ihre Achse, und aus dieser Bewegung entsteht eine Fliehkraft, welche die Kraft der Schwere modificiert, da sie dieser entgegengesetzt ist.

Die Intensität dieser Fliehkraft am Äquator ist aus 1. zu entnehmen, wenn man $m = 1$ setzt, so dass man die Intensität, bezogen auf die Einheit der Masse hat, und die Rechnung durchführt, da man bekannte Größen hat, $\pi^2 = 986960$, $\rho = 6377859$ Meter, $T = 86164$ Sekunden.

Es wird

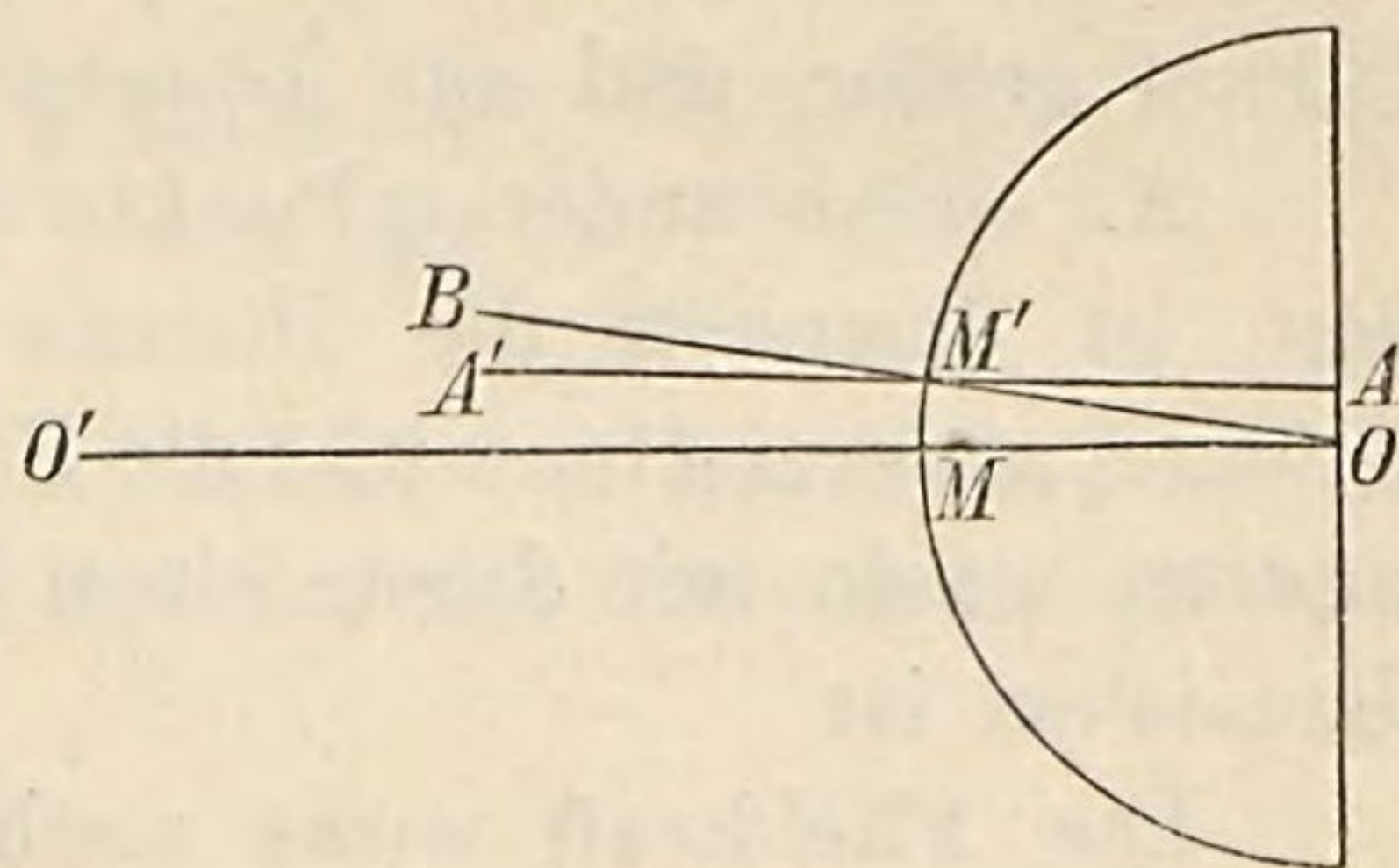
$$F = \frac{4 \pi^2 \rho}{T^2} = 0 \text{ Meter, } 0339.$$

Bestimmung von g .

§ 433. Um die Intensität dieser Centrifugalkraft näher, insbesondere ihr Verhältniss zur Schwere zu bestimmen, und zu beurtheilen, wie die Attraction durch die Fliehkraft modificiert wird, betrachten wir zuerst einen am Äquator liegenden Punkt, nennen, abgesehen von dieser Fliehkraft, die Kraft der Attraction auf die Einheit der auf der Oberfläche sich befindenden Masse G , das Gewicht der Einheit der Masse g . Am Äquator ist die Fliehkraft der Kraft der Schwere direct entgegengesetzt, in der Richtung MO' wirkend. Bezieht man die Größe F , die Fliehkraft vorstellend, auch auf die Einheit der Masse, so wird man haben

$$2. \quad g = G - F = G = g + F.$$

Fig. 96.



Wir haben ferner gesehen, dass wir für F , bezogen auf die Einheit der Masse, indem in 1. $m = 1$ gesetzt wird, haben

$$F = \frac{4\pi^2\rho}{T^2},$$

wo unter ρ der Halbmesser der Erde zu verstehen ist.

Daher

$$3. \quad g = G - \frac{4\pi^2\rho}{T^2}, \quad G = g + \frac{4\pi^2\rho}{T^2}.$$

Die Länge eines größten Kreises der Erde ist 40,000.000 Meter, g ist in verschiedenen Breiten sehr wenig verschieden, in Paris ist g 9^m 80896, welche Größe man für die ganze Erde annehmen kann, da die Differenzen kaum merklich sind.

Nimmt man also diesen Wert von g an, so ist für Orte am Äquator

$$\frac{F}{g} = \frac{1}{289}, \quad F = \frac{4\pi^2\rho}{T^2} = \frac{g}{289}.$$

Daher, wenn man diesen Wert in 3. setzt

$$g = G - \frac{g}{289}.$$

Da g wenig von G differiert, kann man schreiben

$$g = G \left(1 - \frac{1}{289} \right).$$

Am Äquator ist also die Kraft der Attraction um den 289. Theil durch die Fliehkraft vermindert. Würde die Erde 17mal schneller rotieren, so würde, indem $289 = 17^2$ ist, die Fliehkraft 289mal größer, und am Äquator die Schwere gleich Null sein.

An einem anderen Punkte der Erde, M' , der nicht am Äquator liegt, ist einerseits die Distanz des Punktes von der Achse eine kleinere, andererseits wirkt die Fliehkraft nicht direct entgegengesetzt, sondern macht mit dieser einen Winkel, so dass nur die Componente abzuziehen ist.

Die Fliehkraft wirkt nach $M'A'$, der Radius $M'A$ ist gleich

$$\rho \cos A M' O.$$

Dieser Winkel $A M' O = M' O M$, welchen wir φ nennen, ist die geographische Breite von M' , und man hat, wenn der Radius des Parallelkreises mit ρ' bezeichnet wird,

$$4. \quad \rho' = \rho \cos \varphi$$

Die Fliehkraft an diesem Punkte, die wir mit F' bezeichnen, ist demnach, auf die Einheit der Masse bezogen,

$$5. \quad F' = \frac{4 \pi^2 \rho'}{T^2} = 4 \frac{\pi^2 \rho \cos \varphi}{T^2}.$$

Diese nach der Richtung $M' A'$ wirkende Kraft muss man auf $O M'$ projicieren, um die der Schwere $M' B$ direct entgegengesetzte Componente, die wir mit F'' bezeichnen, zu erhalten.

6. Es wird demnach sein

$$\begin{aligned} F'' &= 4 \pi^2 \frac{\rho \cos \varphi \cdot \cos \varphi}{T^2} = \\ &= 4 \frac{\pi^2 \rho \cos^2 \varphi}{T^2} = \\ &= \frac{g}{289} \cos^2 \varphi = \frac{g}{289} \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Um diese Größe wird also die Attraction in jeder Breite durch die Fliehkraft vermindert.

Daher ist an der Breite des Punktes M'

$$7. \quad g = G \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi}{289} \right).$$

Am Pole also ist $g = G$, weil $\varphi = 90^\circ$, $\cos \varphi = 0$ ist.

Da die Erde überdies nicht sphärisch und nicht homogen ist, wodurch sich die Attraction ebenfalls vermindert, so bringt man eine kleine Correctur an, berechnet die Verminderung der Attraction $\frac{g}{200} \cos^2 \varphi$, und ergibt sich dann für jede Breite

$$8. \quad g = G \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi}{200} \right), \quad G = \frac{g}{\left(\frac{1 - \cos^2 \varphi}{200} \right)},$$

als Ausdrücke für das Gewicht der Einheit der Masse und für die Attraction, bezogen auf die Einheit der auf der Oberfläche der Erde sich befindenden Masse.

Richtung der Verticale.

§ 434. Wir werden bei der im zweiten Bande vorzutragenden relativen Bewegung ansehen, dass die Rotierung der Erde um ihre Achse auch auf die Richtung der Verticale einen Einfluss hat.

Wäre die Erde, die wir als fast sphärisch annehmen, immobil, alsdann würde die Verticale, das ist die Resultante aller einen Körper

sollicitierenden Schwerkräfte, nach einem Erdhalbmesser gerichtet sein. Ein materieller Punkt, aufgehängt an einem Faden (fil à plomb), wäre unter der Spannung des Fadens und der Attraction der Erde im Gleichgewichte, die Attraction wäre der Spannung gleich und direct entgegengesetzt.

Infolge der Rotierung der Erde wird die Richtung der Verticale alteriert, die Verticale macht mit dem Erdhalbmesser einen wenn auch sehr kleinen Winkel. Ein im leeren Raume fallender Körper fällt ein wenig nach Osten. Diesen kleinen Winkel, den die Verticale mit der Attraction der Erde schließt, nennt man die infolge der Rotation der Erde entstandene Deviation der Verticale. Die Größe der Deviation variiert mit der geographischen Breite, am Äquator ist sie gleich Null. Auch gibt es dabei eine fast unmerkliche Deviation nach Süden.

Wir werden auch sehen, dass ein im leeren Raume von geringer Höhe fallender Körper eine Bewegung annimmt, als wäre die Erde unbeweglich.

Astatisches Gleichgewicht.

§ 435. Im § 65 haben wir die Bedingungen des Gleichgewichtes paralleler, an einem freien, soliden Körper wirkender Kräfte angegeben, indem wir dabei die Richtung der Kräfte parallel einer Achse, dort der z-Achse, angenommen haben.

Nehmen wir aber an, die Richtung der Kräfte bilde mit den Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Winkel α , β , γ , alsdann wird man zur Bestimmung der Bedingungen des Gleichgewichtes sich der allgemeinen Gleichungen des § 73 bedienen. Dabei reducieren sich die Gleichungen 1., 2., 3. des § 73, indem die Winkel α , β , γ für alle Kräfte dieselben sind, auf die einzige Gleichung $\Sigma P = 0$.

Die Gleichungen 4., 5., 6. des § 73 werden

$$1. \quad \begin{cases} \cos \gamma \Sigma P_y = \cos \beta \Sigma P_z \\ \cos \alpha \Sigma P_z = \cos \gamma \Sigma P_x \\ \cos \beta \Sigma P_x = \cos \alpha \Sigma P_y. \end{cases}$$

Daraus ergeben sich die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Gleichgewichtes paralleler Kräfte, deren Richtung mit den Achsen den Winkel α , β , γ bildet,

$$2. \quad \Sigma P = 0, \quad \frac{\Sigma P_x}{\cos \alpha} = \frac{\Sigma P_y}{\cos \beta} = \frac{\Sigma P_z}{\cos \gamma}.$$

Gesetzt nun, dass die parallelen Kräfte bei der Deplacierung des Körpers in Größe, Richtung und Sinn constant und appliciert an fixen Punkten verbleiben, alsdann wird das Gleichgewicht astatisch genannt, wenn es besteht, welche Orientierung des Körpers auch immer sein möge, oder, was dasselbe ist, welche Orientierung die Kräfte in Beziehung auf den Körper auch immer haben mögen, also unabhängig von den Größen $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$.

Zu diesem Ende ist es nothwendig und hinreichend, dass man hat

$$3. \quad \Sigma P = 0, \quad \Sigma P_x = 0, \quad \Sigma P_y = 0, \quad \Sigma P_z = 0.$$

In diesem Falle erscheinen die Bedingungen 2. verificiert, ohne Rücksicht auf die Werte von $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, also unabhängig von der Richtung der parallelen Kräfte.

In einem solchen Falle fällt das Centrum der parallelen Kräfte, welche in einem Sinne wirken, mit dem Centrum der parallelen Kräfte zusammen, welche im entgegengesetzten Sinne wirken, so dass beide Kräftesysteme immer und unabhängig von ihrer gemeinsamen Richtung sich Gleichgewicht machen.

§ 436. Dieser Fall tritt ein bei einem soliden Körper, welcher nur von Schwerkraften sollicitiert und dessen Schwerpunkt fixiert wird. Alle Kräfte wirken bekanntlich in parallelen Richtungen, die Resultante ist das Gewicht des Körpers, der Angriffspunkt dieser Resultante ist der Schwerpunkt, welcher im Körper eine von dessen Orientierung unabhängige Position einnimmt. Deplaciert man den Körper, so bleiben die parallelen Kräfte constant in Größe, Richtung und Sinn, appliciert an fixen Punkten, unabhängig von ihrer Richtung in Beziehung auf den Körper.

Fixiert man also den Schwerpunkt und belässt dem Körper die Freiheit, um diesen Punkt zu rotieren, so bleibt der Körper in allen Lagen im Gleichgewichte. Nimmt man den fixierten Schwerpunkt zum Coordinatenursprunge, so erscheinen, indem die Kräfte durch den fixen Punkt zerstört sind, die Bedingungen 3. erfüllt.

Homogenität.

§ 437. Im Laufe der Mechanik haben wir verschiedene Größen kennen gelernt und sind zu Formeln und Gleichungen bezüglich dieser Größen gelangt.

So haben wir im Capitel XV die Größen, Körper, Volumen, Masse und Dichte kennen gelernt, und bezeichnet man das Gewicht des Körpers mit p , dessen Volumen mit v , dessen Masse mit m , dessen Dichte, das ist die Masse in der Volumseinheit, mit ρ , so hat man

$$m = \rho v, \quad p = gm = g\rho v.$$

Daselbst und in der Kinematik haben wir noch andere Größen betrachtet, als Zeit, Länge, Masse, Geschwindigkeit, Acceleration und Kraft, und Gleichungen zwischen diesen Größen aufgestellt, wobei in diesen Gleichungen nebst den Größen auch unbenannte Zahlen, wie π , Logarithmen und andere Zahlen vorkommen.

Bei der praktischen Berechnung müssen bezüglich dieser Größen gewisse fundamentale Einheiten angenommen werden. So können die Principaleinheiten von Länge, Masse und Zeit festgesetzt und daraus die Einheit der Kraft abgeleitet werden.

Bei theoretischen Untersuchungen hingegen ist es vorzuziehen, die fundamentalen Einheiten unbestimmt zu lassen, so dass man die erhaltenen Formeln, zu welchen man gelangt ist, auf jedes System gewählter Einheiten in Anwendung bringen kann. Die Formeln müssen daher so beschaffen sein, dass sie bestehen, welches System von Einheiten wir auch wählen mögen. Die Form derselben muss demnach gewissen Bedingungen entsprechen, die man die Bedingungen der Homogenität der Größen nennt.

§ 438. Seien also l eine Länge, t eine Zeit, m eine Masse, v eine Geschwindigkeit, φ eine Acceleration, f eine Kraft, ausgedrückt nach einem gewissen System fundamentaler Einheiten der Länge, Zeit und Masse.

Verkleinert man die Einheiten der Länge, Zeit und Masse und dies

die Einheit der Länge nach dem Verhältnisse von $1 : \lambda$

die Einheit der Zeit nach dem Verhältnisse von $1 : \tau$

die Einheit der Masse nach dem Verhältnisse von $1 : \mu$,

so werden obige Größen

$$l\lambda, \quad t\tau, \quad m\mu, \quad v\frac{\lambda}{\tau}, \quad \varphi\frac{\lambda}{\tau^2}, \quad f\frac{\lambda}{\tau^2}\mu.$$

Die ersten drei Ausdrücke sind an sich klar. Die drei letzten Ausdrücke erhält man, wenn man bedenkt, dass eine Geschwindigkeit der Quotient einer Länge durch eine Zeit, eine Acceleration der Quotient

einer Geschwindigkeit durch eine Zeit, und eine Kraft das Product einer Acceleration mit einer Masse ist.

So haben wir für die Dauer sehr kleiner Schwingungen eines einfachen Pendels den Ausdruck erhalten:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

wobei π eine Zahl, l die Länge des Pendels, g die Acceleration der Schwere bedeuten.

Ändert man die fundamentalen Einheiten in obiger Weise, so wird der Ausdruck

$$t\tau = \pi \sqrt{\frac{l\lambda}{\frac{g\lambda}{\tau^2}}}$$

mithin immer

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Formel genügt also der Bedingung der Homogenität. Entspricht eine erhaltene Gleichung nicht den Bedingungen der Homogenität, so ist sie schon deshalb als erwiesen unrichtig zu verwerfen.

Zweihundsechzigstes Capitel.

Das d'Alembert'sche Princip.

§ 439. Wir wollen noch, bevor wir die Theorie der Bewegung eines Punktes schließen, in Kürze obiges Princip insoweit anführen und begründen, als es die Bewegung eines Punktes betrifft. Ausführlich werden wir dieses Princip bei der Dynamik von Systemen auseinandersetzen, und daran die Gleichungen von Lagrange, das Princip von Hamilton, die canonischen Gleichungen, das Theoreme von Jacobi und andere Principien anreihen.

Im Jahre 1743 stellte d'Alembert ein Princip auf, mit Hilfe dessen Probleme der Dynamik sich auf Probleme der Statik zurückführen lassen, und lautet solches:

Es findet in jedem Augenblicke Gleichgewicht statt zwischen den Kräften, welche auf ein System in Bewegung wirken, und den Trägheitskräften der verschiedenen Punkte dieses Systems.

Dieses Princip wird auch in anderer Form enonciert, die wir bei der Dynamik von Systemen kennen lernen werden. Hier wollen wir es auf einen Punkt in Bewegung anwenden.

In der That, die Kraft der Trägheit eines Punktes ist gleich und direct entgegengesetzt der Kraft, welche die Bewegung dieses Punktes erzeugt, und würde demnach diesen Punkt im Gleichgewichte erhalten, wenn sie wirklich auf ihn in einem gegebenen Augenblicke wirken sollte.

§ 440. Es sei nun ein materieller, freier Punkt von der Masse m von den Kräften $P, P', P'' \dots$, also von deren Resultante R sollicitiert, die Projectionen dieser auf drei rechtwinkelige Achsen seien X, Y, Z , die Coordinaten des Punktes m x, y, z , so hatten wir früher für die Bewegungsgleichungen dieses Punktes

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z,$$

mithin

$$1. \quad \begin{cases} -m \frac{d^2 x}{dt^2} + X = 0 \\ -m \frac{d^2 y}{dt^2} + Y = 0 \\ -m \frac{d^2 z}{dt^2} + Z = 0. \end{cases}$$

Obiges Princip erscheint also für die Bewegung eines freien Punktes, da

$$-m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad -m \frac{d^2 z}{dt^2}$$

die Componenten der Kraft der Trägheit, X, Y, Z die Projectionen aller wirkenden Kräfte sind, bewiesen.

Da ferner zwischen diesen Kräften Gleichgewicht vorhanden ist, so wird man auch, wenn man dem Punkte m zur Zeit t irgend ein virtuelles Displacement δs ertheilt, dessen Projectionen auf die Achsen $\delta x, \delta y, \delta z$ sind, die Gleichung haben

$$2. \quad \left(-m \frac{d^2 x}{dt^2} + X \right) \delta x + \left(-m \frac{d^2 y}{dt^2} + Y \right) \delta y + \\ + \left(-m \frac{d^2 z}{dt^2} + Z \right) \delta z = 0$$

oder

$$3. \quad m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z.$$

Die Gleichung 2. bedeutet, dass für irgend welches virtuelle Displacement δx , δy , δz , die Summe der virtuellen Arbeiten der Kraft der Trägheit und aller reell wirkender Kräfte gleich Null ist.

Mit Hilfe der Gleichung 2. kann man alle Umstände der Bewegung bestimmen. Denn da die Größen δx , δy , δz willkürlich sind, so müssen, damit die Gleichung 2. bestehe, die Coefficienten jener Größen gleich Null gesetzt werden, und daraus wird man die Coordinaten des Punktes als Function der Zeit bestimmen.

§ 441. Ist der Punkt genöthigt, bei seiner Bewegung auf einer Fläche zu bleiben, und ist Reibung nicht vorhanden, alsdann ist die, statt der Fläche, einzuführende Reaction N nothwendig normal zur Fläche.

Für diesen Fall hat man, wie wir aus früherem wissen, wenn man die Fläche mit $F(x, y, z)$ oder $F(x, y, z, t)$ bezeichnet, je nachdem die Fläche fix oder deformabel ist,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = X + N \cos \lambda$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + N \cos \mu$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N \cos \nu$$

oder

$$4. \quad \begin{cases} -m \frac{d^2 x}{dt^2} + X + N \cos \lambda = 0 \\ -m \frac{d^2 y}{dt^2} + Y + N \cos \mu = 0 \\ -m \frac{d^2 z}{dt^2} + Z + N \cos \nu = 0, \end{cases}$$

wobei N die Normale, und λ , μ , ν die Winkel der Normale N mit den Achsen vorstellen, und die Werte haben

$$\cos \lambda = \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos \mu = \frac{\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos \nu = \frac{\frac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}.$$

Also auch hier erweist sich das d'Alembert'sche Princip als richtig, dass nämlich zwischen allen äußeren und Liaisonskräften dann der Kraft der Trägheit Gleichgewicht vorhanden ist.

Ertheilt man dem Punkte ein virtuelles Deplacement, dessen Projectionen δx , δy , δz sind, so wird man statt der Gleichung 2. die Gleichung haben

$$\begin{aligned} 5. \quad & \left(-m \frac{d^2 x}{dt^2} + X + N \cos \lambda \right) \delta x + \\ & + \left(-m \frac{d^2 y}{dt^2} + Y + N \cos \mu \right) \delta y + \\ & + \left(-m \frac{d^2 z}{dt^2} + Z + N \cos \nu \right) \delta z = 0. \end{aligned}$$

Bedenkt man aber, dass der Punkt genöthigt ist, auf der Fläche zu bleiben, die virtuelle Deplacierung mit der Liaison verträglich sein muss, das ist, die Coordinaten des Punktes auch in der neuen Position der Liaison entsprechen müssen, so sind die Quantitäten δx , δy , δz nicht mehr ganz willkürlich, sondern durch die, aus der Differenzierung der Gleichung der Fläche $F(x, y, z)$ oder $F(x, y, z, t)$ sich ergebende Gleichung verbunden

$$6. \quad \frac{\delta F}{\delta x} \delta x + \frac{\delta F}{\delta y} \delta y + \frac{\delta F}{\delta z} \delta z = 0,$$

indem im zweiten Falle, wie wir wissen, t als constant betrachtet wird, und drückt die Gleichung 6. eben aus, dass die ertheilte virtuelle Deplacierung compatibel mit der Liaison ist.

Die Summe der Producte in 5., $N \cos \lambda \delta x + N \cos \mu \delta y + N \cos \nu \delta z = N (\cos \lambda \delta x + \cos \mu \delta y + \cos \nu \delta z)$ ist demnach, wenn man für $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ obige Werte setzt, gleich Null und entfallen aus der Gleichung 5., die Reaction fällt heraus und die Gleichung 5. reducirt sich, wie beim freien Punkte, auf die Gleichung 2. oder 3., aus welchen man demnach wie früher alle Umstände der Bewegung bestimmen kann.

§ 442. Ist der Punkt genöthigt, auf einer Curve zu bleiben, und findet dabei Reibung nicht statt, so ist auch hier die, statt der Curve, deren Gleichungen $f(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$, oder $f(x, y, z, t)$, $f_1(x, y, z, t)$ sind, einzuführende Reaction normal zur Curve, und der Fall ist ganz ähnlich dem früheren.

Auch hier muss bei einer virtuellen Deplacierung der Punkt auf der Curve verbleiben, das Deplacement muss verträglich mit der Liaison sein, das ist, die Coordinaten des Punktes müssen auch in der neuen Position der Liaison entsprechen.

Auch hier wird man, wie aus § 350 zu ersehen, die Gleichung 5. haben

$$\begin{aligned} & \left(-m \frac{d^2 x}{dt^2} + X + N \cos \lambda \right) \delta x + \\ & + \left(-m \frac{d^2 y}{dt^2} + Y + N \cos \mu \right) \delta y + \\ & + \left(-m \frac{d^2 z}{dt^2} + Z + N \cos \nu \right) \delta z = 0, \end{aligned}$$

wo λ , μ , ν die Winkel der Normale mit den Achsen sind, und dazu noch zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu &= 1 \\ \cos \lambda \delta x + \cos \mu \delta y + \cos \nu \delta z &= 0, \end{aligned}$$

mithin auch hier die Glieder $N \cos \lambda \delta x + N \cos \mu \delta y + N \cos \nu \delta z$, indem deren Summe gleich Null ist, entfallen, und die Gleichung sich auf 2. oder 3. reducirt.

Also auch hier erweist sich das d'Alembert'sche Princip als richtig, und können alle Umstände der Bewegung bestimmt werden.

Wie man sieht, ist das Princip bei der Bewegung eines Punktes nicht schlechterdings nothwendig, und reichen vielmehr schon die Gleichungen der Bewegung aus, und wollten wir nur nachweisen, dass das Princip sich auch hier als richtig erweist.

Dreiundsechzigstes Capitel.

Von der Reibung.

Gleitende Reibung, rollende Reibung, Zapfenreibung.

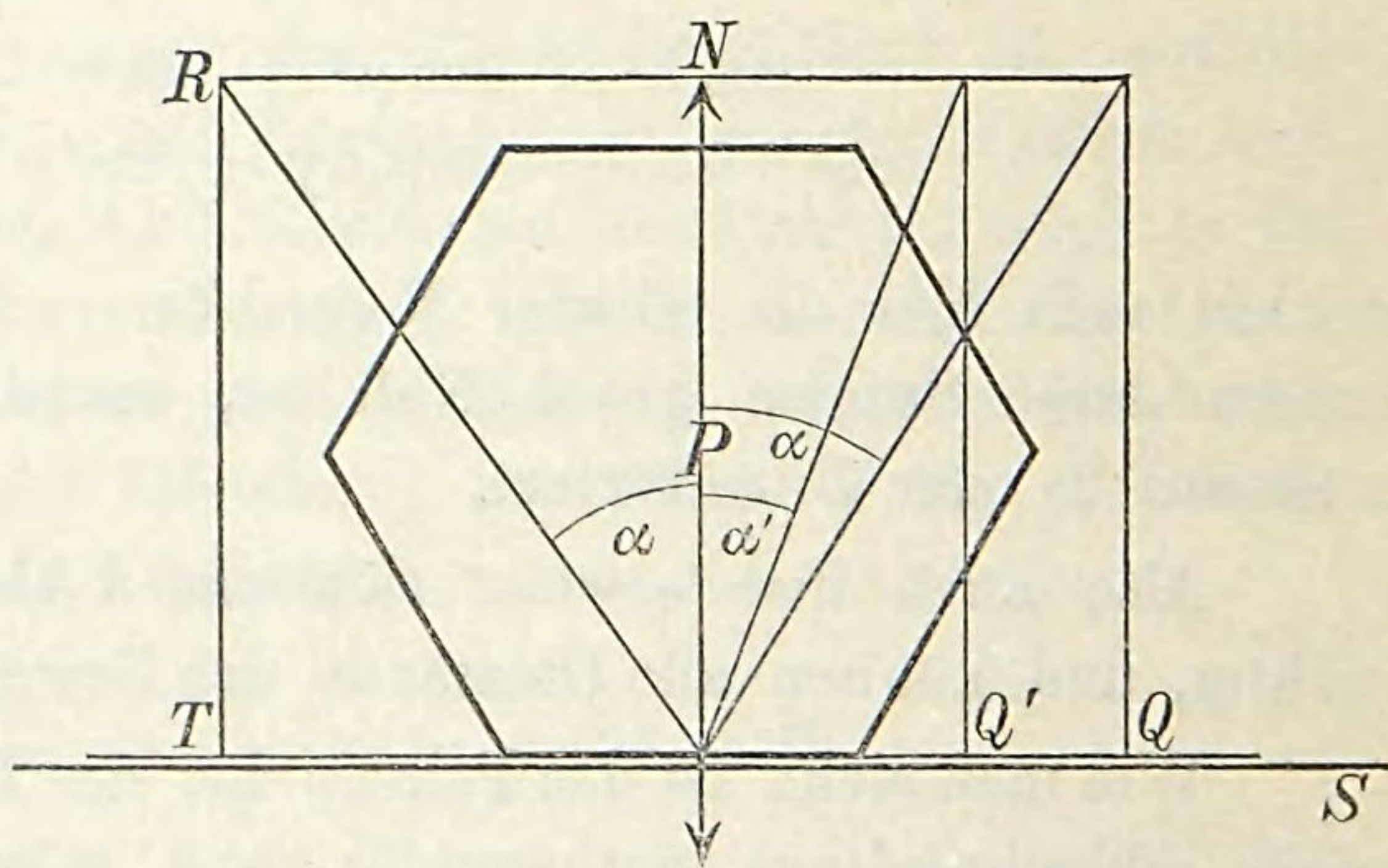
§ 443. Bei allen unseren Untersuchungen über Gleichgewicht und Bewegung solider Körper haben wir diese als vollkommen starr und vollkommen poliert angenommen, also ideale Körper in Betracht gezogen, welche in der Natur nicht vorkommen, und vorausgesetzt, dass wenn zwei Körper, in Ruhe oder Bewegung befindlich, in einem Punkte im Contacte sind, und einer auf dem anderen gleiten kann, ihre wechselseitige Wirkung normal auf der gemeinsamen tangierenden Ebene ist.

Diese Annahme stimmt nicht mit der Erfahrung überein, alle natürlichen Körper sind nicht vollkommen starr und nicht vollkommen poliert. Sind sie im Contact, berühren sie sich immer in mehr als einem Punkte, und die Körper erleiden, wenn auch im allgemeinen sehr kleine Deformationen, welche beim Gleichgewichte permanent, bei der Bewegung variabel sind. Es entstehen moleculare Schwingungen, und entwickelt sich Wärme und Elektrizität, wodurch die Gleichgewichtsbedingungen modificiert werden. Insbesondere tritt, beim Gleiten sowohl als beim Rollen eines Körpers auf einem anderen, zur normalen Reaction eine tangentielle hinzu.

Die gleitende Reibung, wie auch die rollende Reibung und die Zapfenreibung sind von Coulomb, *Memoires présentés à l'Academie de Paris*, Rennie, *Experiments on the friction*, und Morin, *Nouvelles experiences sur le frottement*, sehr genau untersucht worden, und wir wollen über die Reibung bloß einiges anführen.

§ 444. Gesetzt ein nur von der Schwere sollicitierter Körper vom Gewichte P sei auf einer horizontalen Ebene S gestützt, so findet, schon infolge der normalen Reaction N , welche dem Gewichte des Körpers P gleich und direct

Fig. 97.



entgegengesetzt ist, Gleichgewicht statt. Lassen wir nun in einer durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden verticalen Ebene, hart bei der horizontalen Ebene eine sehr kleine Kraft Q' horizontal wirken, so würde solche, wenn nur die normale Reaction vorhanden wäre, das Fortgleiten des Körpers P auf der Ebene S bewirken.

Das geschieht aber nicht, weil durch den Contact nicht bloß die normale Reaction N , sondern auch eine tangentielle Reaction T , mithin die gesammte Reaction R entstanden, welche mit N den Winkel α bildet, dessen Größe durch die Gleichung

$$\text{tang } \alpha = \frac{T}{N} = \frac{T}{P}$$

bestimmt erscheint, während die kleine Kraft Q' mit N einen kleineren Winkel α' einschließt.

So lange also Q' die Größe von T nicht erreicht, wird Bewegung nicht erzeugt und P bleibt immer im Gleichgewichte.

Vergrößern wir dann Q' , bis sie zu $Q = T$ wird und eigentlich diese um eine sehr kleine Größe übertrifft, wo dann aber auch der Winkel α' zwischen der angesetzten Kraft Q und N vergrößert und zu α wird, alsdann wird das Gleichgewicht aufgehoben, es tritt Bewegung ein, P beginnt auf S zu gleiten, und hat man dann

$$\text{tang } \alpha = \frac{T}{P} = \frac{T}{N} = \frac{Q}{P}.$$

Diesen Winkel α , dessen $\text{tang } \alpha = \frac{Q}{P}$ ist, nennt man den Reibungswinkel, die Größe Q nennt man die Reibung im Beginne der Bewegung.

§ 445. Die vielfachen Versuche, theils durch allmähliches Vergrößern der Kraft Q' , die man sich als Gewicht über eine Rolle vertical abwärts angreifend denken kann, theils in der Weise, dass man die horizontale Ebene um eine Gerade sich drehen ließ und den Winkel der schiefen Ebene so lange vergrößerte, bis P zu gleiten begonnen, haben nachstehende Gesetze für die gleitende Reibung ergeben:

1. Die Reibung sowohl beim Beginne als während der Bewegung ist nicht abhängig von der Ausdehnung der sich berührenden Flächen, sondern nur von deren Natur und Glätte.

2. Die Reibung ist auch nicht abhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung.

3. Sie ist proportional der normalen Componente des Druckes.

Das constante Verhältniß

$$\frac{Q}{P} = \frac{Q}{N} = \tan \alpha = F$$

nennt man den Reibungscoefficienten. Dieser Coefficient ist unabhängig vom Drucke P und ist im Beginne der Bewegung etwas größer als während derselben.

Solange also der Reibungswinkel kleiner als α ist, besteht Gleichgewicht.

Auch bei der rollenden Bewegung bildet der Reibungscoefficient F' während des Rollens constant einen gewissen Theil der normalen Componente der Kraft R , und ist derselbe unabhängig von R und vom geraden Durchschnitte des rollenden Cylinders.

Die Zapfenreibung unterscheidet sich von der rollenden Reibung dadurch, dass der Zapfen sich zwar dreht, aber das Lager stets in denselben Punkten berührt. Auch für diese hat man constante Reibungscoefficienten festgestellt.

(Schluß des ersten Bandes.)





Weisstein, Josef

Die rationelle Mechanik von Josef Weisstein

Bd.: 1

1898

Math.a. 251 r-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11867812-3